Հայկական Մաթեմատիկական Ասոցիացիա
ՀՀ Գիտությունների ազգային ակադեմիա
Երևանի Պետական Համալսարան
Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական
Համալսարան

Ակադեմիկոս

ՍԵՐԳԵՅ ՄԵՐԳԵԼՅԱՆԻ

ծննդյան 80-ամյակին նվիրված

Գ Ի Տ Ա Ժ Ո Ղ Ո Վ

20-21 Մայիսի, 2008թ.

Թ ե զ ի ս ն ե ր

Ե ր և ա ն 2008

Մ ե ր գ ե լ յ ա ն - 80

Գիտաժողովի թեզիսներ

20-21 մայիսի 2008 թ., Երևան

Լավագույն մոտավորություններ ամբողջ ֆունկցիաներով

Ն.Հ. Առաքելյան
ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Զեկուցումը համառոտ ակնարկ է կանոնական փակ բազմությունների (իրական առանցք, շերտ, անկյունային տիրույթ) և կոմպակտների որոշ անսահմանափակ կղզիա-խմբերի (արխիպելագների) վրա ամբողջ ֆունկցիաներով հավասարաչափ և շոշափումային մոտավորությունների վերաբերյալ:

Գրականություն

1. H. Kober, *On the approximation to integrable functions by integral functions.* Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 70-82.

2. H. Kober, *Approximation by integral functions in the complex domain,* Trans. Amer. Math. Soc.,1944, 54, 7-31.

3. M. V. Keldysh, *On approximation of holomorphic functions by entire functions* (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1945, 47, no. 4, 239-241.

4. S. N. Bernstein, *Sur la meilleure approximation des fonctions sur l'axe réel par des fonctions entières de degré fini.* I-V. C.R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS 51 (1946), 331-334, 487-490; 2 (1946), 563-566; 54 (1946), 103-108, 475-478.

5. S.N. Mergelyan, *Uniform approximations to functions of a complex variable* (Russian). Uspekhi Mat. Nauk 7, no. 2(48) (1952), 31-122; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (1) 3 (1962).

6. N.U. Arakelian, *Uniform approximation by entire functions with estimates of their growth* (Russian), Sib. Math. Journ., vol. 4, no. 5 (1963), 977-999.

7. N.U. Arakelian, *On uniform and asymptotic approximation on the real axis by entire functions of restricted growth* (Russian), Mat. Sbornik, vol. 113 (155), No. 1 (9) (1980), 3-40; English transl.: Math. USSR Sbornik, vol. 41, no. 1 (1982), 1-32.

8. N. Arakelian, *Approximation and value distribution.* Proceedings of the NATO ASI Institute, Montreal, July 3-14, 2000, Kluwer, 2001, 1-28 pp.

9. N. Arakelian, H. Shahgholian, *Uniform and tangential approximation on a stripe by entire functions, having optimal growth*. Computat. Methods and Function theory, vol.3, no.1 (2003), 359-381.

Равномерная неаменабельность свободных бернсайдовых групп

В. С. Атабекян, ЕГУ

Пусть A - конечное подмножество группы G, а X - конечное порождающее множество группы G. **Границей** подмножества A относительно подмножества $X \subset G$ называется множество $\partial_X(A) \rightleftharpoons \{a \in A | ax \notin A$ для некоторого $x \in X^{\pm 1}\}$.

Напомним, что группа G называется **аменабельной**, если для нее существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре всех подмножеств группы G и такая, что $\mu(G)=1$ и $\mu(gA)=\mu(A)$ для всяких $g \in G, A \subset G$. Класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, факторгруппы, индуктивного предела, расширения.

Известно, что группа аменабельна тогда и только тогда, когда $F\o l_X(G)=0$ для некоторого конечного порождающего множества X, где $F\o l_X(G) \rightleftharpoons \inf_A \frac{|\partial_X(A)|}{|A|}$ и инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$.

Число $F\o l(G) \rightleftharpoons \inf_X F\o l_X(G)$*, где инфимум берется по всевозможным конечным порождающим множествам* X *группы* G*, называется* ***константой Фелнера группы*** G*. Конечно порожденная группа называется* ***равномерно неаменабельной****, если* $F\o l(G)>0$*.*

Согласно [1], любая неэлементарная гиперболическая группа, любая виртуально свободная, а также, любая широкая группа равномерно неаменабельна. С другой стороны, существуют неаменабельные группы, которые не являются равномерно неаменабельными. Теорема 1 усиливает известный результат С.И. Адяна о неаменабельности групп $B(m,n)$ [2].

Теорема 1. *Для любого* $m \geq 2$ *и нечетного* $n \geq 1003$ *свободная бернсайдовая группа* $B(m,n)$ *- равномерно неаменабельная группа.*

Каждая равномерно неаменабельная конечно-порожденная группа имеет равномерный экспоненциальный рост. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Для любого* $m \geq 2$ *и нечетного* $n \geq 1003$ *свободная бернсайдовая групппа* $B(m,n)$ *имеет равномерный экспоненциальный рост.*

Следствие дает положительнтый ответ на вопрос де ля Арпа, поставленный в работе [3]: **имеют ли бесконечные**

свободные бернсайдовые группы $B(m,n)$ равномерно экспоненциальный рост?

Теорема 2. *Для любых двух неперстановочных элементов X и Y свободной бернсайдовой группы периода n в $\{X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}\}$-шаре радиуса $(400n)^3$ содержатся два элемента, которые порождают свободную n-периодическую подгруппу ранга 2.*

Литература

1. G. N. Arzhantseva, J. Burillo, M. Lustig, L. Reeves, H. Short, E.Ventura, “Uniform non-amenability”, *Adv. Math.*, **197:** 2, (2005), 499-522.
2. С. И. Адян, “Случайные блуждания на свободных периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6, (1982), 1139–1149.
3. P. de la Harpe, “Uniform growth in groups of exponential growth”, *Geom. Dedicata*, **95** (2002), 1–17.

Լավագույն հավասարաչափ և շոշափումային մոտավորություն մերոմորֆ ֆունկցիաներով շերտի վրա

Ս. Ալեքսանյան
ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ
asargis@instmath.sci.am

Դիտարկվում է շերտի վրա հավասարաչափ և շոշափումային մոտավորության խնդիրը մերոմորֆ ֆունկցիաներով ենթադրելով, որ մոտարկվող ֆունկցիան անալիտիկ է շերտի ներսում և անընդհատ դիֆերենցելի շերտի վրա: Այդ մոտարկող ֆունկցիաների աճը զնահատվում է Նևանլինայի բնութագրիչի միջոցով և ընդ որում այդ աճի գնահատականը լավագույնն է:

Կասենք $q \in C'\left(R^{+}\right)$ ֆունկցիան պատկանում է B դասին, եթե $q\left(0\right) \geq 0$, q-ն խիստ աճում է R^{+}-ի վրա և գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր սահմանը

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{q'\left(r\right)}{q\left(r\right)} = \rho_q :$$

Թեորեմ: Դիցուք $f \in A'\left(S_h\right)$, $q \in B$, $q \geq 1$: Այդ դեպքում $0 < \varepsilon < 1$, $p > 1$ թվերի համար գոյություն ունի այնպիսի g մերոմորֆ ֆունկցիա, որի բևեռները ընկած են միայն կեղծ առանցքի վրա, որ

$$\left|f\left(z\right) - g\left(z\right)\right| < \frac{\varepsilon}{q\left(\left|z\right|\right)}, z \in S_h$$

$$T\left(r, \varepsilon^{-1}g\right) < k\int_h^{pr}\int_h^{t}\left[\frac{M_{f'}\left(p\tau, \partial S_h\right)}{\varepsilon}q\left(\tau\right) + \frac{\log^{+} M_f\left(\tau\right)}{\varepsilon}\right]\frac{d\tau dt}{\tau t} +$$

$$+k\left[1 + \log q\left(r\right)\right]\log^2\left(pr\right), r > h,$$

որտեղ $k = k\left(p, q\right) > 0$-բացարձակ հաստատուն է:

Գրականություն

1. Р.А. Аветисян, Н.У. Аракелян. Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXIII №6, 1988.

2. Р.А. Аветисян, Н.У. Аракелян. Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXV №6, 1990.

On approximations in spaces of entire functions

G. T. Avanesyan
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences,
avangt@instmath.sci.am

Hilbert space $E_2(\mathbb{C})$ of entire functions with norm

$$\|f\|^2 = \iint e^{-y} \left| f(x+iy) \right|^2 dxdy ;$$

sometimes called Bargmann space, is widely used in modern harmonic analysis, and it is an important tool in numerous applications: in signal processing, phase-space quantum mechanics, in the theory of quantum Hall effect, and others. It is a separable space, and countable bases, in the form of von Neumann lattice associated with the maximal commutative discrete subgroup of Weyl-Heisenberg group representation in the space of entire functions, have critical density $(ab)^{-1} = (2\pi)^{-1}$. First studies in this course are dated back to von Neumann [1]. Balian [2] had proved that the bases on von Neumann lattice, when imposed is, in addition, mutual orthogonality condition, are singular.

Similar fact in connection with the theory of quantum Hall effect were established by Low [3]. The result is known as Balian-Low theorem and plays a central role in modern harmonic analysis. In an attempt to overcome this difficulty, the author had constructed a representation of the maximal discrete *anticommutative* subgroup of the Weyl-Heisenberg group [4]. The set has overall density $(ab)^{-1} = (\pi)^{-1}$, and consists of a quartet of sublattices. The construction leads to a unique entire function of finite order $a(z)$, which is strongly exponentially localized, and gives a solution to the problem of local approximations to entire functions, in a manner, ready to practical applications [5].

Simple expressions for the function $a(z)$, in an explicit form will be presented.

References

1. von Neumann J., 1955 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton: Princeton University Press)

2. Balian R .,1981 Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique *C. R. Acad. Sci., Paris* 292 1357-62.

3. Low F., 1985 Complete sets of wave packets, *A Passion for Physics-Essay in Honour of Geoffrey Chew* ,ed C DeTar (Singapore: World Scientific) pp. 17-22.

4. Avanesyan G., 2004 On exponential localization of magnetic Wannier functions *J. Phys.: Condens Matter* 16 2357,69.

5. Avanesyan G., On asymptotic approximations to entire functions *Submitted to: J. Phys. A: Math.Theor.*

Sharp Inclusions in Mixed Norm Spaces of Analytic Functions

K. L. Avetisyan
Faculty of Physics, Yerevan State University, Armenia
avetkaren@ysu.am

The quasi-normed space $H(p,q,\alpha)(0 < p,q \le \infty, \alpha > 0)$ is the set of those functions $f(z)$ analytic in the unit disc $\mathbb{D}$, for which the quasi-norm

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f;r)dr \right)^{1/q},$$

$$0 < q < \infty, \sup_{0 \le r < 1} (1-r)^{\alpha} M_p(f;r), q = \infty,$$

is finite. Here $M_p(f;r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p}$, $0 \le r < 1$. For $p = q < \infty$ the spaces $H(p,q,\alpha)$ coincide with the well-known weighted Bergman spaces. Corresponding mixed norm spaces consisting of harmonic functions will be denoted by $h(p,q,\alpha)$. The author in [1] proved, among others, some continuous inclusions of Hardy--Littlewood--Flett type in $h(p,q,\alpha)$ in the context of functions n-harmonic in the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$.

Theorem A. For any $\alpha, \beta > 0$, $0 < p, q \le \infty$ the following inclusions are continuous:

$$\begin{array}{lll}
(i) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q,\beta), & \beta > \alpha, \\
(ii) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha), & 0 < p_0 < p \le \infty, \\
(iii) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\alpha), & 0 < q < q_0 \le \infty, \\
(iv) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\beta), & \beta > \alpha + 1/p - 1/p_0, 0 < p \le p_0 \le \infty, \\
(v) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q_0,\beta), & \beta > \alpha + 1/p, 0 < p_0, q_0 \le \infty, \\
(vi) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\beta), & \beta > \alpha, 0 < q_0 \le \infty, \\
(vii) & H^p \subset H\left(p_0, q, \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p_0}\right), & 0 < p < p_0 \le \infty, 0 < p \le q \le \infty.
\end{array}$$

In this note we prove that all the inclusions (i)-(vii) for functions analytic (or harmonic) in $\mathbb{D}$ are strict and best possible in a certain sense. Suitable counterexamples are given.

References

[1] K.L. Avetisyan, Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc, *J. Math. Anal. Appl.* 291 (2004), 727-740.

Разрешимость одной системы интегральных уравнений на полуоси

Л.Г. Арабаджян (АГПУ им. Х. Абовяна)

Рассматриваются вопросы разрешимости одного класса систем вида

$$f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) \cdot \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t) f_j(t)dt, \qquad (*)$$

$i = 1, 2, ..., n, \quad x \in R^+ \equiv (0, \infty)$ и соответствующих однородных систем. Предполагается, что данные функции K_{ij} удовлетворяют условиям:

$\alpha 1. \quad 0 \le K_{ij} \in L_1(R^1)$,

$\alpha 2. \quad A = (a_{ij}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K_{ij}(t)dt \right)$-неразложимая матрица,

$\alpha 3. \quad r(A) = 1$, где r - спектральный радиус,

$\alpha 4. \quad \nu \le 0$ и $\nu \ne 0$, где $\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} tK_{ij}(t)dt$,

а функции λ_{ij} - условиям

$$\beta 1. \qquad 1 \le \lambda_{ij}(x) \le \frac{a_{ij}}{\int_{-\infty}^{x} K_{ij}(t)}, \quad x \in R^+.$$

Доказывается, что при условиях $\alpha 1 - \alpha 4$ и $\beta 1$ однородная ($g_i \equiv 0$) система (*) обладает ограниченным на R^+ решением $f^0 = (f_1^0, f_2^0, ..., f_n^0)$.

Соответствующая неоднородная система (*) также обладает ограниченным решением, если функция g_i удовлетворяет условиям

$$\gamma 1. \; 0 \le g_i \in L_1(R^+), \;\; g_i \downarrow \text{ на } R^+.$$

Analytic structure connected with non-commutative uniform algebras

V. Arzumanian
Institute of Matematics of Armenian Academy,
vicar@insthmat.sci.am
and
S. Grigorian
Kazan State University,Russia,
gsuren@inbox.ru

In the report a non-commutative analogue of the well known Imbedding Theorem of Wermer is represented. It describes an analytic structure on the Gleason's parts of non-commutative uniform algebras (algebras on compact spaces with values in the uniformly closed operator algebra).

For the first time such algebras (in most generality, with C*-fibers, depending on points of a compact space) were introduced by Fell.

We consider the case of constant fiber with some additional restrictions on it, which enables more detailed study of the structure of non-commutative algebras. In particular, if the fiber algebra has a faithful representation, one can introduce pithy notions of spectrum, Gelfand transformation, boundaries invariant algebras on groups, etc.

The corresponding results were expounded in a series of papers of authors.

In the report we introduce a notion of Gleason parts for non-commutative case, and formulate the corresponding imbedding theorem. It permits to recruit operator-valued analytic functions with rich technical tools. By the way we need to study the structure of representations in Hilbert spaces of non-commutative uniform algebras.

Об однозначной разрешимости задачи Дирихле в эллиптических областях

А. О. Бабаян (ГИУА)
barmenak@gmail.com

Пусть D – конечная область, ограниченная эллипсом $\Gamma = \left\{z \in \mathbf{C} : (z - \alpha\bar{z})(\bar{z} - \bar{\alpha}z) = (1 - |\alpha|^2)^2\right\}$ при $|\alpha| < 1$. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 u(x, y) = 0, \ (x, y) \in D, \quad (1)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_\Gamma = f(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

а постоянные μ и ν удовлетворяют условиям $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$, то есть уравнение (1) – правильно эллиптическое. Известные функции f и g принадлежат классам $C^{(1,\delta)}(\Gamma)$ и $C^{(\delta)}(\Gamma)$ соответственно. Решение задачи (1), (2) – функция u, ищется в классе $C^4(D) \cap C^{(1,\delta)}(D \cup \Gamma)$.

Введем следующие обозначения

$$\mu(\alpha) = \frac{\mu + \alpha}{1 + \mu\bar{\alpha}}, \quad \nu(\alpha) = \frac{\nu + \bar{\alpha}}{1 + \nu\alpha}, \quad t(\alpha) = \mu(\alpha)\nu(\alpha). \quad (3)$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Задача Дирихле (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются* *соотношения*

$$\Omega_{2n}(t(\alpha)) \equiv \sum_{k=0}^{n} C_{k+3}^{3}(t(\alpha))^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{k+3}^{3}(t(\alpha))^{2n-k} \neq 0, \quad n = 1,2,\ldots. (4)$$

Если при некотором n условие (4) нарушается, то однородная задача (1), (2) (при $f \equiv g \equiv 0$) имеет ненулевое решение – полином степени $n+3$, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо, чтобы граничные функции f и g удовлетворяли одному условию ортогональности.

Используя свойства многочлена Ω_{2n} ([1],[2]) можно получить достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2):

Теорема 2. *Если постоянная* $t(\alpha)$ *из (3) удовлетворяет условиям* $t(\alpha) > 0$ *или* $|t(\alpha)| < 0.25$*, то задача Дирихле (1), (2) однозначно разрешима.*

Литература

1. Borwein P., Erdelyi T., Polynomials and polynomial inequalities, Springer, 485 p.
2. Anderson N., E. B. Saff, R. S. Varga, On the Enestrom – Kakeya theorem and its sharpness, Linear Algebra and its Appl. 28 (1979), pp. 5 – 16.

Уравнение свертки на полупрямой с ядром, представленным через гамма распределения

А.Г. Барсегян
Институт Математики НАН РА
anibarseghyan@mail.ru

Рассмотрим уравнение Винера-Хопфа

$$S(x) = g(x) + \lambda \int_0^\infty K(x-t) S(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $0 < \lambda \le 1$, $0 \le K \in L_1(-\infty;\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$.

Для уравнения (1) создана богатая аналитическая теория, однако вопросы эффективного решения развиты в меньшей степени. В теории случайных процессов и др. представляет интерес случай, когда ядерная функция K представлена в следующем виде двусторонней смеси гамма распределений:

$$K(\pm x) = \exp(-s_\pm x) P_N^\pm(x), \quad x > 0, \qquad (2)$$

где $P_N^\pm$ – полиномы степени не выше N с неотрицательными коэффициентами:

В работе предлагается простая процедура решения уравнения (1), (2). Рассматривается нелинейное уравнение факторизации (НУФ):

$$V^\pm(x) = \lambda K(\pm x) + \int_0^\infty V^\mp(t) V^\pm(x+t)\, dt, \; x > 0$$

Основное решение НУФ имеет вид $V_\pm(x) = \exp(-s_\pm x) Q_N^\pm(x)$, $x > 0$, где $Q_N^\pm(x)$ суть полиномы с неотрицательными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются простыми итерациями из нелинейных уравнений, которые сходны с известных уравнениями В. Амбарцумяна.

Далее рекуррентной процедурой (относительно искомых коэффициентов) строятся резольвентные ядра вольтерровых операторов с ядерными функциями $V^{\pm}$, что приводит к полному решению задачи как в диссипативном случае $\lambda < 1$, так и – в консервативном случае $\lambda = 1$. Получено явное выражение для решения однородного консервативного уравнения, которое представляет основной интерес с точки зрения теории случайных блужданий.

О некоторых граничных теоремах единственности для субгармонических функций.

С.Л. Берберян

В работе будем придерживаться общепринятых обозначений. Сформулируем полученные результаты:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ - субгармоническая функция, определённая в D и E -некоторое множество на Γ, $mesE > 0$. Предположим, что в каждой точке $\xi \in E$ существуют угловые граничные пределы. Если существует такая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = 1$, что каждая точка множества E является предельной для последовательности $\{z_n\}$ и такое число M, $0 \le M < +\infty$, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, \sigma(z_n, z_{n+1}) \le M$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = -\infty$, то $f(z) \equiv -\infty$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$-субгармоническая функция, определённая в D и $\lim\limits_{z \in L} f(z) = -\infty$ вдоль некоторой жордановой кривой L, лежащей в D и имеющей хотя бы две предельные точки e^{ij_1}, e^{ij_2} на Γ. Если функция $f(z)$ ограничена сверху в некоторой окрестности дуги (e^{ij_1}, e^{ij_2}), то $f(z) \equiv -\infty$.

Теорема 3. Пусть субгармоническая в *D* функция $f(z)$ из класса $\Re$ и не принимает конечного значения α в некоторой окрестности дуги $\gamma \subset \Gamma$. Если существует такая последовательность $\{z_n\}$, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sigma(z_n, z_{n+1}) \le M < +\infty$, и $\{z_n\}$ имеет хотя бы две предельные точки $e^{i\gamma_1}$, $e^{i\gamma_2}$ на дуге γ и $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = -\infty$, то $f(z) \equiv -\infty$.

Об одной многократной интерполяционной задаче для целых функций

М. А. Галдунц

Обозначим через $W_{\pi,p}$ $(p>1)$ банахово пространство целых функций экспоненциального типа со следующей нормой

$$\|f\|_{\pi,p} = \left(\int_R |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

В данном классе рассмотрим следующую многократную интерполяционную задачу.

$$f^{(i)}(nk) = \begin{cases} c_k, & i = 0 \\ 0, & 1 < i < n-1. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Если* $\{c_k\}_{k\in Z} \in l_p$, *то ряд*

$$f(z) = \sum_k c_k \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}(z-nk)}{\frac{\pi}{n}(z-nk)} \right)^n \tag{3}$$

удовлетворяет интерполяционной задаче (2) и

$$|f(z)|e^{-\pi|y|} = O\left(\frac{1}{|z|^n}\right) \qquad (4)$$

Имеет место также обратное утверждение. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условию (4), то она представима рядом (3), где $c_k = f(nk)$. Указанный в теореме подкласс класса $W_{\pi,p}$ обозначим через $W_{\pi,p}^*$.

Теорема 2. *Класс $W_{\pi,2}^*$ совпадает с тем классом функций $f(z)$,представимых в виде*

$$f(z) = \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_{n-1}\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\varphi(t)e^{itz}dt, \qquad (5)$$

где $\varphi(t) \in L_2(-\pi,\pi)$, à $B_{n-1}(t)$ - базисные сплайн-функции.

Оказывается, что система

$$\{f_k(z)\}_{k\in Z} = \left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}(z-nk)}{\frac{\pi}{n}(z-nk)}\right)^n\right\}_{k\in Z} \qquad (6)$$

которая в классе $W_{\pi,2}^*$ является базисом Рисса, обладает биортогональной системой

$$\{\varphi_m(z)\}_{m\in Z} = \left\{\frac{\sin\pi(z-nm)}{n(z-nm)}\right\}_{m\in Z}. \qquad (7)$$

Обозначим через $V_0 = \left\{f(x) \quad st \quad f \in W_{\pi,2}^*\right\}$ и

$$V_k = \left\{ f(x) \quad st \quad f \in W_{2^k,2}^*, \quad k \in Z \right\}. \qquad (8)$$

Тогда имеет место

Теорема 3. *Последовательность подпространств* $\{V_k\}_{k\in Z}$ *образует краткомаситабный анализ (MRA), и с его помощью порождаются вейвелеты*

$$\tilde{\psi}(\xi)=e^{i\xi/2}\,\frac{B_{n-1}\left(\frac{n}{2}\left(-\frac{\xi}{2}-1\right)\right)}{B_{n-1}\left(\frac{n}{2}\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right)}B_{n-1}\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{\xi}{2\pi}\right)\right)\left[\sum\left|B_{n-1}\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{\xi}{2\pi}-2l\right)\right)\right|^2\right]^{-1/2}$$

.

Об усиленном L^1-гриди свойстве системы Уолша

Григорян М.Г., ЕГУ

gmarting@ysu.am

Пусть $\{\varphi_k\}$ - система Уолша. Тогда для любого $0<\epsilon<1$ существуют измеримое множество $E\subset[0,1]$ с мерой $|E|>1-\epsilon$ и ряд вида $\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varphi_i$, $|a_i|\searrow 0$, такие, что для каждой функции $f\in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f}\in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i a_i\varphi_i \qquad \delta_i=01,$$

который сходится к $\tilde{f}$ по норме пространства $L^1(0,1)$.

Из этой теоремы вытекает, что система Уолша-Пэли обладает усиленным $L^1-greedy$ свойством, т.е. для любого $0<\epsilon<1$ существует измеримое множество $E\subset[0,1]$ с мерой $|E|>1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f\in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f}\in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E, и возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_m\}$ такие, что $G_m(x,\tilde{f},\Phi)=S_{N_m}(x,\tilde{f})$, $\forall x\in(0,1)$, и

$$\lim_{m\to\infty} \| G_m(\tilde f, \Phi) - \tilde f \| = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 | G_m(x, \tilde f, \Phi) - \tilde f(x) | \, dx = 0 ,$$

где $G_m(x, \tilde f, \Phi)\}_{m=1}^{\infty}$ - жадный алгоритм функции $\tilde f$ по системе Уолша.

Կանտորովիչի անհավասարությունն ու Գուստաֆսոն-Սեդդիգինի երկրաչափական հատկությունը

Լ. Գևորգյան (ՀՊՃՀ)
levgev@hotmail.com

Իր նշանավոր [1] աշխատանքում Լ. Վ. Կանտորովիչն ապացուցել է մասնավորապես, որ հիլբերտյան H տարածությունում գործող դրական A օպերատորի համար

$$\inf_{x\neq\theta} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|Ax\|\cdot\|x\|} = \frac{2\sqrt{mM}}{m+M} ,$$

որտեղ m –ը և M -ը A օպերատորի սպեկտրի, համապատասխանաբար ստորին և վերին եզրերն են:

Կամայական A օպերատորի համար

$$\inf_{Ax\neq\theta} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|Ax\|\cdot\|x\|}$$

մեծությունը կարևոր նշանակություն ունի, քանի որ այն որոշում է $Ax = b$ հավասարման լուծման հաջորդական մոտավորությունների զուգամիտության արագությունը [2]:

Ներկա աշխատանքում նախ ցույց է տրվում, որ եթե A –ն նորմալ օպերատոր է և նրա սպեկտրը համընկնում է $[a;b]\subset\mathbb{C}$ հատվածի հետ, ապա

$$\inf_{Ax\neq\theta}\frac{\left|\left\langle Ax,x\right\rangle\right|}{\|Ax\|\cdot\|x\|}=2\frac{\sqrt{|a|\cdot|b|}}{|a|+|b|}\cos\frac{\arg a-\arg b}{2}:$$

Գուստֆասոնը և Սեդդիգինը [3] պնդում են, որ վերջավոր չափանի տարածությունում գործող նորմալ օպերատորի համար

$$\inf_{Ax\neq\theta}\frac{\left|\left\langle Ax,x\right\rangle\right|}{\|Ax\|\cdot\|x\|}=\inf_{L}\inf_{x\in L}\frac{\left|\left\langle Ax,x\right\rangle\right|}{\|Ax\|\cdot\|x\|},$$

որտեղ արտաքին ստորին եզրը հաշվվում է ըստ բոլոր երկու չափանի ենթատարածությունների, որոնք ծնվում են A օպերատորի սեփական տարրերով:

Կառուցվում է օրինակ, որը ցույց է տալիս այս պնդման սխալականությունը: Ստացվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի Գուստաֆսոն-Սեդդիգինի երկրաչափական հատկությունը տեղի ունենա:

Գրականություն

1. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи Мат. Наук, 3(28), 89-185 ,(1948).
2. Gevorgyan L., On the convergence rate of iterations and the normalized numerical range of an operator, Math. Sci. Res. J., 8, (2004), no. 1, 16-26, MR2040077 (2004j:47018).
3. Gustafson K., Seddighin M., A Note on Total Antieigenvalues, J. Math. Anal. Appl., 178, (1993), 603-611.
4. Seddighin M., Antieigenvalues and Total Antieigenvalues of Normal Operators, J. Math. Anal. Appl., 274, (2002), 239–254.

Вольтеррова факторизация операторов и уравнения типа Риккати

Н.Б.Енгибарян
Институт Математики НАН РА
yengib@instmath.sci.am

Рассмотрим банахово пространство $L_\alpha(a;b)$, где $(a;b)\subset(-\infty;\infty)$, $1\le\alpha<+\infty$. Алгебра G вполне непрерывных операторов, действующих в $L_\alpha(a;b)$, является прямой суммой подалгебр $G^\pm$ вольтерровых операторов. Элементы $U^\pm\in G^\pm$ характеризуются свойствами $p_sU^+=p_sU^+p_s$, $U^-p_s=p_sU^-p_s$ где p_s проектор умножения на характеристическую функцию интервала $(a;s)\subset(a;b)$. Рассматривается вольтеррова факторизация

$$I-A=\left(I-U^+\right)\left(I-U^-\right) \qquad (1)$$

где I - единичный оператор, $A\in G$, а $U^\pm$ ищутся в $G^\pm$.

В [1] приведено необходимое и достаточное условие существования факторизации (1) в специальных классах операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве. Как и в [1], задача (1) сводится к двум частным задачам: случай оператора A с достаточно малой нормой и случай конечномерного A. Обе задачи решаются с использованием метода нелинейных уравнений факторизации (НУФ). В случае конечномерного A, НУФ сводится к задаче Коши для матричного уравнения Риккати. С использованием одной модификации результатов работы [2] доказывается:

Теорема. Для существования факторизации (1) необходимо и достаточно, чтобы при произвольном $s \in (a;b]$ усеченный оператор $I - p_s A p_s$ был обратим.

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, Наука, М.: 1967.
2. Н.Б.Енгибарян, М.Г.Мурадян, Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Риккати, Докл. АН СССР, Т. 225, 2, 1977.

Параметрическое уравнение траектории полета летательного аппарата при постоянном модуле ускорения, сообщаемого реактивной силой

Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян(ГИУА)
barmenak@gmail.com

В работе рассматривается движение ЛА без крыльев под воздействием реактивной силы $\overrightarrow{F_R} = -k\dfrac{dm(t)}{dt}\dfrac{\vec{V}}{V}$, силы сопротивления окружающей среды $\overrightarrow{F_r} = -\kappa\vec{V}$ и силы притяжения Земли $\overrightarrow{F_g} = m\vec{g}$, где $m(t)$ – масса ЛА в момент времени t, $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$ – скорость ЛА в момент времени t, $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$; k – постоянный коэффициент реактивной силы, $\vec{g} = (0, -g)$ – постоянный вектор. В работе предполагается, что модуль ускорения реактивной силы не изменяется, то есть $F_R = Km(t)$, где K – постоянная величина. При этом

$$m(t) = m_0 \exp(\alpha(t_0 - t)), \quad \alpha = Kk^{-1}, \tag{1}$$

где масса m_0 – представляет собой массу ЛА без топлива в конечной точке полета. В практических задачах можно предполагать, что коэффициент силы сопротивления κ имеет вид ([1], стр. 22):

$$\kappa = K_0 V(x) = K_0 \sqrt{-g(f''(x))^{-1}}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,, \qquad (2)$$

где K_0 – постоянная, зависящая от размеров ЛА и от плотности среды. В этих предположениях получена следующая

Теорема 3. *При задании начальной скорости ЛА,* $\vec{V}(0) = (V_1, V_2) = V_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$, *где* φ – *угол, образованный вектором начальной скорости с положительным направлением оси* Ox, *траектория полета определяется однозначно, и является решением задачи Коши*

$$\frac{gf'''(x)}{2(f''(x))^2} = \frac{K}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} + \frac{K_0 g}{m_0 f''(x)}\sqrt{1+(f'(x))^2}\exp\left(-\alpha\int_x^{x_0}\sqrt{-f''(\xi)g^{-1}}\,d\xi\right), \quad (3)$$

$$f(0)=0, \quad f'(0) = \frac{V_2(0)}{V_1(0)} = \varphi, \quad f''(0) = -\frac{g}{V_0^2\cos^2\varphi}. \qquad (4)$$

Далее, при отсутствии сопротивления воздуха, задача Коши (3), (4) решается в явном виде и определены область досягаемости, а также время полета. Определяются также значения параметров полета, при которых дальность или высота полета максимальны.

Литература

1. А.А. Космодемьянский, Курс теоретической механики, т.2, М. Просвещение, 1966, 398с.
2. N.E.Tovmasyan. The flight of an aircraft along a given trajectory and optimal flight control. Topics in Analysis and its Applications. NATO Science series, Vol.147, Kluwer Academic Publishers, 2004, pp. 347-364.

О представлении многозначных отображений со звездными значениями

А.Р. Хачатрян, Р. А. Хачатрян
Ереванский гос. Университет
xfile.@freenet.am

Пусть X – метрическое, а Y – банахово пространства.

Определение 1. Будем говорить, что многозначное отображение $a : X \to 2^Y$ является H-полунепрерывным снизу (п.н.сн) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x_0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0),\ \forall x \in U(x_0)$.

Определение 2. Пусть $M \subset X$ и

$$M^0 = \{x \in M \,/\, \forall y \in M, \lambda y + (1-\lambda)x \in M, 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Подмножество $M^0 \subseteq M$ называется центром множества *М*. Если $M^0 \neq \varnothing$, то множество M называется звездным.

Теорема 1. Пусть Y – сепарабельное банахово пространство и $a - H$-п.н.сн. многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями , заданное на компактном множестве $E \subset X$. Пусть $M \subset Y$ – звездное замкнутое множество такое, что для любого $x \in E$ имеет место соотношение $\operatorname{int} a(x) \cap M^0 \neq \varnothing$. Тогда существует счетное число липшицевых однозначных отображений $\{y_i(x)\}$ таких, что

$$y_i(x) \in c(x) \equiv a(x) \cap M \ (i = 1, 2, \ldots),$$
$$c(x) = cl\{y_1(x), y_2(x), \ldots\}, \forall x \in E.$$

Литература

1. Хачатрян А.Р., О представлении Липшицевых многозначных отображений. Изв. НАН Армении, математика, 2004, т. 39,N3.
2. Michael E. Continuous selections. 1, Ann.Math. 1956, N 63, p. 361–281.

Разрешимость одной нелинейной системы бесконечных алгебраических уравнений.

Х.А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении

Khach-82@rambler.ru

Рассматривается следующая нелинейная система

$$-\Delta x_i + \epsilon x_i = b_i + \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} Y(x_j),\ \ i = 0,1,2,... \tag{1}$$

относительно искомого бесконечного вектора $\vec{x} = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)^T$ T -знак транспонирования), где $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $n \in Z^+$, $\epsilon -$ заданное положительное число, а

$$\vec{b} = (b_0, b_1, ..., b_n, ...)^T \in m,\ b_i \geq 0,\ \ i \in Z^+ \tag{2}$$

свободный член уравнения (1).

$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=0}^{\infty} -$ бесконечная матрица с неотрицательными элементами удовлетворяющая условию:

$$\mu = \sup_i \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} < +\infty \tag{3}$$

функция $Y(x) = x - w(x)$, где $0 \leq w \downarrow$, причем

$$\mu w(0) \leq b_i \epsilon,\ i \in Z^+ \tag{4}$$

Решение системы (1) ищется в следующем классе бесконечных векторов:

$$G = \left\{ \vec{x} = (x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots)^T : x_n = o((\epsilon + 1)^n), n \to \infty \right\}$$

Система (1)-(4) имеет важное применение в эконометрике, а именно в теории распределения национального дохода в стране.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть справедливы условия (2)-(4). Тогда, если $\mu < \epsilon$, то система уравнений (1) в пространстве m имеет единственное решение $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots)^T$ с неотрицательными компонентами.

Теорема 2. Пусть имеют место условия (2)-(4) и существует бесконечная теплицевая матрица $A^* = \left(a_{i-j}^*\right)_{i,j=0}^{\infty}$ такая что

$$a_{ij} \le a_{i-j}^*, \quad i, j \in Z^+, \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^* = \mu,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |i|\, a_i^* < +\infty, \quad \nu(A^*) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i a_i^* < 1.$$

Тогда в случае $\mu = \epsilon$ система (1) в классе G имеет по компонентно неотрицательное решение $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots)^T$, с асимптотикой $x_n = O(n), n \to \infty$.

Нетеровость регулярного оператора с постоянными коэффициентами в R^n.

Г.А. Карапетян, А.А. Дарбинян

Пусть $\mathcal{N} \doteq \{e^1,\dots,e^N\}$, $e^j \in Z_+^n$ $\left(j=1,2,\dots,N\right)$.

Определение 1. Характеристическим многогранником множества мультииндексов $\mathcal{N}$ называется наименьший выпуклый многогранник $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(\mathcal{N})$ в R^n, который содержит все точки множества $\mathcal{N}$.

Определение 2. Многогранник $\mathfrak{R}$ называется полным, если начало координат Z_+^n является вершиной $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$ имеет вершины на каждой оси координат Z_+^n, отличные от начала координат.

Полный многогранник $\mathfrak{R}$ называется вполне правильным, если внешние нормали всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathfrak{R}$ имеют только положительные координаты.

Мультииндекс $\alpha\in\mathfrak{R}$ называется главным, если он принадлежит к какой-либо $(n-1)$-мерной не координатной грани многогранника $\mathfrak{R}$. Множество всех главных точек из $\mathfrak{R}$ обозначим $\partial'\mathfrak{R}$.

Положим $k\,\mathfrak{R}=\left\{\,k\,\alpha=(k\alpha_1,k\alpha_2,\dots,k\alpha_n),\ \alpha\in\mathfrak{R}\,\right\}$. Под $\alpha\in\mathfrak{R}$ понимаем $\alpha\in\mathfrak{R}\cap Z_+^n$.

Определение 3. Для многогранника $\mathfrak{R}$ и области $\Omega\subset R^n$ обозначим через $H^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ множество измеримых функций $\left\{u\right\}$ с конечной нормой

$$\| u \|_{\Re}(\Omega) \equiv \left(\sum_{\alpha \in \Re} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u(x) |^{2} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Определение 4. Скажем, что линейный дифференциальный оператор $P(D) = \sum_{\alpha \in \Re} p_{\alpha} D^{\alpha}$ регулярный, если с некоторой постоянной $\chi > 0$

$$\left| P^{0}(\xi) \right| \geq \chi \sum_{\alpha \in \partial' \Re} \left| \xi^{\alpha} \right| \quad \forall \xi \in R^{n},$$

где $P^{0}(\xi) \equiv \sum_{\alpha \in \partial' \Re} p_{\alpha} \xi^{\alpha}$.

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \partial' \Re} p_{\alpha} D^{\alpha} + p_{0}, \qquad (1)$$

удовлетворяющий условиям:

1. оператор $P(D)$ регулярен;
2. символ оператора $P(D)$ не равняется нулю, т.е.

3.

$$P(\xi) \equiv \sum_{\alpha \in \partial' \Re} p_{\alpha} \xi^{\alpha} + p_{0} \neq 0 \qquad \text{при всех } \xi \in R^{n}.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $P(D)$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида (1), рассматриваемый как оператор действующий из $H^{(k+1)\Re}(R^{n})$ в $H^{k\Re}(R^{n})$, удовлетворяющий условиям 1 и 2. Тогда оператор $P(D)$ нетеровый.

Задача типа Римана–Гильберта для уравнения Бицадзе в весовых пространствах $L^1(\rho)$

Г.М. Айрапетяан, М.С. Айрапетян (ГИУА)

Пусть $\mathrm{D}^+ = \{z,\ |z| < 1\}$, $\mathrm{T} = \{z,\ |z| = 1\}$. Рассматривается граничная задача типа Римана–Гильберта для уравнения Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad \mathrm{z} \in \mathrm{D}^+ \tag{1}$$

в следующей постановке:

***Задача B**. Определить функцию $u(z)$, удовлетворяющую уравнению* (1) *и граничным условиям*

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \operatorname{Re} a_0(t) u(rt) - f_0(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \operatorname{Re} a_1(t) \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $f_0'(t), f_1(t) \in L^1(\rho)$, $\rho(t) = |1-t|^\alpha$, $\alpha > -1$, $a_0(t), a_1(t) \in C^{\delta+1}(T)$, $\delta > 0$, $a_0(t)$, $a_1(t) \neq 0$.

Устанавливаются следующие утверждения:

а) Если $\min\{n-2\kappa_0, n-2\kappa_1\} > -2$ *или*

$\min\{n-2\kappa_0, n-2\kappa_1\} = -2$ *и* $\kappa_0 \neq \kappa_1$,

то однородная задача имеет $4+2n-2(\kappa_0+\kappa_1)$ *линейно независимых решений.*

б) Если $\min\{n-2\kappa_0, n-2\kappa_1\} < -2$, *то однородная задача имеет* $4+\tilde{\kappa}_0+\tilde{\kappa}_1$ *линейно независимых решений, где* $\tilde{\kappa}_j = \max\{n-2\kappa_j-1; -2\}$.

в) Если $n-2\kappa_0 = n-2\kappa_1 = -2$ *и* $\beta_0^2 = \beta_1^2$, *то однородная задача имеет одно нетривиальное решение.*

г) Если $n-2\kappa_0 = n-2\kappa_1 = -2$ *и* $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, *то однородная задача не имеет нетривиальных решений.*

Здесь $n=[\alpha]+1$, если α -- нецелое число и $n=\alpha$ если α -- целое число, $\kappa_j = ind a_j(t)$,

$$\beta_j = \exp\left(-\frac{1}{4\pi i}\int_T \frac{d_j(\tau)}{\tau} d\tau\right) \quad , \quad d_j(t) = \ln\left(t^{2\kappa_j}\overline{a_j(t)}a_j^{-1}(t)\right),$$

$t \in T$, $j = 0,1$.

Исследуется также неоднородная задача. Когда $\alpha = 0$, эта задача была исследована в работе [1].

Литература

1. Айрапетян Г.М. Граничная задача типа Римана–Гильберта для n – голоморфных функций. – Известия АН Армении. Математика, 31, № 3, 1996, 24 – 41.

On Multiple Hypotheses Optimal Testing by Informed Statistician for Arbitrarily Varying Markovian Source

Evgueni Haroutunian
Institute for Informatics and Automation Problems of the Armenian National Academy of Sciences
eghishe@sci.am
and
Naira Grigoryan
State Engineering University of Armenia
nar.gri@gmail.com

We consider the problem of multiple hypotheses testing for arbitrarily varying Markovian source (AVMS) with state sequence known to the statistician.

An AVMS X is given by a source alphabet $\mathcal{X}$, states alphabet $\mathcal{S}$, and by its distribution law. The latter is defined by matrix of one of the conditional distributions $G_1,\ G_2,\ G_3$ being subject of three hypotheses $H_1,\ H_2$ or H_3, respectively. Observing the sample $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^{N+1}$ generated by the AVMS and vector of (N+1) consecutive states $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{N+1}$ of the source the statistician tries to accept one hypothesis from $H_1,\ H_2$ or H_3. Then error probabilities and its exponents (reliabilities) for all possible pairs of hypotheses are in focus of research.

The problem of logarithmically asymptotically optimal (LAO) testing is treated. LAO testing assumes that a certain number of exponents of error probabilities are given and the maximal values of others must be determined by the best test. We find LAO test and the corresponding matrix of all error probability exponents for model of AVMS.

As an application to information theory, the E- optimal rate $\mathrm{R(E)}$ (the minimum compression rate R when the error probability is less than $\exp\{\text{-NE}\}$, $\mathrm{E} < 0$ and the reliability function $\mathrm{E(R)}$ of AVMS coding are both determined.

Fundamental results in hypothesis testing for discrete memoryless sources were obtained by Hoeffding (1965), Csisz\'ar and Longo (1971), Birg'e (1981) and other. Hypothesis testing for the model of arbitrarily varying source (AVS) was investigated by Fu and Shen (1998). The problem of multiple hypotheses LAO testing for a discrete stationary Markovian source was studied by Haroutunian (1988).The hypothesis testing problem for AVS with side information was formulated and solved by Ahlswede, Aloyan and Haroutunian (2006).

References

W. HOEFFDING (1965): Asymptotically optimal tests for multinomial distributions, *Ann. Math. Statist.*, vol. 36, pp. 369-401.

I. Csis’ar and G. Longo (1971): On the error exponent for source coding and for testing simple statistical hypotheses, *Studia Scientiarum Mathem. Hung.,* vol. 6, pp. 181-191.

L. Birg’e (1981): Vitess maximals de d'ecroissance des erreurs et tests optimaux associes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, vol. 55, pp. 261-173.

F.-W. Fu and S.-Y. Shen (1998): Hypothesis testing for arbitrarily varying source with exponential-type constraint, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 892-895.

E. A. Haroutunian (1988): On asymptotically optimal testing of hypotheses concerning Markov chain, (in Russian), *Izvestiya Akademii Nauk Armenii, Mathematika*, vol. 23, no. 1, pp. 76-80.

R. F. Ahlswede, E. V. Aloyan (2006) and E. A. Haroutunian: On logarithmically asymptotically optimal hypothesis testing for arbitrary varying source with side information, *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 4123. "General Theory of Information Transfer and Combinatorics", Springer verlag, pp. 457-461.

CHORD LENGTH DISTRIBUTION FUNCTION FOR REGULAR POLYGONS

H. S. Harutyunyan and V. K. Ohanyan, YSU

Let G be the space of all lines g in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, $(p,\phi)=$ the polar coordinates of the foot of the perpendicular to g from the origin O, be standard coordinates for a line $g \in G$.

Let $\mu(\cdot)$ stand for locally finite measure on G invariant with respect to the group of all Euclidean motions (translations and rotations). It is well known that the element of the measure up to a constant factor (see [1]) has the following form

$\mu(dg) = dg = dpd\phi$, where dp is one dimensional Lebesgue measure, while $d\phi$ is uniform measure on the unit circle.

For each bounded convex set D the set of lines that intersect D we denote by $[D] = \{g \in G : g \cap D \neq \varnothing\}$ and we have (see [1], [2]): $\mu([D]) = |\partial D|$, where ∂D is the circumference of D and $|\partial D|$ stands for the length of ∂D. A random line in $[D]$ is one with distribution proportional to restriction of μ to $[D]$. Therefore

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{|\partial D|} \quad \text{for any Borel } A \subset [D].$$

Furthermore, let A_D^y be the set of lines that intersect D producing a chord $\chi(g) = g \cap D$ of length less than y:

$$A_D^y = \{g \in [D] : |\chi(g) < y|\}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Distribution function of the length of a random chord χ of D is usually defined as

$$F(y) = \frac{1}{|\partial D|}\mu(D_D^y) = \frac{1}{|\partial D|}\iint_{D_D^y} d\phi dp \tag{1}$$

Therefore, to obtain chord length distribution function for a bounded convex domain $[D]$ we have to calculate the integral in the right-hand side of (1). Explicit formulae for the chord length distribution functions are known only for the cases of a disc, of a regular triangle [3], a rectangle [4], a regular pentagon [5] and a regular hexagon [6].

The main result of the paper is the elementary expression for the chord length distribution function for a regular polygon. The formula is derived by using δ– formalism in Pleijel identity. In the particular cases of a regular triangle, a square, a regular pentagon and a regular hexagon (see [3] - [6]) the results are obtained for $n = 3, 4, 5, 6$ correspondingly.

R E F E R E N C E S

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
3. R. Sulanke, “Die Verteilung der Sehnenl¨angen an ebenen und r¨aumlichen Figuren”, Math. Nachr., vol.23, pp. 51-74, 1961.
4. W. Gille, “The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases”, Exp. Techn. Phys., vol. 36, pp. 197 – 208, 1988.
5. N. G. Aharonyan and V. K. Ohanyan, “Chord length distribution functions for polygons”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), vol.40, no. 4, pp. 43-56, 2005.
6. H. S. Harutyunyan, “Chord length distribution function for regular hexagon”, Uchenie Zapiski Yerevan State University, no. 1, pp. 17-24, 2007.

The uniqueness theorems in the inverse Sturm-Liouville problem

T.N. Harutyunyan
hartigr@yahoo.co.uk

Let $L(q, \alpha, \beta)$ denote the Sturm-Liouville problem

$$ly = -y'' + q(x)y = \mu y, \qquad x \in (0, \pi), \quad \mu \in C \qquad (1)$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \qquad \alpha \in (0, \pi]$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \qquad \beta \in [0, \pi)$$

where $q \in L_R^1[0,\pi]$. It is known, that the spectra of $L(q,\alpha,\beta)$ is discrete and consist of simple eigenvalues $\mu_n(q,\alpha,\beta),\ n = 0,1,2,...$.

Let $y = \varphi(x,\mu,\alpha,q)$ and $y = \psi(x,\mu,\beta,q)$ be the solutions of (1) with initial values

$$\varphi(0,\mu,\alpha,q) = \sin\alpha,$$
$$\varphi'(0,\mu,\alpha,q) = -\cos\alpha$$
$$\psi(\pi,\mu,\beta,q) = \sin\beta,$$
$$\psi'(\pi,\mu,\beta,q) = -\cos\beta .$$

It is easy to see, that $\varphi_n(x) \overset{def}{=} \varphi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\alpha,q)$ and $\psi_n(x) \overset{def}{=} \psi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\beta,q),\ n = 0,1,2,...$ are the eigenfunctions, corresponding to the eigenvalue $\mu_n(q,\alpha,\beta)$.

Since all eigenvalues are simple, there exists constants $c_n = c_n(q,\alpha,\beta),\ n = 0,1,2,...$ such that

$$\varphi_n(x) = c_n \cdot \psi_n(x).$$

Theorem 1. *If for all* $n = 0,1,2,...$,
$\mu_n(q_1,\alpha_1,\beta_1) = \mu_n(q_2,\alpha_2,\beta_2)$, $c_n(q_1,\alpha_1,\beta_1) = c_n(q_2,\ \alpha_2,\ \beta_2)$ *then* $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *and* $q_1(x) = q_2(x)$ *almost everywhere (a.e.) on* $[0,\pi]$.

The problem $L(q,\alpha,\beta)$ is called "even" if $\alpha + \beta = \pi$ and $q(\pi - x) = q(x)$ a.e. on $[0,\pi]$.

Corollary. *The problem* $L(q,\alpha,\beta)$ *is even if and only if* $c_n(q,\alpha,\beta) = (-1)^n$.

We also consider the connections between some of the known uniqueness theorems (see [1], [2]) and our theorem 1 and its corollary.

References

1. Marchenko V. A. *Concerning the theory of a differential operators of the second order.* Trudy Moskow. Math. Obsc., vol. 1 (1952), pp. 327-420 (in Russian).
2. *Isaacson E. L., Trubowitz E. The inverse Sturm Liouville problem, I // Com. Pure and Appl. Math., vol. 36, pp. 767-783, 1983.*

О регулярности решений одного класса уравнений в полосе

Г.Г. Казарян (ЕГУ), *В.Н. Маргарян* (РАУ)

Пусть R^2 и E^2 - двумерные эвклидовы пространства точек соответственно $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ и $x=(x_1,x_2)$, N_0^2 двумерное множество мультииндексов, m_1, m_2 четные числа,

$$\Re=\Re(m_1,m_2)=\left\{\alpha\in N_0^2, \alpha_1\le m_1, \alpha_2\le m_2\right\},\ \chi>0,\ \Omega_\chi=\left\{x\in E^2, |x_1|<\chi, x_2\in R^1\right\}$$

$$g(t)=\begin{cases}1-t^2 & |t|\le 1\\ 0 & t>0\end{cases},\quad g_\chi(t)\equiv g(t/\chi),$$

$$W_g^{\Re}(\Omega_\chi)=\left\{u,\ \sum_{\substack{\alpha_1\le m_1\\ \alpha_2\le m_2}}\left\|(D^\alpha u)g_\chi^{\alpha_1}\right|^2\Big\|_{L_2(\Omega_\chi)}<\infty\right\}.$$

Пусть $P(D_1,D_2)=\sum\limits_{\substack{\alpha_1\le m_1\\ \alpha_2\le m_2}}\gamma_\alpha D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}$ такой дифференциальный оператор, символ которого с некоторой постоянной $d>0$ удовлетворяет следущей оценке

$$1+\left|P(\xi_1,\xi_2)\right| \geq d(\xi_1^{m_1}+\xi_2^{m_2}+\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}) \qquad \forall \xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^2 .$$

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема. Если $\chi > m_1^3 c_1$, где $c_1 = c_1(d, m_2)$ постоянная, то любое решение u уравнения $P(D_1, D_2)u = 0$, для которого $\|u\|_{L_2(\Omega_\chi)} + \left\|D_2^{m_2} u\right\|_{L_2(\Omega_\chi)} < \infty$, является бесконечно дифференцируемой по x_1 функцией в Ω_χ.

Литература

Г.Г. Казарян, В.Н. Маргарян "Об одном классе почти гипоэллиптических уравнений" Изв. НАН Армении. Математика 41. N6, 2006, 39 – 56.

Решение безмоментной системы уравнений теории цилиндрических оболочекпо методу Хилла

Г. Р. Гулгазарян(АГПУ им. Х. Абовяна)

Рассматривются свабодные колебания безмоментных гофрированных незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α,β) $(-\infty<\alpha<\infty$, если цилиндрическая оболочка бесконечна; $0\leq\alpha\leq l$, если цилиндрическая оболочка имеет длину l и $0\leq\beta\leq\beta_0)$ являющиеся соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей кривой. Преполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой представляется в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} &R^{-2} = k_2^2 \sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} R_m \exp(imk_1\beta), \\ &k_1 > 0, \qquad 0\leq\beta\leq\beta_0, \quad \sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} \left|R_m\right| < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $k_2 = 2\pi n_0 / l,\ n_0 \in N$, если цилиндрическая оболочка бесконечна, где l произвольное положителное число, или $k_2 = \pi / l$, если цилиндрическая оболочка имеет длину l. Используется безмоментная система уравнений ортотропных цилиндрических оболочек записанные в выбранных криволинейных кординатах [1]. Компоненты вектора перемещений точки поверхности оболочки ищется в виде

$$u_1 = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{n,m} \exp(imk_1\beta) \right) \cos(k_2 n\alpha) \exp(k_1 \chi\beta),$$

$$u_2 = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{n,m} \exp(imk_1\beta) \right) \sin(k_2 n\alpha) \exp(k_1 \chi\beta),$$

$$w = k_2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{n,m} \exp(imk_1\beta) \right) \cos(k_2 n\alpha) \exp(k_1 \chi\beta).$$

Получены соотношения

$$c_{n,m}(\chi) u_{nm} = n\, a_{n,m}(\chi) w_{n,m},\ c_{n,m}(\chi) v_{n,m} = iq_m\, b_{n,m}(\chi) w_{n,m}\ , \quad (3)$$

$$c_{n,m}(\chi) = \frac{B_{22}}{B_{11}} q_m^4 + \left[\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}+B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right] q_m^2 + (n^2 - \eta^2)\left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right),$$

$$a_{n,m}(\chi) = \frac{B_{22}}{B_{11}} q_m^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta^2,\ b_{n,m}(\chi) = \frac{B_{22}}{B_{11}} q_m^2 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta^2,$$

и бесконечная система уравнений типа Хилла

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} R_\gamma \frac{P_{n,m-\gamma}(\chi)}{R_{n,m}(0)} \omega_{n,m-\gamma} + \frac{R_{n,m}(\chi)}{R_{n,m}(0)} \omega_{n,m} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} R_{-\gamma} \frac{P_{n,m+\gamma}(\chi)}{R_{n,m}(0)} \omega_{n,m+\gamma} = 0,$$

(4)

$$R_{n,m}(\chi)=\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2 q_m^4+\eta^2\frac{B_{66}}{B_{11}}\left[\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}}n^2-\frac{B_{22}+B_{66}}{B_{22}}\eta^2+R_0\right]q_m^2+$$
$$+\frac{B_{66}}{B_{11}}(n^2-\eta^2)\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\left(n^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right)\eta^2-R_0\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{22}B_{66}}n^2-\eta^2\right)\right),$$

$$P_{n,\alpha}(\chi)=\frac{B_{66}}{B_{11}}\left[q_\alpha\eta^2-(n^2-\eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{22}B_{66}}n^2-\eta^2\right)\right],$$
$$q_m=\frac{k_1}{k_2}(\chi i-m),\omega_{n,\alpha}=w_{n,\alpha}/c_{n,\alpha}(\chi); \qquad (5)$$
$$\alpha=m-\gamma,\quad m,\quad m+\gamma\quad;\quad m=0,\pm1,\pm2,...$$

Здесь B_{ij}–коэфициенты упругости, η–безразмерный пара-метр частоты колебаний. χ–характеристический показатель.

Бесконечный определитель системы (4), который обозначим через $\Delta(i\chi)$, называется определителем типа Хилла. Для определения χ получены уравнения

$$\begin{aligned}&\sin^4(i\pi\chi)\ -\left(\sin^2(\pi\theta_n^{(1)})+\ \sin^2(\pi\theta_n^{(2)})\right)\sin^2(i\pi\chi)+\\&+\Delta(0)\sin^2(\pi\theta_n^{(1)})\ \ \sin^2(\pi\theta_n^{(2)})=0\end{aligned}. \qquad (6)$$

Здесь $\theta_n^{(1)}k_1/k_2$ и $\theta_n^{(2)}k_1/k_2$ не зависят от m и являются q_m–корнями уравнения $R_{n,m}(\chi)=0$ с неположительными мнимыми частями. Коэфициенты $\omega_{n,\alpha}=w_{n,\alpha}/c_{n,\alpha}(\chi)$ находятся из системы (4) , а u_{nm} и v_{nm} из соотношений (3).

Литература

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. –М.: Наука. 1974. 446с.

Об одном классе квазилинейных дифференциальных уравнений

Т. В. Маргарян, (РАУ)

Пусть $M \subset R_+^2$ правильный многогранник с вершинами из N_0^2, а $\mathfrak{R}$ многогранник с вершинами $\{(0,0),(0,1/2),(1/2,0),(1/2,1/2)\}$. Обозначим:

$M_0 = \{\alpha, \alpha \in N_0^2 \cap \partial M\}$,

$M_1 = \{\alpha, \alpha \in N_0^2 \cap M\ ,\ \alpha \oplus t\mathfrak{R} \subset M$ при некоторым $t > 1\}$.

Для произвольного многогранника $\Gamma \subset R_+^2$ и ограниченной области $\Omega \subset E^2$, обозначим через $H^\Gamma(\Omega)$ и $\overset{o}{H}{}^\Gamma(\Omega)$ следующие обобщенные пространства Соболева:

$$H^\Gamma(\Omega) \equiv \left\{ g; \|g\|_{H^\Gamma(\Omega)} \equiv \sum_{\alpha \in \Gamma \cap N_0^n} \left\|D^\alpha g\right\|_{L_2(\Omega)} < \infty \right\},$$

$\overset{o}{H}{}^\Gamma(\Omega)$ замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства H^Γ. Пусть

$$P(D) = P(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = P_0(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) + P_1(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta \in M_0} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha_1+\beta_1} \partial y^{\alpha_2+\beta_2}} +$$

$$\sum_{\alpha \in M_1} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} f_\alpha(\frac{\partial^{\gamma^1}}{\partial x^{\gamma_1^1} \partial y^{\gamma_2^1}}, \ldots, \frac{\partial^{\gamma^k}}{\partial x^{\gamma_1^k} \partial y^{\gamma_2^k}}), \quad (1)$$

где $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}$ $(\alpha, \beta \in M_0)$ вещественные числа, $\{\gamma^1, \ldots, \gamma^k\} \equiv M_1$, $f_\alpha(\eta_{\gamma^1}, \ldots, \eta_{\gamma^k})$ вещественнозначные целые функции. Каждому мультииндексу $\alpha \in M_0 \cup M_1$ сопоставим переменную ξ_α.

Будем предпологать, что операторы P_0, P_1 удовлетворяют следующим условиям

$$\sum_{\alpha,\beta \in M_0} a_{\alpha,\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geq c \left(\sum_{\alpha \in M_0} \left| \xi_\alpha \right|^2 \right) \qquad \forall \xi \in R^l,\ l = card\, M_0 \quad (2)$$

$$\sum_{\alpha \in M_1} (f_\alpha(\xi_{\gamma^1}, ..., \xi_{\gamma^k}) - f_\alpha(\eta_{\gamma^1}, ..., \eta_{\gamma^k}),\ \xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq 0 \qquad (3)$$

Теорема 1. Если символ оператора $P(D)$ вида (1) удовлетворяет условиям (2), (3), а $\Omega \subset E^2$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию прямоугольника, то задача Дирихле

$$\begin{cases} P(D)u = f \quad в \quad \Omega \\ u \in \overset{o}{H}{}^{\mathrm{M}}(\Omega) \end{cases} \qquad \forall f \in L_2(\Omega)$$

имеет единственное обобщенное решение.

Литература

1. Rudiger Landes. Math. Z. 157 (1977), 23 – 36,
2. Маргарян Т.В. Изв. НАН. Арм. N6 , 2007. стр. 51–73.

О приближении в среднем многочленами с пропусками на множествах Каратеодори

В. А. Мартиросян., С. Е. Мкртчян (ЕГУ)

В докладе предполагается изложить некоторые новые результаты о возможности приближения многочленами с пропусками. Приближение осуществляется в норме пространства L^p на множествах Каратеодори комплексной плоскости. Получены лакунарные варианты некоторых результатов Маркушевича - Фаррела, С. Синаняна, А. Шагиняна (см. [1] - [3]). Рассматриваются также аналогичные приближения вещественными частями многочленов с пропусками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мергелян С. Н., О полноте систем аналитических функций, Успехи матем. наук, 8, № 4, 1953, 3 – 63.
2. Мельников М. С., Синанян С. О., В сб.: Современные проблемы математики. Итоги науки и техники, том 4, 1975, 143 – 275.
3. Brennan J. F., Approximation in the mean by polynomials on non - Caratheodory domains, Arkiv Mat., 15, 1977, 117 – 168.

Интеграл энергии (Дирихле)

А.Ф. Минасян

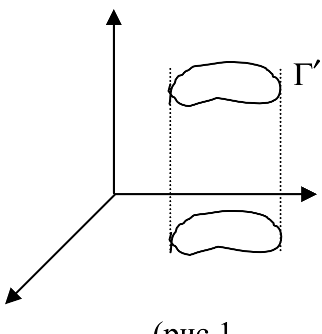
В пространстве (x, y, z) пусть задан достаточно гладкий замкнутый контур Γ', определенный в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(s)\ ,\quad y = \psi(s)\ ,\quad z = \chi(s) \qquad (0 \le s \le l) \qquad (1)$$

Проекцию Γ' на плоскость (x, y):

$$x = \varphi(s),\quad y = \psi(s) \qquad (2)$$

обозначим через Γ. Будем считать, что Γ' проектируется на плоскость (x, y) взаимно однозначно, т.е. контур Γ самонепересекается и ограничивает некото-



(рис.1

рую область Ω плоскости (x, y) (рис.1.)

Пусть на Γ' натянута мембрана, т.е. пленка работающая на растяжение, но не на изгиб. Требуется найти ее уравнение

$$z = u(x, y), \qquad \forall (x, y) \in \Omega \tag{3}$$

Край мембраны закреплен на Γ', поэтому функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничному условию

$$u|_{\Gamma} = \chi(s) = u(\varphi(s), \psi(s)) \qquad 0 \le x \le l \tag{4}$$

Можно доказать, что потенциальная энергия мембраны, с точностью до множителя, характеризующего ее физические свойства, выражается кратным (двойным) интегралом

$$D[u] = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy, \tag{5}$$

который называют интегралом Дирихле функции $u(x, y)$.

Нормально плоские полуэйнштейновы многообразия с равными модулями главных векторов кривизны

В.А. Мирзоян (ГИУА)

Римановы пространства с полупараллельным тензором Риччи являются естественными обобщениями полусимметрических, эйнштейновых и симметрических пространств. Автором было доказано, что пространства с полупараллельным тензором Риччи разлагаются в произведения двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых пространств. В ряде работ автором были построены модели полуэйнштейновых многообразий и подмногообразий. В частности была дана классификация гиперповерхностей с полупараллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах. Настоящая работа продолжает исследования автора по построению новых моделей полуэйнштейновых пространств. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть в евклидовом пространстве E_n m-мерное нормально плоское полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке $x \in M$ только $q \geq 2$ различных ненулевых главных векторов кривизны $n_1,\ldots,n_q$ с кратностями $P_1 \geq 2,\ldots,P_q \geq 2$ и равными модулями. Если распределение кодефектности $T^{(1)}$ подмногообразия M является интегрируемым с интегральным многообразием $M,^{(1)}$ то M локально представляет собой либо цилиндр над $M,^{(1)}$ либо является произведением плоскости размерности $\mu - 1$ и конуса над $M.^{(1)}$ В последнем случае $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере пространства E_n. В обоих случаях $M^{(1)}$ имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым. Как подмногообразия в E_n $M^{(1)}$ является либо прямым, либо скрученным произведением сфер.

Об обратимости теплицевых операторов

Р. З. Мкртчян (ЕГУ)

В работе изучаются некоторые свойства теплицевого оператора с квадратично суммируемым символом, связанных с его обратимостью. В терминах символа теплицевого оператора приводится необходимое условие существования ограниченого обратного оператора. Достсточное условие получено с привлечением дополнительного условия интегрального типа. Кроме того, выведены оценки размерности его ядра.

Կավարների և Բուլյան հանրահաշիվների սուպերարտադրյալը

Յու. Մ. Մովսիսյան, ԵՊՀ

Ուսումնասիրվում է հանրահաշիվների կատեգորիա, որում որպես մորֆիզմներ դիտարկվում են արտապատկերումների $(\varphi, \tilde{\psi})$ զույգերը, որտեղ

$$\varphi A(x_1, x_2, ..., x_n) = (\tilde{\psi} A)(\varphi x_1, \varphi x_2, ...\varphi x_n);$$

Այդ կատեգորիայում արտադրյալը կոչվում է հանրահաշիվների սուպերարտադրյալ:

Զեկուցման մեջ բնութագրվում են կավարների, մոդուլյար և բաշխական կավարների, ինչպես նաև Բուլյան հանրահաշիվների սուպերարտադրյալները:

Равномерная аппроксимация голоморфными функциями на полиэдрах в C*n*

А. И. Петросян (ЕГУ)
albpet@xter.net

Пусть D - полиэдр Вейля в пространстве $\mathbb{C}^n$, т. е. ограниченная область вида

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left|\chi_i\left(z\right)\right| < 1,\ i = 1, 2, \ldots N \right\}, N \geq n\,,$$

где $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N$ функции, голоморфные в некоторой окрестности $\overline{D}$.

Если все определяющие функции χ_i являются полиномами, то D называется полиномиальным полиэдром. Полиэдр называется вещественно невырожденным, если для всякого набора $i_1,\dots,i_k$ на соответствующих ребрах $\sigma_{i_1\cdots i_k}$ имеет место условие $d\left|\chi_{i_1}\right|\wedge\cdots d\left|\chi_{i_k}\right|\neq 0$.

Множества $\sigma_k=\left\{z\in\overline{D}:\left|\chi_k(z)\right|=1\right\}$, $k=1,2,\dots,N$ называются гранями полиэдра, а совокупность n-мерных ребер $\sigma_{k_1\cdots k_n}=\sigma_{k_1}\cap\cdots\cap\sigma_{k_n}$, $(1\leq k_i\leq N)$ образуют его остов.

Пусть, далее, $A(D)$- равномерная алгебра функций, голоморфных в области D и непрерывных на $\overline{D}$. Доказана следующая

Теорема 1. Пусть D- вещественно невырожденный полиэдр и $N\leq 2n$. Тогда всякая функция $f\in A(D)$ равномерно на $\overline{D}$ аппроксимируется функциями, голоморфными на $\overline{D}$.

Если, в частности, полиэдр является полиномиальным, то в силу теоремы Ока-Вейля возможна аппроксимация полиномами.

В случае $\mathbb{C}^2$ в теореме 1 условие невырожденности можно наложить только на остове, потребовав взамен, чтобы полиэдр был специальный, т. е. число определяющих его функций было равно размерности пространства. Отметим, что класс специальных полиэдров достаточно широк в том смысле, что любой полиэдр по теореме Бишопа можно аппроксимировать специальными.

Теорема 2. Пусть $D=\left\{z\in\mathbb{C}^2:\left|\chi_i(z)\right|<1,\ i=1,2\right\}$ - полиномиальный полиэдр Вейля с вещественно невырожденным остовом. Тогда всякая функция $f \in A(D)$ равномерно на $\overline{D}$ аппроксимируется полиномами.

Nevanlinna--Djrbashian Square Summable Classes

A. M. Jerbashian

Institute of Mathematics NAS of Armenia
armen_jerbashian@yahoo.com

Arbitrarily wide classes N_ω^2 of functions subharmonic in the unit disc $|z|<1$ of the complex plane are introduced as the sets of those which belong to the Lebesgue spaces L_ω^2, i.e. satisfy the growth condition

$$\|u\|_{L_\omega^2}^2 = \int\int_{|z|<1} |u|^2 d\mu_\omega(z) < +\infty,$$

where $d\mu_\omega(re^{i\vartheta}) = -d\vartheta d\omega(r^2)$ and $\omega(x)$ is assumed to be a continuously differentiable in $[0,1)$ strictly decreasing, real function, such that $\omega(0)=1$, $\omega(1)=\omega(1-0)=0$ and $|\omega'(x)|$ is strictly decreasing in $[0,1)$.

It is proved that N_ω^2 coincides with the set of functions which admits decomposition as a sum of a Poisson type integral and some Green type $\omega-$potential with a special Riesz measure, and these summands are orthogonal in L_ω^2. These representations particularly become factorizations which are universal for all functions holomorphic in the unit disc.

Об одном тождестве в весовых классах целых функций

Рафаелян С. Г. (ЕГУ)

Пусть $p>1$ и $w\in A_p$ – вес Макенхаупта, т. е. $w(x)\geq 0$ – измеримая на $\mathbb{R}$ функция и удовлетворяющая условию

$$\left(\int_J w(x)dx\right)\left(\int_J w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)\leq C\cdot|J|^p,$$

где $J\subset\mathbb{R}$ произвольный интервал, $|J|$ -его длина, а C - константа. Обозначим через $W_\sigma^p(wdx)$ $(\sigma>0)$ пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа с нормой

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,w(x)dx=\|f\|^p<+\infty$$

Теорема. 1^0. Пространство $W_\sigma^p(wdx)$ совпадает с пространством целых функций f, удовлетворяющих условиям

$$f(z)e^{\pm i\sigma z}\in H_p^{\pm}(wdx),$$

где $H_p^{\pm}(wdx)$-весовые пространства Харди соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}z>0$ и $\operatorname{Im}z<0$.

2^0. Для $f\in W_\sigma^p(wdx)$ имеет место тождество

$$f(z)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\frac{\sin\sigma(t-z)}{\sigma(t-z)}dt,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Մի բազմանդամի արմատների քանակի մասին

Լ. Տեփոյան, Ա. Օսիպովա (ԵՊՀ)
tepoyan@yahoo.com

Դիտարկում ենք Էյլերի տիպի հետևյալ հավասարումը

$$(-1)^n(t^\alpha y^{(n)})^{(n)}-\gamma_{n,\alpha}t^{\alpha-2n}y=0,\qquad(1)$$

որտեղ $t \geq 0$, $\alpha \in [0,2n], \alpha \neq 1,3,\cdots,2n-1$ և

$$\gamma_{n,\alpha} = 4^{-n}\prod_{i=1}^{n}(2i-1-\alpha)^2 :$$

(1) հավասարման բնութագրիչ բազմանդամն է

$$p(\lambda) = (-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda - i)(\lambda - n + \alpha - i) - \gamma_{n,\alpha} :$$

$\mu = \dfrac{2n-1-\alpha}{2} - \lambda$ փոփոխականի փոփարինումով $p(\lambda)$-ն բերվում է հետևյալ տեսքին.

$$\tilde{p}(\mu) = \prod_{l=1}^{n}[4\mu^2 - (2i-1-\alpha)^2] - (-1)^n\prod_{i=1}^{n}(2i-1-\alpha)^2 :$$

Նշանակելով $x = 4\mu^2$, ստանում ենք.

$$f(x) = \prod_{l=1}^{n}[x - (2i-1-\alpha)^2] - (-1)^n\prod_{i=1}^{n}(2i-1-\alpha)^2 = 0 \quad (2)$$

Նշենք, որ ընդհանուր դեպքում (2) հավասարումը չունի n իրական արմատներ: Նկատենք, որ $x = 0$-ն (2) հավասարման լուծում է անկախ α-ից և (2) հավասարումը չի փոխվում α-ն $2n-\alpha$ -ով փոխարինելիս, ուստի բավական է այն հետազոտել միայն $\alpha \leq n$ դեպքում: Ցույց է տրվում, որ երբ $\alpha \in [0,1)$ ($\alpha \in (2n-1,2n]$) բացի $x = 0$-ից (2) հավասարումը ունի ևս $n-1$ դրական արմատներ: Ապացույցը կատարելու համար օգտվում ենք Բոլցանո-Կոշիի առաջին թեորեմից: Նախ դիտարկենք $n = 2k$ դեպքը: Նկատենք, որ այդ դեպքում

$$f((1-\alpha)^2) = f((3-\alpha)^2) = \cdots$$

$$= f((4k-1-\alpha)^2) = -(1-\alpha)^2(3-\alpha)^2\cdots(4k-1-\alpha)^2 < 0,$$

և $f((4i)^2) > 0,\ i = 1,2,\cdots,k$: Ապացույցը կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով, նկատելով, որ

$$g(4^2) > (1-\alpha)^2(3-\alpha)^2\cdots(4k-1-\alpha)^2$$

և

$$\frac{g((4i+4)^2)}{g((4i)^2)} > 1,\ i = 1, 2, \cdots, k-1,$$

որտեղ

$$g(x) = (x-(1-\alpha)^2)(x-(3-\alpha)^2)...(x-(4k-1-\alpha)^2):$$

Մնացած α-ների համար առանձին դիտարկում ենք $\alpha \in (4j-1, 4j+1)$ և $\alpha \in (4j-3, 4j-1)$ դեպքերը: Որպես կետեր վերցնում ենք, համապատասխանաբար, $x=(4i)^2$ և $x=(4i+2)^2$: Այն դեպքում, երբ $n=2k$, $\alpha \in (4j-1, 4j+1)$ և $\alpha \le n = 2k$ համանման դատողություններով եզրակացնում ենք, որ $f(x)$ բազմանդամը, բացի $x=0$-ից, ունի առնվազն $n-2j-1$ դրական արմատներ, իսկ երբ $\alpha \in (4j-3, 4j-1)$՝ առնվազն $n-2j+1$ դրական արմատներ: Նույն ձևով ցույց է տրվում, որ երբ $n=2k+1$, $\alpha \in (4j-1, 4j+1)$ և $\alpha \le n$ (2) հավասարումը ունի առնվազն $n-2j-2$ դրական արմատներ, իսկ $\alpha \in (4j-3, 4j-1)$ դեպքում՝ առնվազն $n-2j$ դրական արմատներ:

Հաշվի առնելով մեր նշանակումները, կարող ենք եզրակացնել, թե նշված դեպքերից յուրաքանչյուրում $p(\lambda)$ բազմանդամը առնվազն քանի իրական արմատ կունենա:

Գրականություն

1. Ondrej Dosly, Simona Fisnarova, “Oscillation and nonoscillation of solution to even order self-adjoint differential equations”, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2003 (2003), No. 115, pp. 1-21.

On Multivariate Trigonometric Interpolation

K.P. Sahakyan (RAU)

It is published not so many works, devoted to questions of multivariate Hermite trigonometric interpolation of functions of several variables. In article of Bojanov and Xu [1] the algebraic polynomials interpolating function of two variables (set in a circle) and its private derivatives of the first order is constructed.

In [2] a problem of multivariate Hermite interpolation is solved for rectangular area. Likely the first work devoted multivariate Hermite trigonometric interpolation, is work of the author [4].

The formula for Hermite trigonometric interpolation of functions of two variables for rectangular area is obtained.

Generalization of the results received in [3] for functions of many variables is offered.

In particular the following formula has been obtained.

$$f(x,y) \approx \sum_{k=0}^{2N}\sum_{p=0}^{2M} a_{k,p}^{0,0}(x,y) f(x_k,y_p) +$$

$$\sum_{k=o}^{2N}\sum_{p=0}^{2M} a_{k,p}^{1,0}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_k,y_p) + \sum_{k=o}^{2N}\sum_{p=0}^{2M} a_{k,p}^{0,1}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x_k,y_p),$$

where

$$x_k = \frac{2(k-N)}{2N+1}, \quad y_p = \frac{2(p-M)}{2M+1} \quad k = 0,1,\ldots,2N;\ p = 0,1,\ldots,2M$$

$$a_{k,p}^{0,0}(x,y)=\frac{\sin\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-x_k)}{(2N+1)\sin\frac{\pi}{2}(x-x_k)}\cdot\frac{\sin\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)(y-y_p)}{(2M+1)\sin\frac{\pi}{2}(y-y_p)}\times$$

$$\times\left(\frac{\sin\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-x_k)}{(2N+1)\sin\frac{\pi}{2}(x-x_k)}+\frac{\sin\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)(y-y_p)}{(2M+1)\sin\frac{\pi}{2}(y-y_p)}-1\right),$$

$$a_{k,p}^{1,0}(x,y)=\frac{2}{\pi(2N+1)^2(2M+1)}\cdot\frac{\sin^2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{\pi}{2}(x-x_k)}\cdot\frac{\sin\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{\pi}{2}(y-y_p)}\cdot\cos\frac{\pi}{2}(x-x_k),$$

$$a_{k,p}^{0,1}(x,y)=\frac{2}{\pi(2N+1)(2M+1)^2}\cdot\frac{\sin\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{\pi}{2}(x-x_k)}\cdot\frac{\sin^2\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{\pi}{2}(y-y_p)}\cdot\cos\frac{\pi}{2}(y-y_p),$$

.

REFERENCES

1. Bojanov B., Xu Y. On a Hermite Interpolation by Polynomials of Two Variables. SIAM Journal on Numerical Analysis Volume 39, Number 5(2002). p. 1780-1793.
2. Sahakian A. A., Gevorgian O. V., Hakopian H. A. Multivariate Hermite Interpolation. East Journal on Approximations, 1, 3(1995). p. 357-371.
3. Sahakyan K. Hermite Trigonometric Interpolation. East Journal on Approximations Vol. 12, Num. 4(2006). p. 441-449.
4. Sahakyan K. Multivariate Hermite Trigonometric Interpolation. East Journal on Approximations (submitted).

Об одной характеристической величине для сравнения линейных однородных систем

Г. Г. Саакян
Арцахский госуниверситет

Для сравнения двух линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вводится характеристическая функция и определяется условие ее постоянства. Сравниваются следующие линейные однородные системы n-ого порядка

$$\overline{y}'(t) = P_1(t)\overline{y} \tag{1a}$$

и

$$\overline{y'}(t) = P_2(t)\overline{y}\,, \tag{1b}$$

где $\left\{P_i(\mathrm{t})\ \left(i=1,\ 2\right)\ \right\}$ -- действительные, непрерывные на отрезке $\left[a;b\right]$ матриц-функции n-ого порядка. Пусть $\overline{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\}$ --произвольное нетривиальное решение системы (1a), а $\overline{v}(t) = \{v_1(t), v_2(t), ..., v_n(t)\}$ - системы (1b). Вводится в рассмотрение функция $W(\overline{u}, \overline{v})$ определяемая, как сумма всевозможных определителей вида

$$\begin{vmatrix} u_i(t) & u_j(t) \\ v_i(t) & v_j(t) \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, ..., n; \quad i < j)\,.$$

Теорема. Если для любых решений $\overline{u}(t), \overline{v}(t)$ соответственно систем (1a) и (1b), $W(u, v) = const$, то матрицы $P_1(t)$ и $P_2^T(t)$ подобны.

Литература

1. Г. Г. Саакян. О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака. Уч. записки ЕрГУ, 2007, N 2, 3-11.
2. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, т. 1, 1953.

О вложимости свободных групп в группы $B(m,n,1)$.

А. С. Пайлеванян

Группа G называется аменабельной, если для нее существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре всех подмножеств группы G и такая, что $\mu(G)=1$ и $\mu(gA)=\mu(A)$ для всяких $g\in G, A\subset G$. Как показано Дж. фон Нейманом, класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, факторгруппы, индуктивного предела, расширения. Важный критерий аменабельности группы был получен Р.И. Григорчуком [1], кем построен первый пример конечно представленной аменабельной группы. Существование неаменабельных групп без свободных подгрупп было доказано впервые А.Ю. Ольшанским [2] (контрпример к гипотезе Дея – фон Неймана). С.И.Адяном [3] получено, что относитеьно свободные группы $B(m,n)$ бернсайдова многообразия при $m\geq 2$ и нечетных $n\geq 665$ неаменабельны и случайное блуждание на $B(m,n)$ не возвратно.

Теорема. Каждая счетная абсолютно свободная группа изоморфно вкладываются в группу $B(m,n,1)$ для любого $m\geq 2$ и нечетного $n\geq 665$.

Следствие 1. Для любого $m\geq 2$ и нечетного $n\geq 665$ группы $B(m,n,1)$ - неаменабельные группы.

Следствие 2. Для любого $m\geq 2$ и нечетного $n\geq 665$ каждая из групп $B(m,n,1)$ порождает многообразие всех групп.

Согласно теореме Деккера, для данной группы G число Тарского $\tau(G)=4$ тогда и только тогда G содержит подгруппу изоморфную неабелевой свободной группе. Поэтому справедливо

Следствие 3. Для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$ $\tau(B(m,n,1)) = 4$.

Литература

1. R. I. Grigorchuk, Adv. Probab. Related Topics, 6 (1980), 285-325.
2. A. Yu. Ol'shanskii, Uspekhi Mat. Nauk, (4(214)) (1980), 199-200.
3. Адян С. И., Случайные блуждания на свободных периодических группах, Изв.АН СССР. Сер. матем., 1982, т. 46, ном. 6, с. 1139-1149.

Об ограниченности проекторов на просранство периодических сплайнов

К.А. Керян, ЕГУ

Рассматриваются операторы ортогонального проектирования из пространства непрерывных функций на пространство периодических сплайнов третьего порядка.

Теорема. Для любого разбиения

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1\}$$

существует постоянная $C_2 > 0$ не зависящая от π такая, что для любой функции $f \in C(0,1)$

$$\|P_\pi(f)\|_C \leq C_2 \|f\|_C ,$$

где P_π оператор ортогонального проектирования из $C(0,1)$ в пространство S_π периодических сплайнов третьего порядка с узлами из π .

Следующая лемма играет роль при доказательстве Теоремы.

Лемма. Существует постоянная $c > 0$, система неотрицательных функций $\{M_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$, которая является базисом пространства S_π функции которые удовлетворяют следующим условиям

$$(M_i,M_i)>(M_i,M_{i-2}+M_{i-1}+M_{i+2})+c(M_i\,,1),$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_i(t) \le 2.$$

Теперь используя основную лемму убедимся, что нормы операторов ортогонального проектирования $P_\pi : C[0,1] \mapsto S_\pi$ являются ограниченными числами, не зависящими от π. Допустим $f \in C[0,1]$, $P_\pi f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i M_i(t)$. Отсюда имеем,что

$$(P_\pi f, M_j) = (f, M_j), \qquad 0 \le j \le N-1.$$

Пусть j выбрано так, чтобы $|a_j| = \max_{0\le i\le N-1} |a_i|$, отсюда, применив лемму, получим

$$|(P_\pi f, M_j)| >$$

$$|a_j|\Big((M_j, M_j) - (M_j, M_{j-2} + M_{j-1} + M_{j+1} + M_{j+2})\Big) > c\,|a_j|\,(M_j, 1).$$

С другой стороны, так как $M_j(t) \ge 0$ для всех t и j, то

$$M_j(t) \ge 0\,|(f, M_j)| \le \|f\|_C\,(M_j, 1)$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$|\ a_j| \le \frac{1}{c}\|f\|_C$$

Для завершения доказательства нам остается заметить, что

$$\|P_\pi f\|_C = \max_{t\in[0,1]} |P_\pi f(t)| \le \max_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{N-1} |a_i|\, M_i(t) \le 2\,|a_j|.$$

Векторное 2-произведения в бесконечномерном евклидовом пространстве

А.А. Огникян (ЕГУ)

Пусть V обозначает n-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел с обычным скалярным произведением (,), и пусть $V^k = V \times V \times \cdots \times V$ прямое произведение k экземпляров V.

Векторное r-произведение в V^k определяется [1] как непрерывное отображение X : $V^k \to V$ $(1 \le r \le n)$, удовлетворяющее условиям

$$\left(X\left(a_1, a_2, ..., a_r\right), a_i \right) = 0, \ \ 1 \le i \le n;$$

$$\left(X\left(a_1, a_2, ..., a_r\right), X\left(a_1, a_2, ..., a_r\right) \right) = \det\left(\left(a_i, a_j\right)\right).$$

Экман и Уайтхед доказали [2], что векторное k-произведение существует тогда и только тогда, когда

1) n-четно, r = 1;
2) n-любое, r = n -1;
3) n = 3 или 7, r = 2;
4) n = 4 или 8, r = 3.

Полилинейные векторные k-произведения в конечномерных векторных пространствах над произвольным полем с произвольными скалярными произведениями были классифицированы в [3].

В бесконечномерном случае известно лишь, что линейных по обоим аргументам 2-векторных произведений не существует. Однако, если отказаться от линейности векторного 2-произведения (наличие которого, впрочем, и не предусматривается в определении), то основываясь на результата работы [4] можно построить 2-векторное произведения и в бесконечномерном пространстве.

Литература

1. B. Ecmann, Stetige Lösungen linearer Gleichungsysteme, Comment. Math. Helv., 15(1942-1943), 318-339.
2. G. W. Whitehead, Note on cross- section in Stiefel manifolds, Comment. Math. Helv., 37(1963), 239-240.
3. R. B. Brown and A. Gray, Vector cross products, Comment. Math. Helv., 42(1967), 222-236.
4. А.А.Огникян, Комбинаторное построение касательных векторных полей на сферах. Матем. Заметки, том 83, вып. 4, стр. 590-605, 2008.

Բովանդակություն