О разрешимости одного класса интегральных уравнений ассоцируемых с уравнением Винера-Хопфа

Л.Г. Арабаджян, С.А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении
Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна
E-mail: *arabajyan@mail.ru*

1. Вопросы разрешимости однородных и неоднородных интегральных уравнений Винера-Хопфа:

$$f(x)=g(x)+\int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad x\in R^+\equiv(0,+\infty), \tag{1}$$

в консервативном случае

$$0\le K\in L_1(R_1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt=1, \tag{2}$$

подробно изучены в работах [1-4].

Многие задачи теории переноса излучения и кинетической теории газов сводятся к уравнению (1), (2) и более общим интегральным уравнениям вида

$$\varphi(x)=g(x)+\lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)\varphi(t)dt, \quad x\in R^+, \tag{3}$$

или

$$\tilde\varphi(x)=g(x)+\int_0^\infty \lambda(t)K(x-t)\tilde\varphi(t)dt, \quad x\in R^+, \tag{4}$$

где K удовлетворяет условиям (2), а функция λ - некоторым асимптотическим условиям.

2. В статье [5] получены достаточные условия нетривиальной разрешимости уравнения

$$B(x)=\lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)B(t)dt, \quad x\in R^+, \tag{5}$$

в случае (2), где функция λ удовлетворет условию

$$0 \le \lambda(x) \le 1, \quad x \in R^+ \tag{6}$$

и некоторым дополнительным условиям, зависящим от значения величины $\nu \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tK(t)dt$. А именно, в [5] доказано, что для существования ненулевого решения B уравнения (5) в случае (2) и (6) достаточно одно из следующих условий (7) или (8):

$$\nu < 0 \quad \text{и} \quad (1 - \lambda(x)) \in L_1(R^+); \tag{7}$$

$$\nu = 0 \quad \text{и} \quad (1 - \lambda(x))x \in L_1(R^+), \tag{8}$$

причем в случае (7) это решение ограничено, а в случае (8) оно имеет асимптотику $B(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$. Вопросы разрешимости неоднородных уравнений (3) или (4) при условиях (2) и (6) решаются посредством сравнения этих уравнений с мажорантным уравнением (1) с тем же ядром K.

3. В работе [6] излучены вопросы разрешимости однородного ($g \equiv 0$) и неоднородного уравнения (3) в случае (2), когда функция λ на R^+ допускает оценку

$$1 \le \lambda(x) \le \left(\int\limits_{k}^{\infty} K(t)dt \right)^{-1}, \quad x \in R^+. \tag{9}$$

(Очевидно что $\lambda(x) \downarrow 1$ при $x \to +\infty$). В [6], в частности, доказана

Теорема A. *Уравнение (5), в случае (2) и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|K(t)dt < +\infty$ *причем* $\nu < 0$*, где* $\nu \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tK(t)dt$*, при выполнении условия (9) обладает нетривиальным на* R^+ *решением B.*

Теорема B. *Уравнение (3) (или (4)) в случае (2) и* $\nu < 0$*, при выполнении условия (9) и условий*

$$0 \le g \in M(R^+) \cap L_1(R^+) \quad \textit{и} \quad g \downarrow \quad \textit{на} \quad R^+, \tag{10}$$

обладает неотрицательным решением φ*, причем* $\varphi \in M(R^+)$*.*

Утверждение теоремы A остается в силе, если функция λ удовлетворяет более общему, чем (9) условию

$$\tilde{\lambda}(x) \le \lambda(x) \le \left(\int\limits_{x}^{\infty} K(t)dt \right)^{-1}, \quad x \in R^+,$$

где $\tilde{\lambda}-$ произвольная функция, удовлетворяюшая условию (6) и одному из условий (7) или (8).

4. В настоящей работе рассмотрен случай $\nu = 0$. Относительно функции λ предпологается, что она на R^+ удовлетворяет соотношениям

$$1 \leq \lambda(x) \leq 1 + \left(S(x) + \int\limits_{-\infty}^{x} K(t)dt \right)^{-1} \int\limits_{x}^{\infty} K(t)dt, \quad x \in R^+, \qquad (11)$$

где $S-$ положительное возрастающее решение однородного уравнения Винера-Хопфа (см. [2])

$$S(x) = \int\limits_{0}^{\infty} K(x-t)S(t)dt, \quad S(0) = \alpha > 0. \qquad (12)$$

с той же, что и в (5) данной функцией K, для которой имеет место (2).

Согласно результатам работы [2] при $\nu < 0$ указанное решение S ограничено на R^+, а в случае $\nu = 0$ это решение имеет поведение $S(x) = O(x)$, при $x \to +\infty$. Для уравнения (5) справедлива

Теорема 1. *Если в уравнении (5) данные функции λ и K удовлетворяют условиям (11) и (2), причем $\nu = 0$, то это уравнение обладает положительным решением B, причем $B(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим итерации к решению уравнения (5):

$$B_{n+1}(x) = \lambda(x) \int\limits_{0}^{\infty} K(x-t)B_n(t)dt, B_0(x) \equiv S(x)+1, n = 0, 1, 2, ... \qquad (13)$$

для $x \in R^+$, где $S-$ решение соотвестующего уравнения (12). Покажем что на R^+ эти итерации убывают по n и ограничены снизу функцией S. Действительно, для $n = 0$ с учетом (11) имеем

$$B_1(x) = \lambda(x) \int\limits_{0}^{\infty} K(x-t) \left(S(t) + 1\right) dt =$$

$$= \lambda(x) \left(S(x) + \int\limits_{-\infty}^{x} K(t)dt \right) \leq S(x) + 1 = B_0(x).$$

Посредством соотношений (13) индукцией по n можно доказать справедливость неравенств $B_{n+1}(x) \leq B_n(x), \quad x \in R^+$ для любого $n \in N$.

Покажем, что для любого n справедливо $B_n(x) \geq S(x), x \in R^+$. При $n = 0$ это очевидно. Если для некоторого $n \geq 0$ имеет место оценка $B_n(x) \geq S(x), x \in R^+$, то из (13) с учетом $\lambda(x) \geq 1$ получаем

$$B_{n+1}(x) = \lambda(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)B_n(t)dt \geq$$

$$\geq \lambda(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)S(t)dt \geq \lambda(x)S(x) \geq S(x).$$

Таким образом, последовательность $\{B_n\}$ монотонно убывает по n (на $R+$) и ограничена снизу функцией S. Поэтому существует конечный предел $B(x) = \lim\limits_{n\to\infty} B_n(x), x \in R^+$, который, как легко убедиться, удовлетворяет уравнению (5), причем в $+\infty$ имеет поведение $B(x) = !\emptyset(x), x \to +\infty$.

5. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям работы [6] можно доказать разрешимость уравнения (3) в случае $\nu = 0$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть в уравнении (3) функция K удовлетворяет условию (2), причем $\nu = 0$, а функция K удовлетворяет условию (2), причем $\nu = 0$, а функции λ и g удовлетворяют, соответственно, условиям (11) и (10), причем $\int\limits_0^\infty tg(t)dt < +\infty$. Тогда это уравнение обладает неотрицательным решебием φ с асимптотическим поведением $\varphi(x) = o(x)$, при $x \to +\infty$.*

Авторы вырожают благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за обсуждение полученного результата.

Список литературы

[1] *Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностным ядрами и нелинейные функциональные уравнения. Матем, сборник 1975, том 97, N1, с. 35-58.

[2] *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.*Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Математический анализ, т. 20. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР, Москва, 1984, с. 175-244.

[3] *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера-Хопфа. Ереван ут-т. Препринт, 1979, N01, 27с.

[4] *Арабаджян Л. Г.* О консервативном уравнении Винера-Хопфа. Изв АН Арм ССР, Математика, том 16, N1, 1981, с 65-80.

[5] *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде. Дифференц. уравнения, том 23, N9, 1987 с. 1618-1622.

[6] *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об уравнении переноса в случае возможности размножения частиц. Изв НАН Армении, Математика, том 41, N5, 2006, с 5-10.