Восстанавление меры на пространстве плоскостей

Р.Г. Арамян

Институт математики НАН Армении
Российско-Армянский университет
E-mail: *rafikaramyan@yahoo.com*

Некоторые задачи интегральной геометрии приводят к интегральным уравнениям на сфере с ядрами, зависящими от разности углов. Рассматривается задача восстановления меры плоскостей по флаговым плотностям и решение этой задачи сводится к обращению интегрального уравнения. Пусть $\mathbf{E}$ пространство плоскостей в $\mathbf{R}^3$, μ локально- конечная, знакопеременная мера в пространстве $\mathbf{E}$ с плотностью h относительно инвариантной (при эвклидовых движениях) меры (см. [1]), т.е.

$$\mu(de) = h(e)de. \tag{1}$$

Используя меру μ, определим в пространстве флагов следующую (флаговую) функцию (см. [2])

$$\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi) = \int_{\mathcal{E}_2} \cos^2(\varphi - \psi)\, h_P(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Здесь $[P]$ - пучок плоскостей, содержащих точку $P \in \mathbf{R}^3$, $h_P(\xi)$ - сужение h на $[P]$, ψ - это направление проекции ξ на плоскость флага f, $\mathcal{E}_2$ - стандартное эллиптическое пространство. Функцию ρ, заданную на пространстве флагов $\mathcal{F}$, будем называть флаговой плотностью.
Формула (2) определяет интегральное преобразование

$$h \to \rho \tag{3}$$

и мы ставим задачу его обращения (т.е. восстановления h (следовательно и μ) по заданной функции ρ).
В [3], с помощью методов интегральной геометрии, получена формула обращения для преобразования (3).
При решении четвёртой проблемы Гильберта: *конструктивное определение всех непрерывных плоских метрик*, А.В. Погорелов ([4]) показал, что любая гладкая, линейно-аддитивная метрика в $\mathbf{R}^3$ порождается

знакопеременной мерой в пространстве плоскостей. Иными словами линейный элемент $F(P,\Omega)$ этой метрики допускает представление

$$F(P,\Omega)=\int_{\mathcal{E}_2}|(\xi,\omega)|\,h_{[P]}(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

где $h_{[P]}(\xi)$ сужение плотности $h(e)$ меры μ на пучок $[P]$.

Оказывается, что найденная формула обращения преобразования (3) можно использовать для восстановления знакопеременной меры в пространстве плоскостей из гладкой, линейно-аддитивной метрики в $\mathbf{R}^3$.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, “Combinatorial integral geometry, metric and zonoids”, Acta Appl. Math., vol.9, 1987.

[2] Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян “Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I“, Изв. НАН Армении. Математика, том **29** (4), стр. 3 – 51, 1994.

[3] Р. Г. Арамян, “Порождение меры в пространстве плоскостей и сферический функционал Эйлера“, Изв. АН Армении, Математика, том **29** (4), стр. 64 – 90, 1994.

[4] А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.