Методы гильбертова пространства в теории сигналов

Г.Т. Аванесян, А.Г. Мужикян

Институт математики НАН Армении
Российско-Армянский университет
Институт радиофизики и электроники НАН Армении
E-mail: *avangt@instmath.sci.am, amuzhikyan@irphe.am*

В современной теории сигналов велика роль представлений в частотно-временной области, где особенно существенны эффекты локализации [1]. В развивающихся технологиях обработки сигналов подход имеет множество применений. Практически важные примеры сигналов - короткие узкополосные импульсы. Сигналы, наиболее локализованные в частотно-временной плоскости, представлены гауссианом: его уникальность обеспечивается минимизацией соотношения неопределенностей Гейзенберга. Менее локализованы импульсы, представляемые - на языке квантовой механики, как возбужденные состояния гармонического осциллятора. Свойства локализации коротких узкополосных импульсов в глобальном контексте подчиняются ограничениям теоремы Бальяна-Лоу. Несовместимость локализации и ортогональности порождает трудности в кодировании: невозможно манипулировать задержками и частотами независимо - для достижения наилучшей производительности в рамках данной полосы пропускания и в течении данного интервала времени; так проявляется некоммутативность частотно-временной плоскости.

Формулировка и анализ проблемы восходят к фон Нейману [2], идея элементарных сигналов, выдвинутая Габором [3] является другой формулировкой той же проблемы. Бальян [4] доказал, что базисы, связанные с решеткой Габора-фон Неймана сингулярны, когда накладывается дополнительное условие ортогональности. Аналогичный факт в связи с квантовым эффектом Холла был установлен Лоу [5].

Обойти трудности в реализации оригинальных идей фон Неймана и Габора, которые возникают в связи с теоремой Бальяна-Лоу о локализации, возможно путем построения неприводимого представления антикоммутативной подгруппы группы Вейля-Гейзенберга [6]. Единственная целая функция, которая естественно возникает в этом подходе приводит к квадратично-интегрируемому, двоякопериодическому и экспоненциально локализованному базису, который решает вопрос о локальной асимптотической аппроксимации целых функций, в метрике гильбертова пространства [7]. Теперь подходы [8] могут быть распространены на дискретный базис, с помощью небольшой модификации преобразования Баргмана. Ситуация может быть охарактеризована как синтетическая, между подходами цитированной выше статьи и современной теории вейвлетов [9]. Цель настоящего сообщения - продемонстрировать, как это точное представление может быть применено к задачам теории сигналов, традиционно расммтриваемых как элементы $L_2(\mathbb{R})$ (сигналы конечной энергии) [10].

Некоммутативная геометрия частотно-временной плоскости в контексте теории сигналов может быть описана учтя, что сдвиги и модуляции образуют некоммутативную непрерывную группу Вейля-Гейзенберга, а ее максимальная коммутативная подгруппа, которая формирует решетку Габора-фон Неймана, подчиняется ограничениям теоремы Бальяна-Лоу. Рассмотрение антикоммутативной подгруппы группы Вейля-Гейзенберга, с соответственной решеткой двойной плотности, позволяет обойти трудности с существующими сингулярностями. Рассматриваемая подгруппа генерируется сдвигами $T_a : f(t) \to f(a+t)$ и модуляциями $T_b : f(t) \to \exp(ibt)f(t)$ с $ab = \pi$, и имеет место антикоммутационное соотношение

$$T_a T_b = -T_b T_a. \tag{1}$$

Подробности подхода представлены в [6] в применении к теории квантового эффекта Холла. Из-за несовместимости локализации и ортогональности, возможно либо использовать описание в терминах некоммутативных и неортогональных подрешеток, которые представляют соответствующие подпространства гильбертова пространства сигналов, либо мириться с весьма слабой локализацией (как для функции $sinc$) и бесконечностью(!) произведения неопределенностей $\Delta\omega\Delta t$. Ослабление условия ортогональности приводит к неортогональным подпространствам, и, как следствие, к необходимости рассмотрения двумерных инвариантных подпространств гильбертова пространства.

Усложнение, таким образом, сводится к необходимости рассмотрения четырех взаимно неортогональных подпространств гильбертова пространства, которые представлены соответствующими четырьмя подрешетками, но в каждом из четырех подпространств существует базис со свойством сильной экспоненциальной локализации, представленный сдвигами единственной функции [7]

$$a(t) \propto \sqrt{1/\vartheta_3(t)}e^{-\frac{t^2}{2\pi}}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n e^{-2\pi n^2 - \pi n}\cosh(2nt)). \tag{2}$$

Функция $\vartheta_3(t)$, которая входит в определение выше, соответствует так называемому лемнискатному случаю теории эллиптических функций, и $\vartheta_\mu(t)$ - тэта-функция Якоби $\vartheta_\mu(t, e^{-\pi})$. Фактор $e^{-\pi n}$ в сумме выше отвечает за сильную экспоненциальную локализацию. Функция (2) совпадает с собственным преобразованием Фурье. Коэффициенты α_n определяются как коэффициенты разложения в ряд Фурье для $\sqrt{1/\vartheta_4(t)}$. Система базисных векторов фиксируются следующим образом:

$$a_{m,n}(t) = a(t + am)\exp(ibn(t + am/2); \tag{3}$$

Наиболее важен быстрый экспоненциальный спад: наш метод анализа и реконструкции основан на асимптотически точной формуле, которая следует из разложения единицы для гильбертова пространства, совместимым с некоммутативной геометрией частотно-временной плоскости. Соответствующие скалярные произведения рассчитываются как интегралы

$$f_{mn} = \int \overline{a_{m,n}(t)} f(t)dt. \tag{4}$$

По существу, измерение амплитуды сигнала, согласно уравнению (4), требует задержки в точности обратно-пропорциональной уровню шума, благодаря сильной экспоненциальной локализации функции $a(t)$.

Тот же основной факт сильной экспоненциальной локализации позволяет использовать конечные суммы

$$f(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} f_{mn} a_{mn}(t) \tag{5}$$

в качестве асимптотических приближений внутри прямоугольника $2Ma \times 2Nb$. Сигнал представлен набором $\{f_{mn}\}$.

Заметим, что формулы (4) и (5) в равной мере относятся и к частотному представлению сигнала.

Более подробная информация о методе и его применениях содержится в [10].

Список литературы

[1] Grochenig K 2000 *Foundations of Time-Frequency Analysis* (Boston, MA: Brikhauser)

[2] von Neumann J 1955 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton: Princeton University Press)

[3] Gabor 1946 Theory of communication *J. IEE* **93** 429-57

[4] Balian R 1981 Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique *C. R. Acad. Sci., Paris* **292** 1357-62

[5] Low F 1985 Complete sets of wave packets *A Passion for Physics-Essay in Honour of Geoffrey Chew* ed C De Tar (Singapore: World Scientific) pp 17-22

[6] Avanesyan G 2004 On exponential localization of magnetic Wannier functions *J. Phys.: Condens. Matter* **16** 2357-69

[7] Avanesyan G 2008 On asymptotic approximations to entire functions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 285203 (8pp)

[8] Kritikos H N and Cho J H 1997 Bargman transforms and phase space filters *Prog. Electromagn. Res.* **17** 45-72

[9] Daubechies I 1992 *Ten lectures on wavelets* (Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992, Philadelphia, PA)

[10] Muzhikyan A, and Avanesyan G 2010 Asymptotically Exact Sampling and Reconstruction in Time-Frequency Domain *IET Signal Processing* (Submitted to)