О дефектных числах задачи Дирихле для правильно эллиптических уравнений

А.О. Бабаян

Государственный инженерный университет Армении
E-mail: *barmenak@gmail.com*

Аннотация

В работе определяются дефектные числа задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка в единичном круге. Показано, что при определенном расположении корней характеристического уравнения эта задача или является однозначно разрешимой, или дефектные числа равны единице.

Ключевые слова: задача Дирихле, однозначная разрешимость, дефектные числа, правильно эллиптическое уравнение.

Mathematics Subject Classification 2000:35J40, 35J25, 35J30, 30G20

Пусть D -единичный круг комплексной плоскости и $\Gamma = \partial D$. Мы рассматриваем эллиптическое дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 U}{\partial x^k \partial y^{4-k}} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где A_k такие комплексные постоянные $(A_0 \neq 0)$, что корни $\lambda_j, j = 1, \ldots, 4$ характеристического уравнения

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \tag{2}$$

удовлетворяют условиям

$$Im\lambda_1 > 0, Im\lambda_2 > 0, \quad Im\lambda_3 < 0, Im\lambda_4 < 0. \tag{3}$$

Мы ищем функцию U - решение уравнения (1), в классе $C^4(D) \cap C^{1,\alpha}(D \cup \Gamma)$, удовлетворяющую на границе Γ условиям Дирихле:

$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial N^k}\right|_{\Gamma} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \ \ k = 0, 1. \tag{4}$$

Здесь f_1 и f_2 некоторые заданные на Γ функции, которые вместе с $\frac{df_1}{dS}$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ, $\frac{\partial}{\partial N}$ - производная по направлению внутренней нормали к Γ, а $\frac{d}{dS}$ - производная по длине дуги Γ.

Задача (1), (4) фредгольмова (см. [1], [2]). В [3] и [4] были получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости этой задачи в единичном круге. Аналогичный результат для правильно эллиптического уравнения высшего порядка был получен в [5]. В работах [3], [5] были получены формулы, позволяющие, в случае нарушения однозначной разрешимости, по коэффициентам уравнения (1) определить дефектные числа задачи (1), (4). Далее, в [6] было отмечено, что эти результаты можно уточнить. Было показано, что при нарушении однозначной разрешимости при некотором расположении корней характеристического уравнения дефектные числа задачи (1), (4) равны единице. Целью настоящей работы является доказательство этого утверждения для другого расположения корней характеристического уравнения.

Для точной формулировки полученных результатов, представим (1) в комплексной форме, используя обозначения

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i},\ \ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

При этом уравнение (1) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)U = 0, \quad (5)$$

при $(x, y) \in D$, где

$$\mu_k = \frac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k},\ \ \nu_k = \frac{i+\lambda_{2+k}}{i-\lambda_{2+k}},\ \ k = 1, 2.$$

Отметим, что из (3) имеем

$$|\mu_k| < 1,\ \ |\nu_k| < 1, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда что $\lambda_1 = i$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_3 \neq \lambda_4$. Обозначим

$$\delta = \mu_2\nu_1, \quad \gamma = \mu_2\nu_2 \quad (7)$$

Для этого случая в [3] было доказано, что задача (1), (4) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 3, 4, \ldots. \quad (8)$$

При этом, если при некотором k_0 имеем $\Delta_{k_0} = 0$, то однородная задача (1), (4) (при $f_k \equiv 0$, $k = 1, 2$) имеет одно нетривиальное решение, соответствующее этому Δ_{k_0}, которое является многочленом, порядка $k_0 + 1$. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо выполнение одного линейно независимого условия на граничные функции. Таким образом, для определения дефектных чисел рассматриваемой задачи необходимо и достаточно подсчитать количество детерминантов Δ_{k_0}, которые обращаются в нуль.

Получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть δ и γ из (7)- действительные числа. Тогда условия (8) могут нарушаться только при одном значении k. Таким образом, в этом случае задача (1), (4) или является однозначно разрешимой, или дефектные числа этой задачи равны единице.*

Отметим, что утверждение теоремы 1 также верно и в случае, когда $\lambda_1 = i$, $\lambda_3 = \lambda_4$ (см. [6]). Поэтому можем предположить, что эта теорема верна при произвольном расположении корней характеристического уравнения, однако это утверждение нуждается в доказательстве.

Список литературы

[1] N. E. Tovmasyan. Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Publishing Co. Ltd. Singapore, N.-J., London, Hong-Kong, 1998.

[2] J.-L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I. Dunod. Paris. 1968.

[3] А. О. Бабаян. Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений четвертого порядка. Известия НАН Армении. Математика. Т. 34, N5, 1999, стр. 1-15.

[4] Е. А. Буряченко. О единственности решения задачи Дирихле в круге дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях. Нелинейные граничные задачи. Сб. научных трудов, вып. 10, Донецк, 2000, стр. 44-49.

[5] А. О. Бабаян. О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге. Известия НАН Армении, Математика, т. 38, №6, 2003, с.39-48.

[6] А. О. Бабаян. Об дефектных числах задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка. Материалы международного Российско-Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики Нальчик-Эльбрус, 2009 стр. 44-46.