О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

А.К. Гущин

УДК 517.9

Математический институт им В.А.Стеклова РАН
E-mail: *gushchin@mi.ras.ru*

В ограниченной области Q n-мерного пространства $\mathbf{R}_n$ с границей ∂Q из класса C^1 рассматривается задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

$$u \mid_{\partial Q} = u_0 \tag{2}$$

с граничной функцией u_0 из $L_p,\ p > 1$. При постановке такой задачи естественно требовать принадлежность решения пространству $W^1_{p,loc}(Q)$, что гарантирует существование его следов из L_p на гладких $(n-1)$-мерных поверхностях и позволяет определить выполнение граничного условия как существование и равенство функции u_0 предела в L_p этих следов при стремлении поверхности к границе, см. [1], [2] и [3]. Однако, в отличии от случая $p = 2$, при $p \neq 2$ это требование приводит к необходимости условия непрерывности коэффициентов в $\overline{Q}$: без него при $p > 2$ эта задачи может не иметь решения, а при $p < 2$ нельзя гарантировать единственность даже решения из $W^1_2(Q)$. При выполнении условий непрерывности коэффициентов $a_{i,j}$ в $\overline{Q}$ и выпуклости области Q теорема об однозначной разрешимости в $W^1_p(Q)$ задачи (1), (2) (для неоднородного уравнения с однородным краевым условием) была доказана в работе [4].

В гильбертовом случае $p = 2$ рассматриваемая задача достаточно подробно изучена, см. [5] и [6]. В работе [6] при условии непрерывности по Дини нормали к границе и коэффициентов $a_{i,j}$ на границе (внутри области они измеримы и ограничены) доказана однозначная разрешимость этой задачи и установлено свойство $(n-1)$-мерной непрерывности решения.

[1]*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00178-а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-7675.2010.1).*

В настоящей работе предлагается другой подход к постановке рассматриваемой задачи Дирихле. Требуется, чтобы решение принадлежало $W^1_{2,loc}(Q)$. Принадлежность следов пространству L_p (при больших значениях p) обеспечивается теоремой о внутренней непрерывности решения по Гельдеру, см. [7], [8]; в случае неоднородного уравнения это свойство нужно дополнительно требовать. В такой постановке справедлива теорема об однозначной разрешимости задачи Дирихле (1),(2) (с граничной функцией из L_p) при тех же условиях, что и случае $p = 2$ (без условия непрерывности коэффициентов внутри рассматриваемой области). Конечно, при $p > 2$ такое решение u не обязано принадлежать $W^1_{p,loc}(Q)$. Но функция $|u|^{p/2}$ (при любомх $p > 1$) принадлежит весовому пространству W^1_2 с равным расстоянию до границы весом. Более того, принадлежность функции $|u|^{p/2}$ этому пространству является необходимым и достаточным условием ограниченности (по параметру δ) отношения интеграла от p-ой степени модуля решения уравнения (1) по приграничной полосе

$$\{x \in Q : \delta < \operatorname{dist}(x, \partial Q) < 2\delta\}$$

к ширине δ этой полосы.

Список литературы

[1] *Гущин А.К., Михайлов В.П.* О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 1979. Т. 108. N 1. С. 3 – 21.

[2] *Петрушко И.М.* О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Матем. сб. 1983. Т. 120. N 4. С. 569 – 588.

[3] *Михайлов Ю.А.*О граничных значениях в $L_p, P > 1$, решений эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. N 2. С. 318 – 337.

[4] *Алхутов Ю.А., Кондратьев В.А.* Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. N 5. Стр. 806 – 817.

[5] *Михайлов В.П.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. N 10. С. 1877 – 1891.

[6] *Гущин А.К.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 137. N 1. С. 19-64.

[7] *DeGiorgi E.* Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1957. V. 3. P. 25 – 43.

[8] *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V.80. P. 931–954.