О решениях одного типа однородных одномерных псевдодифференциальных уравнений

А.Г. Камалян, В.В. Симонян

Институт математики НАН Армении
Ереванский государственный университет
E-mail: *kamalyan_armen@yahoo.com, vahan@simonyans.com*

Пусть $r \in \mathbb{R}$, S_r^0-множество локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций f удовлетворяющих условию $|f(\xi)| \leq c(1+|\xi|)^r$ при некотором положительном c, а $H_r(\mathbb{R})$-пространство Соболева-Слободецкого обобщенных функций u, преобразование Фурье $\widehat{u}$ которых принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}, (1+|x|)^r)$.

Определим функцию

$$A(x,\xi) = 1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^{N} \varphi(x,\lambda_k) A_k(\xi)$$

где $x, \xi, \lambda_k \in \mathbb{R}\,(k=1,2,\ldots,N)$, $\varphi(x,\lambda) = th\frac{\pi}{\alpha}\left(x-\lambda+i\frac{\alpha\beta}{2}\right)$, $A_k(\xi) \in S_r^0$, $(k=0,1,\ldots,N)$, $\alpha > 0$, $-1 < \beta < 1$. Определим также следующие функции $Q_i(x) = 1 + A_0(x) - (-1)^i \sum_{k=1}^{N} A_k(x)$ $(i=1,2)$, $Q(x) = Q_1(x) Q_2^{-1}(x)$, $\Psi(x) = Q\left(\alpha^{-1}\ln x\right)$ при $x>0$ и $\Psi(x) = 1$ при $x<0$. Как известно (см. [1]), псевдодифференциальный оператор $A(x,D)$ действующий по формуле

$$A(x,D)y = F^{-1}_{\xi\to x} A(x,\xi) F_{x\to\xi} y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} A(x,\xi)\,\widehat{y}(\xi)\,d\xi,$$

является ограниченным оператором из $H_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.

В случае $N=1$ и $r=0$ оператор $A(x,D)$ является известным интегральным оператором "плавного перехода" (более подробно см. [2], [3]). В случае когда $N=1$, а A_0 и A_1- многочлены, дифференциальное уравнение $A(x,D)\,y = 0$ может быть записано в виде $(P_1(D) + e^x P_2(D))\,y = 0$ $(D = i\frac{d}{dx}$ а P_1 и P_2 некоторые многочлены). С помощью замены переменной последнее уравнение сводится к хорошо известному в теории специальных функций дифференциальному уравнению

$$\epsilon t \prod_{j=1}^{p} \left(t\frac{d}{dt} - a_j + 1 \right) y + \prod_{j=1}^{q} \left(t\frac{d}{dt} - b_j \right) y = 0,$$

где $\epsilon = \pm 1, p, q \in \mathbb{N}, a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Как известно, решения этого уравнения записываются с помощью G- функции Мейера (см. [4], [5]).

В случае когда $r = 0$, оператор $A(x, D)$ матрично сцеплен с некоторым сингулярным интегральным оператором(см. [3], [6]).

В случае $r > 0$ ситуация гораздо сложнее. Несмотря на это, исследование уравнения $A(x, D)\, y = 0$ в классе $H_r(\mathbb{R})$ сводится к исследованию некоторого однородного матричного сингулярного уравнения в классе $L_2\left(\mathbb{R}, |t|^{\beta}\right)$ (см. [7], где рассмотрен случай $N = 1$). На основе этой связи, доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r \geq 0$, $A_k \in C(\mathbb{R}) \cap S_r^0$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$, $Q_i^{-1} \in S_{-r}^0$ $(i = 1, 2)$, существуют не нулевые конечные пределы $q_{\pm} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} Q(x)$ и $\theta_{\pm} = arg\left(e^{i\pi\beta} q_{\pm}\right) \neq \pi$. Если целое число*

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\left(ArgQ(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \theta_+ + \theta_- \right)$$

меньше нуля, то уравнение $A(x, D)y = 0$ имееет по крайней мере $|\kappa|$ решений из класса $H_r(\mathbb{R})$.

В случае $N = 1$ функция Ψ допускает обобщенную факторизацию в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}, |t|^{\beta}\right)$ $\Psi(t) = \Psi_-(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa} \Psi_+(t)$ (см. [8] а также [7]).

Если $\kappa \geq 0$, то уравнение $A(x, D)y = 0$ в классе $H_r(\mathbb{R})$ имеет лишь тривиальное решение, а при $\kappa < 0$ система функций

$$y_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{st} Q_2^{-1}(t) \frac{1}{e^{\alpha t} + i} \Psi_+^{-1}\left(e^{\alpha t}\right) \left(\frac{e^{\alpha t} - i}{e^{\alpha t} + i} \right)^{j-1} dt,$$
$$j = 1, \ldots, -\kappa,$$

является базисом $KerA(x, D)$, где $\sigma = \alpha(\beta + 1)/2$ и $s = \sigma + i\zeta$ $(\zeta \in \mathbb{R})$.

Здесь и ниже предполагается, что значение arg принимается в интервале $(-\pi, \pi]$.

Заметим, что в случае дифференциального оператора, т.е. когда функции A_k $(k = 0, 1, \ldots, N)$ являются многочленами, число κ равно $l_1 - l_2$, где l_i-количество нулей многочлена Q_i $(i = 1, 2)$ в верхней полуплоскости. Если кроме того $N = 1$, то

$$\Psi_+(z) = z^{-m} z^{-\frac{\ln q}{2\pi i}} \times$$
$$\times \frac{\prod_{k=1}^{l_1} G\left(z, -i, \lambda_k^+\right) \prod_{k=1}^{N-l_2} G\left(z, \mu_k^-, i\right)}{\prod_{k=1}^{l_2} G\left(z, -i, \mu_k^+\right) \prod_{k=1}^{N-l_1} G\left(z, \lambda_k^-, i\right) \left[G(z, -i, i)\right]^{l_1 - l_2}},$$

где

$$G = (z, \xi, \eta) = z^{-1/2}(z+i)\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta\right) \times$$
$$\times B\left[\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi\right), -\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta\right)\right]$$

(B - бета-функция), $q = \lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x)$, m целое число определяется из условия $\left|\frac{1}{\pi}\arg q + \beta + 2m\right| < 1$, $\lambda_1^+, \ldots, \lambda_{l_1}^+$, $\lambda_1^-, \ldots, \lambda_{N-l_1}^-$ - нули Q_1, а $\mu_1^+, \ldots, \mu_{l_2}^+$, $\mu_1^-, \ldots, \mu_{N-l_2}^-$ - нули Q_2, удовлетворяющие условиям

$$Im\left(\lambda_k^+\right) > 0, Im\left(\mu_s^+\right) > 0, \quad (k = 1, \ldots, l_1, s = 1, \ldots, l_2),$$
$$Im\left(\lambda_k^-\right) < 0, Im\left(\mu_s^-\right) < 0, \quad (k = 1, \ldots, N - l_1, s = 1, \ldots, N - l_2).$$

Из теоремы 1, в частности, следует следуюшее утверждение.

Теорема 2. *Пусть P_k $(k = 0, 1, \ldots, N)$ многочлены от одной переменной и $r = \max\limits_{k=0,\ldots,N} \deg P_k = \deg P_0 = \deg P_N$. Если $P_0(x) \neq 0$, $P_N(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и количество корней l_0 многочлена P_0 в верхней полуплоскости $Imz > 0$ больше чем количество корней l_N многочлена P_N в верхней полуплоскости, то дифференциальное уравнение*

$$\sum_{k=0}^{N} e^{kx} P_k(D)\, y = 0, \quad D = i\frac{d}{dx}$$

имеет по крайней мере $l_0 - l_N$ решений в классе $H_r(\mathbb{R})$.

Пусть $A'(x, \xi) = 1 + P(\varphi(x, \lambda))\, \widetilde{A}(\xi)$ $(x, \xi, \lambda \in \mathbb{R})$, где $\widetilde{A}(\xi) \in S_r^0$, $P(z) = \prod_{k=1}^{N}(z - \nu_k)$, $z, \nu_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Функция $A'(x, \xi)$ при подходящем выборе чисел λ_k $(k = 1, \ldots, N)$ и функций $A_k(\xi)$ может быть записана в виде

$$1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^{N} \varphi(x, \lambda_k)\, A_k(\xi).$$

Тем не менее, применение теоремы 1 к уравнению $A'(x, D)\, y = 0$ осложнено в связи с необходимостью явного нахождения упомянутых переменных λ_k, $A_k(\xi)$.

Прямой подход не опирающийся на теорему 1 дает следующую оценку для количества решений уравнения $A'(x,D)\,y=0$.

Теорема 3. *Пусть* $r>0$, $\widetilde{A}\in S_r^0\cap C(\mathbb{R})$, $\widetilde{A}^{-1}\in S_{-r}^0\cap C(\mathbb{R})$, $P(\pm1)\neq 0$, $1+P(\pm1)\,\widetilde{A}(x)\neq 0\,(x\in\mathbb{R})$, $\arg\left(e^{-i\pi\beta}\frac{\nu_k+1}{\nu_k-1}\right)\neq\pi\,(k=1,\ldots,N)$ *и целое число* κ *определяется равенством*

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\;Arg\frac{1+P(1)\,\widetilde{A}(x)}{1+P(-1)\,\widetilde{A}(x)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty},$$

тогда если $\kappa<0$, *то уравнение* $A'(x,D)\,y=0$ *имеет по крайней мере* $|\kappa|$ *решений из* $H_r(\mathbb{R})$.

В качестве иллюстрации теоремы 3 приведем следующий пример. Пусть $\beta=0$, P - многочлен, корни которого находиться вне отрезка $[-1,1]$, существуют числа w_1, w_2 такие что $Imw_1>1$, $0<Imw_2<1$ и $P(1)=4\left(w_1^2+1\right)^{-1}$, $P(-1)=4\left(w_2^2+1\right)^{-1}$. Тогда уравнение $y''-y'+\frac{1}{P(\varphi)}y=0$ имеет решение в $H_2(\mathbb{R})$.

Список литературы

[1] Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М.: Наука, 1973.

[2] Черский Ю. И. Нормально разложимое уравнение плавного перехода, ДАН СССР.-1970. Т. 190, No. 1., с. 57-60.

[3] Камалян А. Г., Нерсесян А. Б. Интегральные операторы типа плавного перехода, АН СССР, Функ. анализ и его прилож., Т. 23, No. 2., с. 32-39, М.: 1989.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 1, М.: Наука, 1973.

[5] Mathai A. M., Saxena R. K. Generalized Hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 348, Berlin: Springer, 1973.

[6] Bart H., Gohberg I., Kaashoek M. A. The coupling method for solving integral equations, Advances and Aplications, Vol. 12, Birkhauser,Verlag, Basel, 1984, p. 39-73.

[7] Камалян А. Г., Симонян В. В. О разрешимости одного типа одномерных псевдодифференциальных операторов, Изв. НАН Армении, Математика, т.43, No.4, 2008.

[8] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев: Штинца, 1973.