О положительных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Урысона на полуоси

Х.А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении
E-mail: *Khach82@rambler.ru*

Настоящее сообщение посвящено исследованию вопросов разрешимости и асимптотических свойств решений в бесконечности для следующих классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Урысона соответственно:

$$1)\quad \varphi(x)=\int_0^\infty \mu(x)[K_0(x-t)-\varepsilon K_0(x+t)](\varphi(t)-\omega(t,\varphi(t)))dt,\ x>0 \quad (1)$$

$$2)\quad f(x)=\int_0^\infty K(x,t,f(t))dt,\quad x>0 \quad (2)$$

относительно искомых функций φ и f.

В уравнении (1) $\omega(t,z)$–определенная на $(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$ измеримая функция, причем существует число $A>0$, такое что

- $\omega(t,z)\downarrow$ по z на $[A,+\infty)$ при каждом фиксированном $t\in(0,+\infty)$, (3)
- $\omega(t,z)\geq 0,\quad (t,z)\in(0,+\infty)\times[A,+\infty)\equiv\Omega_A,$ (4)
- $\omega(t,z)\leq \overset{\circ}{\omega}(t+z),\quad (t,z)\in\Omega_A,$ (5)
- $\omega(t,z)$ – удовлетворяет условию Каратеодори на множестве Ω_A (6)

  по аргументу z (см. [3]).

В (1) $K_0(x)$–определенная на $(-\infty,+\infty)$ положительная функция, причем

$$K_0\in L_1(-\infty,+\infty)\cap M(-\infty,+\infty),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}K_0(\tau)d\tau=1, \quad (7)$$

$$\nu_j=\nu_j(K_0)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^jK_0(x)dx<+\infty,\quad j=1,2,3, \quad (8)$$

$$K_0(x)\downarrow \text{ на } (0,+\infty). \tag{9}$$

Обозначим через $\mu(x)$–некоторую измеримую функцию на $(0,+\infty)$, удовлетворяющую условиям:

$$0<\mu_0\leq\mu(x)\leq 1, \quad (1-\mu(x))x^j\in L_1(0,+\infty),\ j=0,1, \tag{10}$$

$$\mu(x)\uparrow \text{ по } x \text{ на } (0,+\infty). \tag{11}$$

Введем также функцию $\overset{\circ}{\omega}(z)$–определенную на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющую следующим условиям: пусть существует число $A>0$, такое что

$$\overset{\circ}{\omega}(z)\geq 0,\ z\in[A,+\infty),\ \overset{\circ}{\omega}(z)\downarrow \text{ по } z \text{ на } [A,+\infty), \tag{12}$$

$$\overset{\circ}{\omega}\in L_1(0,+\infty)\cap C[0,+\infty), \quad m_1(\overset{\circ}{\omega})\equiv\int\limits_0^\infty z\overset{\circ}{\omega}(z)dz<+\infty. \tag{13}$$

Введем следующие интегральные операторы типа Винера-Хопфа и Ганкеля с ядрами $K_0(x-t)$ и $K_0(x+t)$ соответственно:

$$(\mathcal{K}_1f)(x)=\int\limits_0^\infty K_0(x-t)f(t)dt, (\mathcal{K}_2f)(x)=\int\limits_0^\infty K_0(x+t)f(t)dt, f\in E, \tag{14}$$

где E–одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0,+\infty)$, $p\geq 1$ $M(0,+\infty)$, $C_M(0,+\infty)$, $C_0(0,+\infty)$. Как известно (см. [1]), при выполнении условий (7)-(8), оператор $I-\mathcal{K}_1+\varepsilon\mathcal{K}_2$ ($\varepsilon\in[0,1)$–числовой параметр) допускает следующую факторизацию:

$$I-\mathcal{K}_1+\varepsilon\mathcal{K}_2=(I-V_-)(I+W)(I-V_+), \tag{15}$$

где $V_\pm$–верхние и нижние вольтерровые операторы с положительными ядрами $v_\pm\in L_1(0,+\infty)$ вида:

$$(V_-f)(x)=\int\limits_x^\infty v_-(t-x)f(t)dt,\ (V_+f)(x)=\int\limits_0^x v_+(x-t)f(t)dt, f\in E, \tag{16}$$

$$\gamma_\pm=\int\limits_0^\infty v_\pm(x)dx\leq 1, \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+)=0, \tag{17}$$

а W–интегральный оператор типа Ганкеля с ядром $W(x)\geq 0, W\in L_1(0,+\infty)$ вида:

$$(Wf)(x)=\int\limits_0^\infty W(x+t)f(t)dt, \quad f\in E. \tag{18}$$

Построению ядер операторов $V_{\pm}, W$ и исследованию их свойств посвящены работы [1]-[2].

Для уравнения (1) доказываются теоремы 1 и 2:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (7)-(13), (3)-(6). *Тогда, если* $K_0(-x) > K_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, +\infty)$, *то уравнение* (1) *обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\{\varphi_\gamma(x)\}_{\gamma \in J}$, *причем*

- $0 < \varphi_\gamma(x) \in M(0, +\infty),\ \gamma \in J, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \varphi_\gamma(x) = 2\gamma c, \qquad (19)$
- *если* $\gamma_1, \gamma_2 \in J$, $\gamma_1 > \gamma_2$, *то* $\varphi_{\gamma_1}(x) - \varphi_{\gamma_2}(x) \geq 2(\gamma_1 - \gamma_2)\beta_0 > 0. \qquad (20)$

Здесь

$$J \equiv \left[\max(\frac{\max(\varkappa, \gamma_0)}{\beta_0}, A), +\infty\right), \tag{21}$$

$\varkappa = \sup\limits_{x \in (0,+\infty)} Q(x) < +\infty$, *где* $Q(x)-$*ограниченное и положительное решение следующего неоднородного уравнения*

$$Q(x) = 2\overset{\circ}{\omega}(x + A) + \mu(x) \int\limits_0^\infty [K_0(x - t) - \varepsilon K_0(x + t)]Q(t)dt, \tag{22}$$

$c = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} B(x) > 0, \quad \beta_0 = \mathop{inf}\limits_{x \in \mathbb{R}^+} B(x) > 0$, *а* $B(x)-$*ограниченное и положительное решение следующего однородного уравнения:*

$$B(x) = \mu(x) \int\limits_0^\infty [K_0(x - t) - \varepsilon K_0(x + t)]B(t)dt, \quad x > 0, \tag{23}$$

а $\gamma_0 \geq A-$*некоторое число для которого* $\overset{\circ}{\omega}(\gamma_0) < \gamma_0$. *Более того, если* $\omega \downarrow$ *по* t, *то* $\varphi_\gamma(x) \uparrow$ *по* x *на* $(0, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (7)-(13), (3)-(6), *а* $K_0(-x) = K_0(x), x \in (0, +\infty)$. *Тогда*
a)если $\lambda = -1$ *является собственным значением оператора* W, *то уравнение* (1) *обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\{\varphi_\gamma(x)\}_{\gamma \in J}$, *обладающим свойствами* (19), (20),
b) если же $\lambda = -1-$*не является собственным значением оператора* W *и* $l_0 \equiv \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau / K_0(x) < +\infty$, *то уравнение* (1) *также обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\{\varphi_\gamma(x)\}_{\gamma \in J}$, *причем*

- $0 < \varphi_\gamma(x) \sim 2\sqrt{2}(\nu_2)^{-1/2}\gamma x, x \to +\infty, \qquad (24)$

- *если* $\gamma_1,\gamma_2\in J$, $\gamma_1>\gamma_2$, *то* $\varphi_{\gamma_1}(x)-\varphi_{\gamma_2}(x)\geq 2(\gamma_1-\gamma_2)\beta_0$, (25)
- *если* $\omega\downarrow$ *по* t, *то* $\varphi_\gamma(x)\uparrow$ *по* x *на* $(0,+\infty)$. (26)

Отметим, что свойства решений уравнений (22), (23) не предпологаются, а устанавливаются в ходе доказательств теорем 1 и 2.

С использованием теорем 1 и 2 доказываются следующие результаты для уравнения (2):

Теорема 3. *Предположим, что существует число*

$$\eta\geq 2\max\left(\frac{\max(\varkappa,\gamma_0)}{\beta_0},A\right),c=\sup_{x\in\mathbb{R}^+}B(x),$$

такое что

1) $K(x,t,\tau)\uparrow$ *по* τ *на отрезке* $[A,\eta]$ *при каждом фиксированном* $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$,

2) K *удовлетворяет условию Каратеодори на множестве* $\Omega_\eta\equiv\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times[A,\eta]$ *по третьему аргументу* τ *и при всякой измеримой функции* $0\leq\varphi(x)\leq\eta$ *функции* $K(x,t,\varphi(t))$, $\int\limits_0^\infty K(x,t,\varphi(t))dt$ *измеримы соответственно по* t *и по* x,

$$3)\,K(x,t,\tau)\geq\mu(x)(K_0(x-t)-\varepsilon K_0(x+t))(\tau-\overset{\circ}{\omega}(t+\tau)),\qquad (x,t,\tau)\in\Omega_\eta,\quad\varepsilon\in[0,1),\quad(27)$$

$$4)\quad\int\limits_0^\infty K(x,t,\eta)dt\leq\eta,\ x\in\mathbb{R}^+,\qquad(28)$$

где функции μ,K_0 *и* $\overset{\circ}{\omega}$ *удовлетворяют условиям* (7)-(13). *Если* $K_0(-x)>K_0(x)$, $x\in\mathbb{R}^+$, *то уравнение* (2) *обладает положительным и ограниченным решением* $f(x)$, *причем* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\eta$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (7)-(10) *теоремы 3 и* $K_0(-x)=K_0(x)$,
$x\in\mathbb{R}^+$. *Тогда, если* $\lambda=-1-$*является собственным значением для оператора* W, *то уравнение* (2) *имеет положительное и ограниченное решение* $f(x)$, *причем* $f(x)\leq\eta$.

Теорема 5. *Пусть* $\lambda=-1-$*не является собственным значением для оператора* W, *а* K_0-*удовлетворяет условиям* (7)-(9) *и* $l_0<+\infty$. *Предположим также, что существует число* $\delta\geq 2\max\left(\frac{\max(\varkappa,\gamma_0)}{\beta_0},A\right)$ *такое что*

а) *при каждом фиксированном* $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ *функция* $K(x,t,\tau)\uparrow$

по τ *на множестве* $\left[0, \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}t + c_0\right)\right]$, *где* $c_0 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |L(x)|$, $L(x) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}x-$*нетривиальное решение однородного уравнения*

$$S(x) = \int_0^\infty [K_0(x-t) - \varepsilon K_0(x+t)]S(t)dt, \quad x > 0, \tag{29}$$

$b)$ $K-$*удовлетворяет условию Каратеодори на множестве* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *по третьему аргументу* τ *и при всякой измеримой функции* $0 \leq \varphi(x) \leq \delta(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}x + c_0)$, *функции* $K(x, t, \varphi(t))$, $\int\limits_0^\infty K(x, t, \varphi(t))dt$ *измеримы соответственно по* t *и по* x,

$$c) \quad K(x, t, \tau) \geq \mu(x)(K_0(x-t) - \varepsilon K_0(x+t))(\tau - \overset{\circ}{\omega}(t+\tau)),$$
$$(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \tau \in \left[0, \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}t + c_0\right)\right] \tag{31}$$

$$d) \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\nu_2}}x + c_0} \int_0^\infty K(x, t, \delta(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}t + c_0))dt \leq \delta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{32}$$

Тогда уравнение (2) *обладает положительным решением* $f(x)$ *с асимптотикой* $f(x) \sim \frac{\delta}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}}x, \quad x \to +\infty.$

Примеры интегральных уравнений.

Для следующих классов уравнений автоматически выполняются все условия теоремы 3 и 4.

$$i_1) \quad f(x) = \mu(x) \int_0^\infty [K_0(x-t) - \varepsilon K_0(x+t)](G(f(t)) - \omega(t, f(t)))dt, \ \varepsilon \in [0, 1),$$

где либо $K_0(-x) > K_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$, либо $K_0(-x) = K_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$ и $\lambda = -1-$является собственным значением для оператора W. Здесь $G-$ определенная на отрезке $[A, \eta]$ $\left(\eta \geq 2c \max\left(\frac{\max(\varkappa, \gamma_0)}{\beta_0}, A\right)\right)$ непрерывная функция, причем

- $G \uparrow$ на $[A, \eta]$, • $G(x) \geq x, \ x \in [A, \eta]$, • $G(\eta) = \eta$, а функции μ, K_0 и ω удовлетворяют условиям (7)-(13), (3)-(6).

$$i_2) f(x) = \int_0^\infty R(x, f(t))[K_0(x-t) - \varepsilon K_0(x+t)](G(f(t)) - \omega(t, f(t)))dt, x \in \mathbb{R}^+,$$

где $\varepsilon \in [0,1)$, K_0, μ и ω удовлетворяют условиям (7)-(13), (3)-(6), а $R(x,\tau)$ - определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ вещественная функция, причем

- $R \uparrow$ по τ на $[A, \eta]$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$,
- $R-$удовлетворяет условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R}^+ \times [A, \eta]$,
- $\mu(x) \le R(x,\tau) \le [2 \int\limits_{-\infty}^{x} K_0(\tau)d\tau - 1]^{-1}, \quad (x,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times [A, \eta]$.

В случае следующего нелинейного уравнения условия теоремы 5 выполняются:

$$i_3) f(x) = \mu(x) \int_0^\infty [K_0(x-t) - \varepsilon K_0(x+t)](Q(t, f(t)) - \omega(t, f(t)))dt, \ x \in \mathbb{R}^+,$$

в случае, когда K_0, μ и ω удовлетворяют условиям (7)-(13), (3)-(6) и $K_0(-x) = K_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad l_0 < +\infty$, а число $\lambda = -1-$не является собственным значением для оператора W. Здесь $Q(t,\tau)-$определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ вещественная функция, причем

- при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+, Q(t,\tau) \uparrow$ по τ на
$$\left[0, \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}} t + c_0\right)\right],$$
- Q удовлетворяет условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ по аргументу τ,
- $Q(t,\tau) \ge \tau, \quad \tau \in \left[0, \delta(\sqrt{2}(\nu_2)^{-1/2} t + c_0)\right]$,
$Q\left(t, \delta(\sqrt{2}(\nu_2)^{-1/2} t + c_0)\right) = \delta(\sqrt{2}(\nu_2)^{-1/2} t + c_0), t \in \mathbb{R}^+$.

Список литературы

[1] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян. О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки. Дифф. урав., 1990г, том 26, №1, стр. 1442-1452.

[2] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ, 1984г, том 22, стр.175-242.

[3] А. Куфнер, С. Фучик. Нелинейные дифференциальные уравнения. Москва "Наука 1988г., -304стр.

Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность

В.В. Козлов

Математический институт им В.А.Стеклова РАН
E-mail: *vvkozlov@mi.ras.ru*

Рассматривается динамика континуума взаимодействующих частиц, описываемая кинетическим уравнением Власова. Выводится бесконечная цепочка точных уравнений движения такой среды в эйлеровом представлении и исследуются их общие свойства. Важным примером служит бесстолкновительный газ, демонстрирующий необратимое поведение. Несмотря на потенциальный характер взаимодействия отдельных частиц, для динамики континуума характерны диссипативные свойства. Рассматривается вопрос о возможности применения уравнения Власова к моделированию мелкомасштабной турбулентности.