Триангуляции Делоне в уравнениях математической физики в среде

Г.С. Сукиасян

Институт математики НАН Армении
E-mail: *haikarin@netsys.am*

Аннотация

Рассмотрен класс двумерных дифференциальных уравнений $L(A, \mu) = 0$ с двумя зависимыми переменными. Зависимость между основной переменной (потенциалом) A и дополнительной переменной (функцией среды) μ такова, что уравнение разрешимо только в случае кусочно-постоянной среды. Показано, что скорость сходимости процесса численного решения зависит от геометрической конфигурации сетки, в ячейках которой функция среды μ принимается постоянной. Доказано, что для рассмотренного класса уравнений наилучшей сеткой является триангуляция Делоне. Для примера электромагнитного поля Максвелла получены графики численного решения.

Дифференциальным уравнением в среде называется система из двух двумерных дифференциальных уравнений

$$L(A(x, y), \mu(x, y)) = 0, \tag{1}$$

$$\mu = F\left(A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} ...\right), \tag{2}$$

где L — дифференциальный оператор действующий на две неизвестные переменные A и μ. Зависимость F между основной переменной (потенциалом) A и дополнительной переменной (функцией среды) μ известна, но столь сложна, что подстановка (2) в (1) приводит к уравнению, которое практически невозможно решить.

Пример. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} = \delta, \tag{3}$$

$$\mu = P_6 \left(\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2} \right), \tag{4}$$

где A — искомый электромагнитный потенциал, μ — неивестная функция магнитной проницаемости среды, $P_6(.)$ — известный полином 6-ой степени, δ — заданная плотность тока.

Предположим что уравнения (1), (2), удовлетворяют следующим условиям:

(а) Если μ — кусочно постоянна, то уравнение (1) разрешимо.

(б) Если A — кусочно линейна, то μ — кусочно постоянна.

Обычная схема решения таких уравнений следующая: область разбивается на малые треугольники, внутри которых A принимается линейной. Исходя из какой-либо начальной кусочно постоянной μ_0 находим ей соответствующую согласно условию (а) кусочно линейную функцию A_1. Затем находим кусочно постоянную μ_1, соответствующую согласно условию (б) функции A_1. Затем по μ_1 находим A_2 и т.д. Если процесс сходится, то предельная функция $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ является решением уравнения.

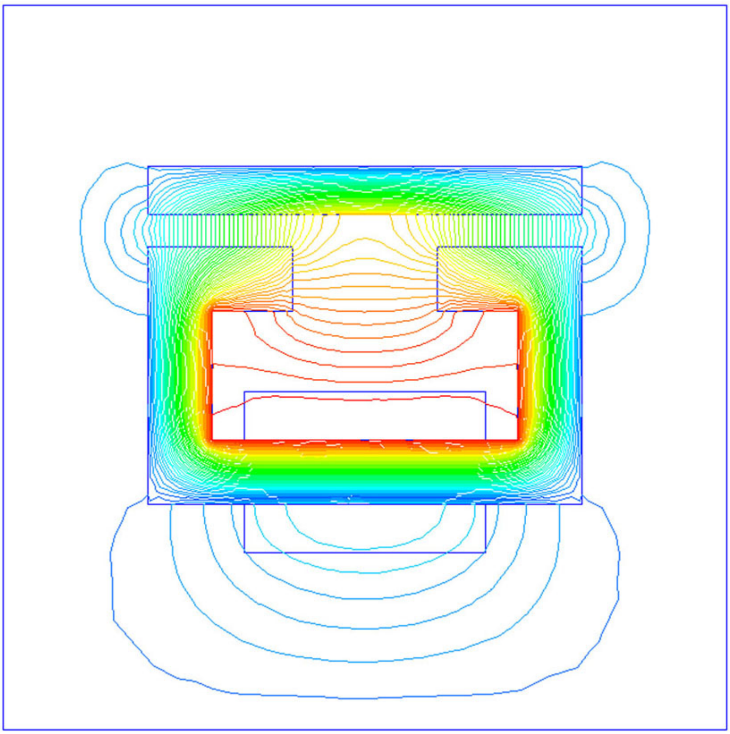

Рис. 1

Очевидно, уравнения (3), (4) удовлетворяют условиям (а) и (б). На рис. 1 показано решение уравнения Максвелла (3), полученное методом конечных элементов по приведенной схеме с сеткой показанной на рис. 2.

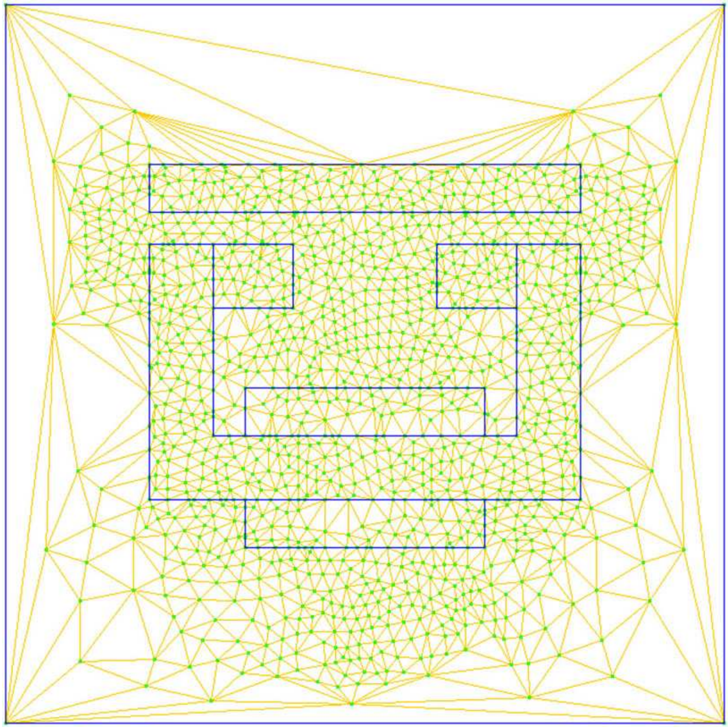

Рис. 2

Феномен. *Скорость сходимости процесса численного решения зависит от геометрической конфигурации сетки, в ячейках которой функция среды* μ *принимается постоянной.*

На рисунках 3 и 4 показаны две разные сетки, использованные для решения одной и той же задачи (3), (4). Хотя задачи решались при прочих равных условиях (одинаковые краевые условия, начальное μ_0 и одинаковые правые части δ), в случае первой сетки процесс последовательных приближений сошелся, а в случае второй сетки – разошелся.

Следовательно, для данной задачи сетки могут быть "хорошими" и "плохими"

Теорема. *Для задачи (3), (4) при фиксированной совокупности узлов наилучшей сеткой является триангуляция Делоне.*

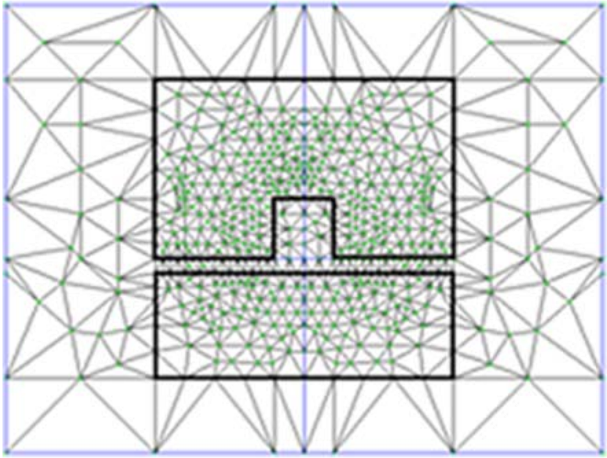

Рис. 3

Сетка на рис. 3 является триангуляцией Делоне.

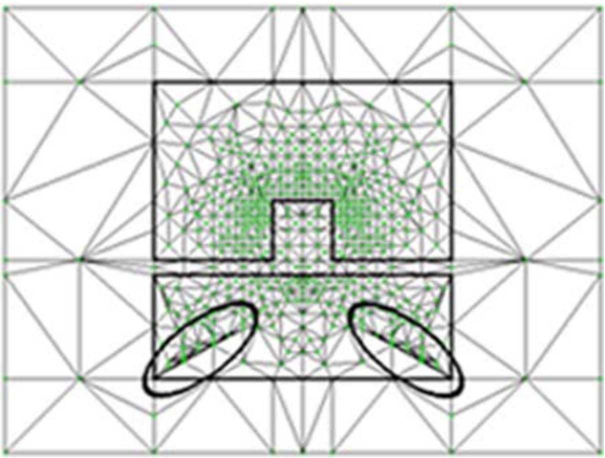

Рис. 4

Для сетки на рис. 4 нарушено условие Делоне в двух отмеченных областях.