К решению уравнения переноса в однородном шаре

В.В. Тер-Аветисян

Институт математики НАН Армении
E-mail: *van88teravetisyan@gmail.com*

Рассмотрим следующее интегральное уравнение свертки

$$\tau S(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau} + \frac{\lambda}{2}\int_0^r (E_1(|\tau - t|) - E_1(\tau + t))tS(t)dt, \qquad (1)$$

где r конечное фиксированное число, а E_1 интегрально–показательная функция: $E_1(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xs}}{s}ds$. Этим уравнением описывается перенос излучения в однородном шаре оптического радиуса r, в центре каторого распаложен точечный источник света(см. [1]). Здесь $S(t)$ - искомая функция источника на оптическом расстоянии t от центра шара.

Уравнение (1) является интегральным уровнением с суммарно - разностным ядром. Специфика этого уравнения заключается в том, что свободный член $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ не интегруемый на рассматриваемом промежутке $[0, r]$. Поэтому существующие методы теории уравнений свертки непосредственно неприменимы для уравнения с таким свободным членом.

Перепишем (1) в операторной форме:

$$\tau S = g + (K_1 - K_2)\tau S. \qquad (2)$$

Отмеченная выше специфика уравнения (1) проявляется в том, что операторы K_1 и K_2 в отдельности не действуют на свабодный член (соответствующие интегралы расходятся). Введем новую искомую функцию f посредством

$$S(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} + \frac{f(\tau)}{\tau} \qquad (3)$$

относительно которой получим следующее уравнение

$$f(\tau) = g_1(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_0^r (E_1(|\tau - t|) - E_1(\tau + t))f(t)dt, \qquad (4)$$

со свабодным членом

$$g_1(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^r (E_1(|\tau - t|) - E_1(\tau + t))\frac{e^{-t}}{t}dt. \qquad (5)$$

Покажем, что эта функция интегрируема на промежутке $[0, r]$. Действительно, функция E_1 убывающая, поэтому g_1 является неотрицательной и $\int_0^r g_1(t)dt \leq \int_0^\infty g_1(t)dt$. Покажем теперь, что интеграл в правой части неравенства сходится.

$$\int_0^\infty g_1(\tau)d\tau = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty \int_0^r (\int_1^\infty \frac{e^{-|\tau-t|s}}{s}ds - \int_1^\infty \frac{e^{-(\tau+t)s}}{s}ds)\frac{e^{-t}}{t}dtd\tau =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_0^r \frac{e^{-t}}{t}\int_1^\infty \int_0^\infty (e^{-|\tau-t|s} - e^{-(\tau+t)s})d\tau\frac{ds}{s}dt$$

С учетом равенства

$$\int_0^\infty e^{-|\tau-t|s}d\tau = \frac{2}{s} - \frac{1}{s}e^{-ts}$$

получаем

$$\int_0^\infty g_1(\tau)d\tau = \frac{\lambda}{2}\int_0^r \frac{e^{-t}}{t}\int_1^\infty \frac{2}{s}(1-e^{-ts})\frac{ds}{s}dt =$$

$$= \lambda\int_1^\infty \frac{1}{s^2}\int_0^r \frac{(1-e^{-ts})}{t}dtds = \lambda\int_1^\infty \frac{1}{s^2}\int_0^{sr} \frac{1-e^{-t}}{t}dtds \leq$$

$$\leq 2\lambda\sqrt{r}\int_1^\infty \frac{1}{s\sqrt{s}}ds.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались следующим неравенством: $\int_0^a \frac{1-e^{-t}}{t}dt \leq 2\sqrt{a} = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{t}}dt, a > 0$. Это неравенство равносильно следующему легко проверяемому неравенству:

$$e^{-t} + \sqrt{t} \geq 1, \text{ при } t \geq 0. \tag{6}$$

Нами показано, что $g_1 \in L_1[0, r]$. Уравнение (4) со свободным членом g_1 обладает единственным решением в $L_1[0, r]$. Имеет место

Теорема 1. *Решение уравнения* (1) *имеет вид* (3) *где* $f \in L_1[0, r]$ *определяется из уравнения* (4).

Для решения уравнения (4) можно применить метод работы [2]. Для практической реализации этого метода необходимо построить функцию g_1 с любой наперед заданной точностью. Для этого освободимся от сингулярности интеграла в g_1 в точке 0. Обозначим $g_{1\epsilon}(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_\epsilon^r (E_1(|\tau - t|) - E_1(\tau + t))\frac{e^{-t}}{t}dt$ и выведем оценку погрешности при замене g_1 на $g_{1\epsilon}$ в пространстве $L_1[0, r]$.

$$\| g_1 - g_{1\epsilon} \| = \frac{\lambda}{2}\int_0^r \int_0^\epsilon \left(\int_1^\infty \frac{e^{-|\tau-t|s}}{s}ds - \int_1^\infty \frac{e^{-(\tau+t)s}}{s}ds\right)\frac{e^{-t}}{t}dtd\tau.$$

Воспользуемся оценками интегралов испрользованных в доказательстве утверждении $g_1 \in L_1[0,r]$. Получим

$$\| g_1 - g_{1\epsilon} \| \leq 2\lambda\sqrt{\epsilon} \int_1^\infty \frac{1}{s\sqrt{s}} ds = 4\lambda\sqrt{\epsilon}. \tag{7}$$

Результаты настаящей работы могут быть распрастранены на уравнение переноса в однородном шаре, в катором учитывается перераспределение излучения по частотам внутри спектральной линии.

Список литературы

[1] В.В. Соболев. Курс теоретической астрофизики, Москва, Наука, 1985.

[2] А.Г. Барсегян. Интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром на конечном промежутке. Известия НАН РА, Математика, Ер.: 2005, т. 40, №3, с.22-32.