

О задаче разделения частот

С.А. Вагаршакян

Ереванский государственный университет
E-mail: suren86@gmail.com

Обозначим через l_2 пространство последовательностей

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots),$$

удовлетворяющих условию:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Для любого целого числа n обозначим через S_n оператор сдвига, действующий по формуле:

$$S_n(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots).$$

Определение. Оператор

$$\phi: l_2 \rightarrow l_2$$

называется линейной причинной системой, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. ϕ – линейный ограниченный оператор в l_2 ;

2. для любого целого n оператор ϕ коммутирует с оператором сдвига:

$$S_n \phi = \phi S_n;$$

3. если входной сигнал удовлетворяет условию:

$$x_n = 0, \quad n < 0,$$

то выходной сигнал удовлетворяет условию:

$$y_n = 0, \quad n < 0.$$

Определение. Коэффициентом усиления $St(\phi)$ линейной причинной системы называется число:

$$St(\phi) = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_{n=-\infty}^0 |y_n|^2 - \sum_{n=-\infty}^0 |x_n|^2 \right)^+.$$

Задача разделения частот заключается в следующем:

пусть заданы два непересекающихся множества на единичной окружности E и F . Пусть $\epsilon > 0$ - некоторое число. Требуется найти линейную причинную систему ϕ , которая преобразует произвольный сигнал $|x_n| \leq 1$, $n \in Z$, вида:

$$x_n = \sum_{k=1}^m c_k e^{i\omega_k n},$$

где $\omega_k \in E \cup F$, в новый сигнал y_n , $n \in Z$, удовлетворяющий условию:

$$\left| y_n - \sum_{\omega_k \in E} c_k e^{i\omega_k n} \right| < \epsilon, \quad n \in Z.$$

При этом требуется, чтобы коэффициент усиления $St(\phi)$ принимал минимальное значение.

Теорема. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \epsilon < 1$. Обозначим через:

$$E = \{e^{ix}; -\alpha < x < \alpha\}, \quad F = \{e^{ix}; \pi + \alpha < x < \pi - \alpha\}.$$

1. Если линейная причинная система ϕ решает задачу разделения частот, то ее коэффициент усиления $St(\phi)$ удовлетворяет оценке:

$$St(\phi) \geq \frac{1}{16\epsilon^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}} - 1.$$

2. Существует линейная причинная система, решающая задачу разделения частот, и ее коэффициент усиления удовлетворяет оценке:

$$St(\phi) \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{4\alpha}{\pi-2\alpha}}} \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{2}{\epsilon} \right)^2.$$

Список литературы

- [1] Вагаршакян С. А., О задаче разделения частот, Известия НАН Армении (Математика), 2010 (принято к публикации).