Одно преобразование линейных интегральных и операторных уравнений

Н.Б. Енгибарян, Б.Н. Енгибарян

Институт математики НАН Армении
E-mail: *yengib@instmath.sci.am, bagrat@eif.am*

1. Основное преобразование. Пусть B - ассоциативное кольцо с единицей I и $\Omega^{\pm}$ его подкольца (с единицей или без единицы).

Элементы $I - K_{\pm}$, где $K_{\pm} \in \Omega_{\pm}$. Назовем нормально обратимыми относительно $\Omega^{\pm}$, если:

$$\exists (I - K^{\pm})^{-1} = 1 + \Gamma^{\pm},\ \Gamma^{\pm} \in \Omega^{\pm}. \tag{1}$$

Аналогично определяется нормальная обратимость слева и справа (относительно $\Omega^{\pm}$).

Пусть

$$K = K_{+} + K_{-}, \tag{2}$$

где $K_{\pm} \in \Omega_{\pm}$ и элементы $I - K_{+},\ I - K_{-}$ нормально обратимы слева и справа соответственно: $(I - K_{+})(I + \Gamma_{+}) = I$, $(I + \Gamma_{-})(I - K_{-}) = I, \Gamma^{\pm} \in \Omega^{\pm}$.

Тогда имеет место основное равенство

$$I - K = (I - K_{-})(I - U)(I - K_{+}), \tag{3}$$

где

$$U = \Gamma^{-}\Gamma^{+} \in B. \tag{4}$$

Представление вида (3) было применено в ЛЛЛ к уравнению Винера-Хопфа. В ряде случаев это простое преобразование значительно способствует решению интегральных и операторных уравнений, благодаря улучшению (в том или ином смысле) свойств элемента U по сравнению с K.

В настоящем сообшении будет изучено представление в случае, когда K является эрмитовым оператором в гильбертовом пространстве.

2. Основные теоремы. Пусть $B = B(H)$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в вещественном или комплексном гильбертовом пространстве H, со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Через A^* обозначается оператор, сопряженныый к оператору $A \in B$. Предположим, что подкольца $\Omega^{\pm}$ являются подалгебрами $B(H)$ и представляют собой взаимосопряженные классы, то есть если $X \in \Omega^{\pm}$, то $X^* \in \Omega^{\mp}$.

Пусть A ограниченный самосопряженный (эрмитов) оператор в H : $A^* = A \in B(H)$. Имеют место равенства (см. [2], [3]):

$$r^+(A) \equiv \sup \sigma(A) = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

$$r^-(A) \equiv \inf \sigma(A) = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle,$$

$$r(A) = \max(r^+, -r^-)$$

где $\sigma(A)$ - спектр, а $r(A)$ - спектральный радиус оператора A.

Спектр положительного оператора A содержится в положительной полуоси:

$$\sigma(A) \subset [0, \infty). \tag{5}$$

Рассмотрим представление (3) в случае, когда оператор K эрмитовый, K^+, K^- взаимно сопряженны, а $I - K^{\pm}$ нормально обратимый, то есть

$$K^* = K,\ K_- = K_+^*. \tag{6}$$

Тогда будем иметь:

$$\Gamma_- = \Gamma_+^*,\ U^* = U. \tag{7}$$

Из (4) и (6) следует одно важное свойство оператора U: оно положительно при произвольном эрмитовом K.

Теорема 1. *Пусть самосопряженный оператор* $K \in B(H)$ *представлен в виде* (2)*, причем выполнены условия нормальной обратимости* (1)*. Тогда имеет место представление* (3) *с положительным оператором* $U \in B$*, причем:*

а) Если $r^+(K) < 1$*, то справедливо неравенство*

$$r(U) \leq 1 - \left(1 - r^+(K)\right) \left(\|I - K_+\|\right)^{-2} < 1. \tag{8}$$

б) Если $r^+(K) = 1$*, то* $r(U) = 1$.

Итак, при $r^+(K) \leq 1$ выполняются неравенства $r(U) \leq 1$ независимо от значения $r^-(K)$. В частности, если оператор $(-K)$ положительный, то $r(U) < 1$.

При $r(U) < 1$ согласно известной формуле И. Гельфанда для спектрального радиуса имеем $(I - U)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} U^m$, ряд сходится по норме пространства B. Поэтому

$$(I - K)^{-1} = (I + \Gamma^+) \left(\sum_{m=0}^{\infty} U^m \right) (I + \Gamma^-). \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $K \in B(H)$, $r^+(K) < 1$ и выполнены условия* (1), (6). *Тогда $(I - K)^{-1}$ допускает представление* (9), *в котором ряд равномерно сходится в $B(H)$.*

Формулы (2) и (9) могут быть применены к решению неоднородного и однородного уравнения

$$(I - K)f = g. \tag{10}$$

3. Случай интегральных операторов. Пусть $H = L_2(a, b)$, $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$, а $\Omega \subset B(H)$ некоторое идеальное В. пространство интегральных операторов K вида

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, t)f(t)dt, \; x \in (a, b) \subset (-\infty, \infty).$$

Пространство Ω является прямой суммой подпространств $\Omega^\pm \subset \Omega$ нижних и верхних треугольных (формально вольтерровых) операторов: $V_\pm \in \Omega^\pm$, если при $x \in (a, b) \subset (-\infty, \infty)$

$$V_+f(x) = \int_a^x v_+(x, t)f(t)dt, \; V_-f(x) = \int_x^b v_-(x, t)f(t)dt. \tag{11}$$

В силу предполагаемой идеальности Ω, $\Omega^\pm$ замкнуты относительно умножения и являются подкольцами B.

Пусть Ω совпадает с алгеброй интегральных операторов с ядрами k Гильберта-Шмидта, когда

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x, t)dxdt < +\infty.$$

В рассматриваемом случае треугольные операторы $V^\pm \in \Omega^\pm$ квазинильпотентные (вольтерровые), операторы $I - V^\pm$ нормально обратимы (см. [4]). Алгебрами являются как $\Omega^\pm$, так и Ω.

Аналогично обстоит дело в случае ядерных по Гротендику операторов.

4. О нормальной обратимости. В широких классах эрмитовых операторов $K \in B(H)$ имеют место представления вида:

$$K \in K_0^+ + K_0^- + D \tag{12}$$

где K_0^+ и K_0^- суть взаимно сопряженные квазинильпотентные операторы, а D - "диагональный"оператор. Такие абстрактные представления могут быть получены, в частности, с помощью разложения единицы или цепей идемпотентов. В случае (12) можно взять $K^{\pm} = \frac{1}{2}D + K_0^{\pm}$, которые могут не быть квазинильпотентными. Тогда нормальная обратимость $I - K_{\pm}$ может быть обеспечена в случае выполнении неравенства $r^{+}(K) \leq 1$. В данном вопросе может оказаться полезной следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $V \in B$ линейный ограниченный оператор, действующий в $L_2(a,b)$ и $A = V + V^*$. Если $r^{+}(A) \leq 1$, то имеет место неравенство*

$$\langle V\varphi, \varphi\rangle \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2(a,b). \tag{13}$$

Представление (3) и неравенство (13) могут быть применены к решению линейной алгебраической системы вида (10) с симметрической матрицей K. Тогда в качестве $K^{\pm}$ можно взять верхний и нижний треугольные части K. При этом диагональ должна быть разделена "пополам"между ними. Такой способ решения (в рамках рассматриваемого круга алгебраических систем) имеет некоторые преимущества над методом Зейделя.

5. Одна дополнительная алгебраическая структура. Пусть пересечение подалгебр $\Omega^{\pm}$ алгебры $B(H)$ состоит только из нулевого оператора.

Обозначим через Ω прямую сумму $\Omega^{\pm}$. Ω является аддитивной подгруппой алгебры $B(H)$, но может не быть замкнутым относительно умножения.

Предполагается, что

$$\text{Если } V_{\pm} \in \Omega^{\pm}, \ \text{ то } V_{-}V_{+} \in \Omega.$$

Пусть операторы имеет место представление (2) и выполняется условия (1). Тогда согласно (4), $U \in \Omega$. Поэтому применение формулы (3) не выводит нас из класса Ω.

Примером может служить следующий класс Ω операторов, действующих в $H = L_2(a,b), \ (a,b) \subset (-\infty, \infty)$. Этот класс состоит из интегральных операторов с многопарными ядрами k следующего вида, с фиксированным $n \geq 1$:

$$k(x,t) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^{+}(x)\beta_m^{+}(x),\ t < x,$$

$$k(x,t) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^{-}(x)\beta_m^{-}(x),\ t > x,\ \alpha_m^{\pm},\ \beta_m^{\pm} \in L_2(a,b). \tag{14}$$

В представлении (2) в качестве $K^{\pm}$ берем вольтерровые части оператора K.

Интегральные уравнения (10) с ядрами типа функции Грина (14) встречается в различных приложениях и связаны с краевыми задачами для систем дифференциальных уравнений.

6. О некоторых приложениях. Интегральные уравнения вида (1) с эрмитовым отрицательно определенным оператором K представляют известный интерес в линейной теории оптимальной фильтрации случайных процессов, в случае белого гауссово шума (см. [5], [6]). Решение задачи сталкивается с большими трудностями в случае, когда норма оператора K достаточно велика, то есть доля неискаженной части в белом шуме мала. Преобразование (3) сводит такое уравнение к новому уравнению с положительным сжимающим оператором U.

Определенный круг задач фильтрации описывается интегральным уравнением, ядро которого эффективно аппроксимируется многопарными ядрами. Как было отмечено в предыдущем пункте, в случае таких ядер структура U не усложняется по сравнению со структурой K.

Другой круг возможных применений преобразования (3) в случае отрицательно определенного оператора K связан с решением следующей обратной задачи линейной теории переноса излучения: восстановить распределение излучения (по направлениям или энергиям) падающего на одну границу плоской среды по результатам измерения излучения, выходящего с другой границы среды.

Список литературы

[1] Б.Н. Енгибарян, О многократной факторизации интегральных операторов типа свертки, Ж. Вычисл. Матем. и Мат. физики, Т. 37, 4, 1997, С. 447-458.

[2] В.С. Владимиров, Уравнения математической физики, М.: Наука, 1988.

[3] К. Иосида, Функциональный анализ, М.: Мир, 1967.

[4] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М.: Наука, 1967.

[5] К. Браммер, Г. Зифлинг, Фильтр Калмана-Бьюси , М.: Наука, 1982.

[6] М.В. Колос, И.В. Колос, Методы линейной оптимальной фильтрации, Изд. МГУ, 2000.