

Математика

УДК 517.55

А. И. ПЕТРОСЯН

О ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{C}^n

В статье вводятся весовые классы $A_\omega^p(\mathbb{C}^n)$ целых функций нескольких комплексных переменных. Эти классы зависят от параметр-функции $\omega(x)$ и сколь угодно широки. Для функций, принадлежащих $A_\omega^p(\mathbb{C}^n)$, получено интегральное представление.

1. В работе [1] введены весовые классы $A_\omega^p(B)$ функций, голоморфных в единичном шаре B в пространстве \mathbb{C}^n . Эти классы сколь угодно широки, ибо зависят от параметр-функции $\omega(x)$ ($0 \leq x < 1$) со сколь угодно быстрым убыванием при $x \rightarrow 1-0$. Целью настоящей работы является введение классов $A_\omega^p(\mathbb{C}^n)$ целых функций и получение для них интегрального представления. Приводимые теоремы являются многомерными ω -аналогами результатов М.М. Джрбашяна [2, 3], положивших начало теории классов A_ω^p (изначальное обозначение $H^p(\alpha)$) в единичном круге.

Примененный аналитический аппарат позволяет распространить на случай пространства \mathbb{C}^n результаты, полученные в [4] для одномерного случая.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями: $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$ – скалярное произведение для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$, а $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ – соответствующая норма; $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – открытый единичный шар в \mathbb{C}^n ; $S = \partial B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ – его граница, являющаяся единичной сферой в \mathbb{C}^n ; ν – мера Лебега в \mathbb{C}^n , нормированная условием $\nu(B) = 1$; σ – борелевская мера на S , инвариантная относительно унитарных преобразований пространства \mathbb{C}^n и удовлетворяющая условию $\sigma(S) = 1$. С каждым мультииндексом $s = (s_1, \dots, s_n)$ будем связывать числа $s! = \prod_{k=1}^n s_k!$ и

$|s| = \sum_{k=1}^n s_k$, а также голоморфный моном $z^s = \prod_{k=1}^n z_k^{s_k}$.

2. Приведем некоторые определения и результаты из [1].

Через Ω обозначается множество параметр-функций $\omega(x)$, определенных на интервале $[0,1)$ и удовлетворяющих там условиям:

$$1) 0 < V_{\delta}^{1-0}(\omega) < \infty \text{ для любого } \delta \in [0,1);$$

$$2) \Delta_m \equiv \Delta_m(\omega) = - \int_0^1 x^m d\omega(x) \neq 0, \infty, \quad m = 0, 1, \dots;$$

$$3) \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\Delta_m|} \geq 1.$$

Далее, для каждой функции $\omega \in \Omega$ определяется ассоциированная с ней мера $d\mu_{\omega}(w) = -d\omega(r^2)d\sigma(\zeta)$, где $w = r\zeta$ – полярная форма точки $w \in B$, (т. е. $r = |w|$, $\zeta \in S$).

Через $L_{\omega}^p(B)$ обозначается класс функций, измеримых по мере $d\mu_{\omega}$ в шаре B , для которых

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int_B |f(w)|^p d\mu_{\omega}(w) \right\}^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < \infty, \quad (1)$$

а через $A_{\omega}^p(B)$ – подмножество $L_{\omega}^p(B)$, состоящее из функций, голоморфных в B . Для заданного $\omega \in \Omega$ вводится ядро-функция

$$C_{\omega}(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, w \rangle^k}{\gamma_k \Delta_k(\omega)}, \quad \text{где } \gamma_k = \frac{(n-1)!k!}{(n-1+k)!}. \quad (2)$$

В [1] доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $f \in A_{\omega}^p(B)$. Тогда для $z \in B$

$$f(z) = \int_B f(w) C_{\omega}(z, w) d\mu_{\omega}(w), \quad (3)$$

$$f(z) = -\overline{f(0)} + 2 \int_B \{Re f(w)\} C_{\omega}(z, w) d\mu_{\omega}(w). \quad (4)$$

Отметим один частный случай формулы (3). Пусть

$$\omega(x) = \int_x^1 t^{n-1} (1-t)^{\alpha} dt, \quad \alpha > -1.$$

Тогда

$$\Delta_m = - \int_0^1 x^m d\omega(x) = \int_0^1 x^{n+m-1} (1-x)^{\alpha} dx = \frac{\Gamma(n+m)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+m+1+\alpha)}.$$

Используя выражение для элемента нормированного объема $d\nu$ в полярных координатах [5], будем иметь

$$d\mu_{\omega}(w) = -d\omega(r^2)d\sigma(\zeta) = 2r^{2n-1} (1-r^2)^{\alpha} dr d\sigma(\zeta) = \frac{1}{n} (1-r^2)^{\alpha} d\nu(w). \quad (5)$$

Из (1) и (5) следует, что формула (3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$f(z) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)} \int_B f(w) \frac{(1-|w|^2)^{\alpha}}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}} d\nu(w).$$

Эту формулу можно найти в [5].

3. Обозначим через Ω^∞ множество параметр-функций $\omega(t)$, строго убывающих на полуоси $[0, +\infty)$, таких, что $\omega(0) = 1$ и

$$\Delta_k^\infty(\omega) = -\int_0^{+\infty} t^k d\omega(t) < +\infty \quad \text{для любого } k = 0, 1, 2, \dots$$

Введем классы целых функций $A_\omega^p(\mathbb{C}^n)$ ($1 \leq p < +\infty$), удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p, \omega} = \left\{ \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^p d\mu_\omega(w) \right\}^{1/p} < +\infty, \quad (6)$$

где $d\mu_\omega(r\zeta) = -d\omega(r^2)d\sigma(\zeta)$. Соответствующее этой мере лебегово пространство обозначим через $L_\omega^p(\mathbb{C}^n)$.

Далее построим ω -ядро

$$C_\omega^\infty(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, w \rangle^k}{\gamma_k \Delta_k^\infty(\omega)}, \quad \text{где } \gamma_k = \frac{(n-1)!k!}{(n-1+k)!}. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $f \in A_\omega^2(\mathbb{C}^n)$, где $\omega \in \Omega^\infty$. Тогда для $z \in \mathbb{C}^n$

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w) C_\omega^\infty(z, w) d\mu_\omega(w), \quad (8)$$

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \int_{\mathbb{C}^n} \{ \text{Re} f(w) \} C_\omega^\infty(z, w) d\mu_\omega(w). \quad (9)$$

Доказательство. Для произвольного $r > 0$ введем функцию $\omega_r(t) = \omega(r^2 t)$ ($0 \leq t \leq 1$) и обозначим $\Delta_k^r(\omega) = -\int_0^1 t^k d\omega_r(t)$. Легко видеть, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\Delta_k^r(\omega_r)} = r^2$. Очевидно, что $\Delta_k^r(\omega_r) = r^{-2k} \Delta_k^r(\omega)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\Delta_k^r(\omega_r)} = 1$. Следовательно, $\omega_r \in \Omega$. С другой стороны, $f(rz) \in A_{\omega_r}^2$ (в $|z| < 1$). Поэтому обе формулы (3) и (4) для $f(rz)$ справедливы. Заметив, что

$$C_{\omega_r} \left(\frac{z}{r}, \frac{w}{r} \right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, w \rangle^k}{\gamma_k r^{2k} \Delta_k^r(\omega_r)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, w \rangle^k}{\gamma_k \Delta_k^r(\omega)} \equiv C_\omega^r(z, w), \quad |z| < r^2,$$

и $d\mu_{\omega_r} \left(\frac{w}{r} \right) = d\mu_\omega(w)$, перепишем (3) в виде

$$f(z) = \int_{|w| < r} f(w) C_\omega^r(z, w) d\mu_\omega(w), \quad |z| < r. \quad (10)$$

Чтобы получить (8), нужно доказать, что для любой фиксированной точки $z \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|w| < r} f(w) C_\omega^r(z, w) d\mu_\omega(w) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w) C_\omega^\infty(z, w) d\mu_\omega(w). \quad (11)$$

Для этого заметим, что $\Delta_k^r(\omega) \uparrow$. Тогда $\liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\Delta_k^r(\omega)} \geq r^2$ для любого $r > 0$ и, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\Delta_k^r(\omega)} = +\infty$. Итак, радиус сходимости степенного ряда $C_\omega^\infty(z, \cdot)$ бесконечен, т. е. $C_\omega^\infty(z, \cdot)$ является целой функцией. Используя неравенство Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)C_{\omega}^{\infty}(z,w)| d\mu_{\omega}(w) \leq \|f\|_{b,\omega} \left\{ \int_{\mathbb{C}^n} |C_{\omega}^{\infty}(z,w)|^2 d\mu_{\omega}(w) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
& = \|f\|_{b,\omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k \Delta_k^{\infty})^2} \int_{\mathbb{C}^n} |z, \rho \zeta\rangle^{2k} d\mu_{\omega}(\rho \zeta) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
& = \|f\|_{b,\omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k \Delta_k^{\infty})^2} \int_{\mathbb{D}} \rho^{2k} d\omega(\rho^2) \int_{\mathbb{S}} |z, \zeta\rangle^{2k} d\sigma(\zeta) \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Далее, из формулы, аналогичной биному Ньютона для n переменных, следует

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{S}} |z, \zeta\rangle^{2k} d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} \frac{|\alpha|! |\beta|!}{\alpha! \beta!} z^{\alpha} \bar{z}^{\alpha} \bar{z}^{\beta} z^{\beta} d\sigma(\zeta) = \\
& = \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \right)^2 \frac{(n-1)! \alpha!}{(n-1+|\alpha|)!} z^{\alpha} \bar{z}^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^{\alpha} \bar{z}^{\alpha} \gamma_{|\alpha|} = \gamma_k \langle z, z \rangle^k.
\end{aligned} \tag{12}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)C_{\omega}^{\infty}(z,w)| d\mu_{\omega}(w) \leq \\
& \leq \|f\|_{b,\omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k \Delta_k^{\infty})^2} \Delta_k^{\infty} \gamma_k \langle z, z \rangle^k \right\}^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{b,\omega} \sqrt{C_{\omega}^{\infty}(z,z)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, предельное соотношение (11) равносильно равенству

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|w| < r} f(w) [C_{\omega}^r(z,w) - C_{\omega}^{\infty}(z,w)] d\mu_{\omega}(w) = 0.$$

Докажем это равенство. Обозначим $|z| = r_0$ и заметим, что если $r_0 + 1 < r_1 < r < +\infty$, то будем иметь

$$\begin{aligned}
I(r) & \equiv \left| \int_{|w| < r} f(w) (C_{\omega}^r(z,w) - C_{\omega}^{\infty}(z,w)) d\mu_{\omega}(w) \right| \leq \\
& \leq \int_{|w| < r_1} |f(w) (C_{\omega}^r(z,w) - C_{\omega}^{\infty}(z,w))| d\mu_{\omega}(w) + \\
& + \int_{r_1 < |w| < r} |f(w) C_{\omega}^r(z,w)| d\mu_{\omega}(w) + \\
& + \int_{r_1 < |w| < r} |f(w) C_{\omega}^{\infty}(z,w)| d\mu_{\omega}(w) \equiv I_1(r) + I_2(r) + I_3(r).
\end{aligned}$$

Для оценки слагаемого $I_2(r)$ еще раз применяем неравенство Буняковского:

$$\begin{aligned}
I_2(r) & \leq \left\{ \int_{r_1 < |w| < r} |f(w)|^2 d\mu_{\omega}(w) \int_{r_1 < |w| < r} |C_{\omega}^r(z,w)|^2 d\mu_{\omega}(w) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left\{ \int_{r_1 < |w| < r} |f(w)|^2 d\mu_{\omega}(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k \Delta_k^r)^2} \int_{r_1 < |w| < r} |z, w\rangle^{2k} d\mu_{\omega}(w) \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее, согласно (12),

$$\int_{r_1 < |w| < r} |\langle z, w \rangle|^{2k} d\mu_w(w) = \int_{\mathbb{S}} |\langle z, \zeta \rangle|^{2k} d\sigma(\zeta) \int_0^r \rho^{2k} |d\omega(\rho^2)| = \\ = \gamma_k \langle z, z \rangle^k \int_0^r \rho^{2k} |d\omega(\rho^2)|. \quad (15)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k \Delta_k^r)^2} \int_{r_1 < |w| < r} |\langle z, w \rangle|^{2k} d\mu_w(w) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k \Delta_k^r)^2} \sum_{|\alpha|=k} |z^\alpha|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \gamma_{|\alpha|} \Delta_{|\alpha|}^r = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, z \rangle^k}{\gamma_k \Delta_k^r} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, z \rangle^k}{\gamma_k \Delta_k^{r_0+1}} = C_{\omega}^{r_0+1}(z, z) < +\infty.$$

Поэтому $I_2(r) < \varepsilon/3$ для заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно большом r_1 . С другой стороны, из (13) следует, что $I_3(r) < \varepsilon/3$ также для достаточно большого r_1 . Далее, для фиксированного r_1 получаем

$$I_1(r) \leq \|f\|_{2, \omega} \left\{ \int_{|w| < r_1} |C_\omega^r(z, w) - C_\omega^\infty(z, w)|^2 d\mu_w(w) \right\}^{1/2} = \\ = \|f\|_{2, \omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_k \Delta_k^r} - \frac{1}{\gamma_k \Delta_k^\infty} \right)^2 \int_{|w| < r_1} |\langle z, w \rangle|^{2k} d\mu_w(w) \right\}^{1/2}. \quad (16)$$

Следовательно, ввиду (15), имеем

$$I_1(r) \leq \|f\|_{2, \omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta_k^r} - \frac{1}{\Delta_k^\infty} \right)^2 \langle z, z \rangle^k \int_0^{r_1} \rho^{2k} |d\omega(\rho^2)| \right\}^{1/2}.$$

При этом ряд в правой части имеет сходящуюся мажоранту, не зависящую от r . В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta_k^r} - \frac{1}{\Delta_k^\infty} \right)^2 \langle z, z \rangle^k \int_0^{r_1} \rho^{2k} |d\omega(\rho^2)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \langle z, z \rangle^k \left(\frac{2}{\Delta_k^r} \right)^2 \Delta_k^{r_1} \leq \\ \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle z, z \rangle^k}{\Delta_k^{r_1}} = 4C_{\omega}^{r_1}(z, z) < +\infty.$$

Следовательно, правая часть (16) стремится к нулю при $r \rightarrow +\infty$, и поэтому $I_1(r) < \varepsilon/3$ для достаточно большого r . Итак, мы получаем, что $I(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Отсюда следует справедливость (8). Для доказательства (9) применяем вышеприведенные рассуждения к формуле (4) для $F(rz)$. ►

4. Ядро $C_\omega^\infty(z, w)$ порождает оператор ортогонального проектирования из $L_\omega^2(\mathbb{C}^n)$ на подпространство $A_\omega^2(\mathbb{C}^n)$. А именно, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть

$$Q_\omega f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w) C_\omega^\infty(z, w) d\mu_w(w), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где $f \in L_\omega^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда Q_ω является ортогональным проектором из $L_\omega^2(\mathbb{C}^n)$ на $A_\omega^2(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Пусть $L_{\omega}^2(\mathbb{C}^n) = A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n) \oplus [A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)]^{\perp}$ и $f = f_1 + f_2$ – соответствующее разложение функции $f \in A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$. Имеем $Q_{\omega}f = Q_{\omega}f_1 + Q_{\omega}f_2$. По теореме 2, $Q_{\omega}f_1 = f_1$. С другой стороны,

$$Q_{\omega}f_2(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f_2(w) C_{\omega}^{\infty}(z, w) d\mu_{\omega}(w) = \left\langle f_2, \overline{C_{\omega}^{\infty}(z, \cdot)} \right\rangle_{\omega} = 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}$ – скалярное произведение в $L_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$. Равенство нулю следует из того, что при фиксированном $z \in \mathbb{C}^n$ функция $\overline{C_{\omega}^{\infty}(z, w)} = C_{\omega}^{\infty}(w, z)$ является целой относительно w , а f_2 ортогональна к $A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$. Итак, $Q_{\omega}f = f_1$ для произвольной функции $f \in A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$, а это и означает, что Q_{ω} – проектор из $L_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$ на $A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$. ►

Кафедра теории функций

Поступила 30.06.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. Petrosyan A.I. – Journal of Analysis and Applications, 2005, v. 3, № 1, p. 47–53.
2. Джрбашян М.М. – ДАН Армянской ССР, 1945, т. 3, № 1, с. 3–9.
3. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Института матем. и мех. АН Армянской ССР, 1948, т. 2, с. 3–40.
4. Jerbashian A.M. – Complex Variables, 2005, v. 50, № 3, p. 155–183.
5. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n . М.: Мир, 1984.

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՇՆՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՄՐՈՂՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿՇՈՒԱՅԻՆ ԴԱՍԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ներմուծվում են մի քանի կոմպլեքս փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների $A_{\omega}^p(\mathbb{C}^n)$ կշռային դասեր: Այդ դասերը կախված են $\omega(x)$ պարամետր-ֆունկցիայից և կամայական չափով լայն են: $A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$ -ին պատկանող ֆունկցիաների համար արտածվում է ինտեգրալային ներկայացում:

A. I. PETROSYAN

ON WEIGHTED CLASSES OF ENTIRE FUNCTIONS IN \mathbb{C}^n

Summary

In the paper the weighted classes $A_{\omega}^p(\mathbb{C}^n)$ of entire functions of several complex variables are introduced. These classes depend on parameter-function $\omega(x)$ and they are arbitrarily large. For functions belonging to $A_{\omega}^2(\mathbb{C}^n)$ the integral representation is obtained.