Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 2, 2014, стр. 83-90.

ТОЧНОСТЬ ГАУССОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Л.А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН Армении
E-mails: *LindaKhim@gmail.com*

Аннотация. Получена оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для однородных мартингал–разностных случайных полей на d-мерной целочисленной решетке.

MSC2010 numbers: 60F05

Ключевые слова:Скорость сходимости, центральная предельная теорема, мартингал–разностные случайные поля, перемешивание

1. Введение

Предельные теоремы играют важнейшую роль как в прикладных, так и в теоретических задачах теории вероятностей. Особую значимость при этом имеют оценки скорости сходимости, без наличия которых использование указанных теорем в прикладных исследованиях практически невозможно.

Вопрос точности гауссовской аппроксимации для сумм случайных слагаемых имеет долгую историю и досконально изучен только для последовательностей независимых случайных величин (см., например, [1] – [4]). В определенной степени данная тема изучена и для слабо зависимых стационарных случайных процессов (отметим работы [5] – [7]) и мартингал–разностей (см. [8, 9] и приведенную в них литературу). Для многомерных же объектов (случайные поля) изучение этого вопроса находится в начальной стадии. В основном рассматриваются совокупности m-зависимых случайных величин ([10, 11]) и случайные поля с экспоненциальным убыванием корреляций ([12] – [14]). Касательно же мартингал–разностных случайных полей, отметим работу [15], в которой в рамках стандартных мартингальных условий (на моменты и на скорость сближения условных дисперсий компонент случайного поля с их безусловными дисперсиями) получены степенные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ).

В настоящей работе применяется другой подход (восходящий к методу малых блоков, предложенному в работе [16]) к получению степенной оценки скорости сходимости в ЦПТ для однородных мартингал–разностных случайных полей. Он не предполагает близости условных и безусловных дисперсий, но требует наличия слабой зависимости между компонентами случайного поля. Такой подход открывает возможность применения полученных результатов к гиббсовским случайным полям.

2. Предварительные сведения

Приведем основные понятия и обозначения, используемые в работе. Пусть $\mathbb{Z}^d$, $d > 1$ — целочисленная решетка, $W = \left\{V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\right\}$ – множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$ и $X \subset \mathbb{R}$ – некоторое конечное множество, $|X| > 1$. Здесь и далее символ $|V|$ используется для обозначения мощности конечного множества V.

Случайным полем, заданным на $\mathbb{Z}^d$, с фазовым пространством X, будем называть совокупность $(\xi_t) = \left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right)$ случайных величин, каждая из которых принимает значение в X.

Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра всех подмножеств X и пусть $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $X^{\mathbb{Z}^d}$. Распределением случайного поля (ξ_t) называется вероятностная мера P на $\left(X^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}\right)$, такая, что

$$\Pr\left\{\left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right) \in B\right\} = P\left(B\right), \qquad B \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Определим на $X^{\mathbb{Z}^d}$ группу преобразований τ_a, $a \in \mathbb{Z}^d$, такую, что $\left(\tau_a x\right)_t = x_{t+a}$ для всех $x \in X^{\mathbb{Z}^d}$. Случайное поле (ξ_t) с распределением P называется однородным, если $P\left(\tau_a A\right) = P\left(A\right)$ для любых $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ и $a \in \mathbb{Z}^d$.

Для заданного случайного поля (ξ_t) обозначим через $\Im_S$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\xi_s, s \in S$, $S \subset \mathbb{Z}^d$.
Случайное поле (ξ_t) называется мартингал–разностным случайным полем (см. [17]), если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$, $M\left|\xi_t\right| < \infty$ и

$$M\left(\xi_t / \Im_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}\right) = 0 \text{ (п.н.)}, \tag{2.1}$$

где M – знак математического ожидания.

Нетрудно проверить, что условие (2.1) эквивалентно условию

$$M\left(\xi_t / \Im_V\right) = 0 \text{ (п.н.)} \tag{2.2}$$

для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $V \in W$, $t \notin V$. Понятно также, что если (ξ_t) — мартингал–разностное случайное поле, то

$$M\xi_t = 0 \qquad \text{для всех } t \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.3}$$

Будем говорить, что однородное случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом φ_I, если для каждого фиксированного $I \in W$

$$\sup\left\{\left|P\left(A/B\right) - P\left(A\right)\right|, A \in \Im_I, B \in \Im_\Lambda, P\left(B\right) > 0\right\} \le \varphi_I\left(\rho\left(I, \Lambda\right)\right),$$

где функция $\varphi_I(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$, такова, что $\varphi_I(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ и фиксированном $I \in W$. Здесь $\rho(I, \Lambda) = \inf\left\{|t-s|,\ t \in I,\ s \in \Lambda\right\}$, $|t-s| = \max\limits_{1 \le i \le d}\left|t^{(i)} - s^{(i)}\right|$, $t = \left(t^{(1)}, ..., t^{(d)}\right)$, $s = \left(s^{(1)}, ..., s^{(d)}\right)$.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [2, 7]).

Утверждение 1. *Пусть U, Y — случайные величины, измеримые относительно σ-алгебр $\Im_I$ и $\Im_\Lambda$ соответственно, $\rho\left(I, \Lambda\right) \ge r$, причем $|U| < B_1$, $|Y| < B_2$. Тогда*

$$\left|M(UY) - MU \cdot MY\right| \le 2B_1B_2\varphi_I\left(r\right),$$

где B_1, B_2 — положительные постоянные.

Для заданного случайного поля (ξ_t) обозначим

$$S\left(V\right) = \sum_{t \in V} \xi_t, \qquad V \in W.$$

При доказательстве предельных теорем для случайных полей с перемешиванием одним из основных требований является правильное поведение дисперсий сумм компонент случайного поля $S\left(V\right)$, $V \in W$, а именно, $DS\left(V\right) = \sigma^2\left|V\right|\left(1 + O\left(1\right)\right)$, $0 < \sigma < \infty$. Для однородных мартингал-разностных случайных полей это требование выполняется автоматически, так как для таких полей $DS\left(V\right) = M\xi_0^2 \cdot |V|$.

3. Оценка скорости сходимости в ЦПТ

Основной результат настоящей работы — оценка скорости сходимости в ЦПТ для однородных мартингал–разностных случайных полей, удовлетворяющих условию равномерного сильного перемешивания — приводится в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть (ξ_t) — однородное мартингал-разностное случайное поле с конечным фазовым пространством X, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом φ_I, $I \in W$, таким, что*

$$\varphi_I\left(j\right) \le |I| \cdot \varphi\left(j\right) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\varphi\left(j\right) < \infty.$$

Тогда

$$\sup_x\left|P\left(\frac{S\left(V_n\right)}{\sigma\sqrt{|V_n|}} < x\right) - \Phi\left(x\right)\right| \le C \cdot n^{-d/8},$$

где положительная постоянная C не зависит от n, $V_n = [-n; n]^d$ — d-мерный куб с центром в начале координат и стороной $2n+1$, $\sigma^2 = M\xi_0^2 > 0$ и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Доказательство. Опираясь на неравенство Бери-Эссеена (см., например, [18], стр. 317), мы будем оценивать близость функций распределения посредством оценки близости их характеристических функций. Пусть элементы множества V_n пронумерованы некоторым образом: $V_n = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$, $N = (2n+1)^d$. Для удобства записи обозначим $\eta_j = \frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}$, $j = \overline{1,N}$. Пусть, далее, $f_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\frac{S(V_n)}{\sqrt{DS(V_n)}} = \sum\limits_{j=1}^{N} \eta_j$. Оценим разность между $f_n(t)$ и $e^{-t^2/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| f_n(t) - e^{-t^2/2} \right| &= \left| M \exp\left\{ it \frac{S(V_n)}{\sqrt{DS(V_n)}} \right\} - e^{-t^2/2} \right| \leq \\ &\leq \left| M \prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} \right| + \left| \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} - e^{-t^2/2} \right|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (3.1). Можем написать

$$\begin{aligned} &\left| M \prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \left| M e^{it\eta_k} \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M e^{it\eta_k} M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \left| M \left(e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right) \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - \right. \\ &\left. - M \left(e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right) M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| + \\ &+ |t| \sum_{k=1}^{N} \left| M\eta_k \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\eta_k M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| + \\ &+ \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{N} \left| M\eta_k^2 \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\eta_k^2 M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| = T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Оценим слагаемые в правой части полученного выражения. Для первого слагаемого можем записать

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \sum_{k=1}^{N} \left(M \left| e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right| \cdot \left| \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| + \right. \\ &\left. + M \left| e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right| \cdot M \left| \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| \right) \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{N} M \left| e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right|. \end{aligned}$$

Обозначим $M\left|\xi_0\right|^3=\beta_3$. Воспользовавшись неравенством $\left|e^{ix}-1-ix-\frac{(ix)^2}{2!}\right|\leq\frac{|x|^3}{3!}$, получаем

$$T_1\leq 2\frac{|t|^3}{3!}\sum_{k=1}^{N}M\left|\eta_k\right|^3=\frac{|t|^3}{3}N\frac{\beta_3}{\sigma^3\left(2n+1\right)^{3d/2}}<|t|^3\frac{\beta_3}{3\sigma^3 2^{d/2}}\cdot\frac{1}{n^{d/2}}.$$

Покажем, что $T_2=0$. Учитывая свойство (2.3) мартингал–разностного случайного поля, можем написать

$$T_2=|t|\sum_{k=1}^{N}\left|M\eta_k\prod_{j=k+1}^{N}e^{it\eta_j}-M\eta_k M\prod_{j=k+1}^{N}e^{it\eta_j}\right|=$$
$$=\frac{|t|}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\sum_{k=1}^{N}\left|M\xi_{s_k}\prod_{j=k+1}^{N}\exp\left(it\frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\right)\right|.$$

Далее, в силу свойства (2.2), $M\left(\xi_{s_k}/\xi_{s_j},j=\overline{k+1,N}\right)=0$ вне зависимости от способа нумерации элементов V_n, и, следовательно,

$$M\xi_{s_k}\prod_{j=k+1}^{N}\exp\left(it\frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\right)=$$
$$=M\left(\left(\prod_{j=k+1}^{N}\exp\left(it\frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\right)\right)\cdot M\left(\xi_{s_k}/\xi_{s_j},j=\overline{k+1,N}\right)\right)=0.$$

Рассмотрим T_3. Имеем

$$T_3=\frac{t^2}{2\sigma^2\left|V_n\right|}\sum_{k=1}^{N}\left|M\xi_{s_k}^2\prod_{j=k+1}^{N}e^{it\eta_j}-M\xi_{s_k}^2 M\prod_{j=k+1}^{N}e^{it\eta_j}\right|.$$

Воспользовавшись соотношением

$$M\xi_{s_k}^2\prod_{j=k+1}^{N}e^{it\eta_j}-M\xi_{s_k}^2 M\prod_{j=k+1}^{N}e^{it\eta_j}=$$
$$=\sum_{m=k+1}^{N-1}\left(M\xi_{s_k}^2\left(e^{it\eta_m}-1\right)\prod_{j=m+1}^{N}e^{it\eta_j}-M\xi_{s_k}^2 M\left(e^{it\eta_m}-1\right)\prod_{j=m+1}^{N}e^{it\eta_j}\right),$$

получаем

$$T_3\leq\frac{t^2}{2\sigma^2\left|V_n\right|}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=k+1}^{N-1}\left|M\xi_{s_k}^2\left(e^{it\eta_m}-1\right)\prod_{j=m+2}^{N}e^{it\eta_j}-M\xi_{s_k}^2 M\left(e^{it\eta_m}-1\right)\prod_{j=m+2}^{N}e^{it\eta_j}\right|.$$

Обозначим через $x_0=\max\limits_{x\in X}|x|$. Поскольку $\xi_{s_k}^2<x_0^2$ и

$$\left|\left(e^{it\eta_m}-1\right)\prod_{j=m+2}^{N}e^{it\eta_j}\right|\leq\left|e^{it\eta_m}-1\right|\leq|t|\frac{\left|\xi_{s_m}\right|}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\leq|t|\frac{x_0}{\sigma\left(2n+1\right)^{d/2}},$$

то, в силу Утверждения 1,

$$\left| M\xi_{s_k}^2 \left(e^{it\eta_m}-1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} - M\xi_{s_k}^2 M\left(e^{it\eta_m}-1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} \right| \le$$
$$\le 2\,|t|\,\frac{x_0^3}{\sigma\,(2n+1)^{d/2}}\varphi_{\{s_k\}}\left(\rho\left(\{s_k\},\{s_m\}\right)\right) \le 2\,|t|\,\frac{x_0^3}{\sigma\,(2n+1)^{d/2}}\varphi\left(|s_k-s_m|\right).$$

Следовательно, получаем

$$T_3 \le |t|^3\,\frac{x_0^3}{\sigma^3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{3d/2}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=k+1}^{N-1}\varphi\left(|s_k-s_m|\right).$$

Обозначим $V_n^{(k)}(j) = \{r \in V_n : |s_k - r| = j\}$, $j = 1, 2, ..., 2n+1$. Нетрудно проверить, что $\left|V_n^{(k)}(j)\right| < 2^{2d} j^{d-1}$. Тогда

$$\sum_{m=k+1}^{N-1}\varphi\left(|s_k-s_m|\right) < \sum_{j=1}^{2n+1}\sum_{r\in V_n^{(k)}(j)}\varphi\left(|s_k-r|\right) = \sum_{j=1}^{2n+1}\left|V_n^{(k)}(j)\right|\varphi(j) <$$
$$< 2^{2d}\sum_{j=1}^{2n+1} j^{d-1}\varphi(j) < 2^{2d}\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\varphi(j).$$

Окончательно получаем

$$T_3 < |t|^3\,\frac{1}{(2n+1)^{d/2}}\cdot\frac{2^{2d}x_0^3}{\sigma^3}\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\varphi(j) < |t|^3\,\frac{1}{n^{d/2}}\cdot\frac{2^{3d/2}x_0^3}{\sigma^3}\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\varphi(j)$$

Таким образом, для первого слагаемого в (3.1) получили следующую оценку

$$\left| M\prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} Me^{it\eta_j} \right| < C_1\,|t|^3\cdot\frac{1}{n^{d/2}},$$

где $C_1 = \dfrac{\beta_3}{3\sigma^3 2^{d/2}} + \dfrac{2^{3d/2}x_0^3}{\sigma^3}\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\varphi(j)$.

Рассмотрим второе слагаемое в (3.1). Из теоремы Берри-Эссеена (см., например, [18, 4]) следует, что

$$\left| \prod_{j=1}^{N} Me^{it\eta_j} - e^{-t^2/2} \right| \le C_0\frac{M\,|\eta_j|^3}{\sqrt{N}}\,|t|^3\,e^{-t^2/4}, \qquad \text{при } \ |t| < \frac{\sqrt{N}}{5M\,|\eta_j|^3}.$$

Поскольку $M\,|\eta_j|^3 = \dfrac{\beta_3}{\sigma^3\,|V_n|^{3/2}}$, то при $|t| < \dfrac{\sigma^3}{5\beta_3}\,(2n+1)^{2d}$ имеем

$$\left| \prod_{j=1}^{N} Me^{it\eta_j} - e^{-t^2/2} \right| \le C_0\frac{\beta_3}{\sigma^3\,(2n+1)^{2d}}\,|t|^3\,e^{-t^2/4} < C_2\frac{1}{n^{2d}}\,|t|^3\,e^{-t^2/4},$$

где $C_2 = \dfrac{C_0\beta_3}{\sigma^3 2^{2d}}$. Перейдем к оценке разности функций распределения

$$\Delta_n = \sup_x \left| P\left(\frac{S(V_n)}{\sigma\sqrt{|V_n|}} < x \right) - \Phi(x) \right|.$$

Согласно неравенству Берри-Эссеена,

$$\Delta_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi T} \cdot \max_x |\Phi'(x)| =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{T}.$$

Следовательно,

$$\Delta_n < \frac{2C_1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{d/2}} \int_0^T t^2 dt + \frac{2C_2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{2d}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2/4} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{T} <$$
$$< \frac{2C_1}{3\pi} \cdot \frac{T^3}{n^{d/2}} + \frac{4C_2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n^{2d}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{T}.$$

Положив $T = n^{d/8}$, окончательно получаем

$$\Delta_n < \left(\frac{2C_1}{3\pi} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \frac{1}{n^{d/8}} + \frac{4C_2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n^{2d}} < Cn^{-d/8}.$$

Теорема доказана.

Возможность применения полученных результатов к гиббсовским случайным полям основана на следующем замечании. Известно (см., например, [19], [7]), что при определенных условиях на потенциал гиббсовское случайное поле удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания. Кроме того, известны также условия на потенциал, при которых гиббсовское случайное поле является мартингал–разностным случайным полем ([17, 20]). Указанные условия не противоречат друг другу, что позволяет выделить класс гиббсовских случайных полей, удовлетворяющих условиям Теоремы 3.1. Таковыми будут, например, гиббсовские случайные поля с достаточно быстро убывающими четными потенциалами.

В заключении автор выражает благодарность Нахапетяну Б.С. за внимание к работе и ценные замечания.

Abstract. The estimations for the rate of convergence in the central limit theorem for homogenous martingale–difference random fields on the d-dimensional integer lattice are obtained.

Список литературы

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные Распределения Для Сумм Независимых Случайных Величин, Москва–Ленинград, ГИТТЛ (1949).

[2] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и Стационарно Связанные Величины, Москва, Наука (1965).

[3] В. В. Петров , Предельные Теоремы Для Сумм Независимых Случайных Величин, Москва, Наука (1987).

[4] В. В. Сенатов, Центральная Предельная Теорема. Точность Аппроксимации и Асимптотические Разложения, Москва, Книжный дом, ЛИБРОКОМ (2008).

[5] W. Philipp, "The remainder in the central limit theorem for mixing stochastic processes", Ann. Math. Stat., **40**, 601 – 609 (1969).

[6] A. N. Tikhomirov, "On the rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent random variables", Teor. Veroyatnost. i Primenen., **25:4**, 800 – 818 (1980).

[7] B. S. Nahapetyan, "Limit theorems and some applications in statistical physics", Teubner-Texte zur Mathematik, **123**, Stutgart-Leipzig (1991).

[8] P. Hall, C. C. Heyde, Martingale Limit Theory and Its Applications, Academic Press, New York-London (1980).

[9] E. Bolthausen, "Exact convergence rates in some martingale central limit theorems", The Annals of Probability, **10:3**, 672 – 688 (1982).

[10] N. N. Leonenko, "Estimate of the rate of convergence in the central limit theorem for m-dependent random fields", Mat. Zametki, **17:1**, 129 – 132 (1975).

[11] L. H. Y. Chen, The Rate of Convergence in a Central Limit Theorem for Dependent Random Variables with Arbitrary Index Set (1986) (Preprint, http://www.ima.umn.edu/preprints/Jan86Dec86/243.pdf)

[12] А. В. Булинский, "О скорости сходимости в центральной предельной теореме для аддитивных случайных функций", Доклады АН СССР, **235:4**, 741 – 744 (1977).

[13] H. Takahata, "On the rates in the central limit theorem for weakly dependent random fields", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **64:4**, 445 – 456 (1983).

[14] X. Guyon, S. Richardson, "Vitesse de convergence du thereme de la limite centrale pour des champs faiblement dependants", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **66**, 297 – 314 (1984).

[15] Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингал-разностных случайных полей", Известия НАН Армении, серия Математика, **39**, no. 2, 59 – 68 (2004).

[16] Б. С. Нахапетян, "Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин", Теория вероятностей и ее применение, **3**, 589 – 594 (1987)

[17] B. S. Nahapetyan, A. N. Petrosyan, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math., **17**, 105 – 110 (1992).

[18] А. Н. Ширяев, Вероятность, Москва, Наука, (1989)

[19] R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interaction", Funct. Anal. Appl. **2**, 292 – 301 (1968).

[20] Б. С. Нахапетян, Л. А. Хачатрян, "Принцип рандомизации в построении многомерных мартингалов", Известия НАН Армении, серия Математика, **48:1**, 53 – 70, 2013.

Поступила 14 января 2014