

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Поступила 15.05.2013г.

УДК 519.21

АСИМПТОТИКА МОМЕНТОВ СУММ КОМПОНЕНТ МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Л.А. Хачатрян

*Российско-Армянский (Славянский) университет
LindaKhim@gmail.com*

АННОТАЦИЯ

Для слабо зависимых мартингал-разностных случайных полей изучается поведение моментов сумм их компонент, взятых по возрастающим подмножествам. Для этих моментов найдена точная асимптотика, что позволяет при подходящей нормировке доказать их сходимость к моментам стандартного нормального распределения.

Ключевые слова: моменты, мартингал-разностные случайные поля, перемешивание.

Введение

Во многих вопросах теории вероятностей моменты случайных величин и их оценки играют ключевую роль. В частности, на них основан один из самых продуктивных методов доказательства предельных теорем – метод моментов. Посредством данного метода можно не только доказывать различные предельные теоремы, но и получать их уточнения (скорость сходимости), вплоть до асимптотических разложений.

В настоящей работе рассматриваются однородные мартингал-разностные случайные поля с конечным фазовым пространством, удовлетворяющие условию равномерного сильного перемешивания. Для таких случайных полей получены оценки смешанных моментов любого конечного порядка. Кроме того, найдена также асимптотика всех моментов сумм компонент, взятых по возрастаю-

щим подмножествам. Для этих моментов при подходящей нормировке доказана их сходимости к моментам стандартного нормального распределения.

Прелиминарии

Пусть, $X \subset \mathbb{R}^1$ – конечное множество, $|X| < \infty$ и $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ – d -мерная целочисленная решетка. Обозначим через W множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$

$$W = \{V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\}.$$

Совокупность $(\xi_t) = \{\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ случайных величин, каждая из которых принимает значение в X , будем называть случайным полем на $\mathbb{Z}^d$ с фазовым пространством X .

Пусть $\mathfrak{Z}^{\mathbb{Z}^d}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $X^{\mathbb{Z}^d}$. Распределением случайного поля (ξ_t) называется вероятностная мера P на $(X^{\mathbb{Z}^d}, \mathfrak{Z}^{\mathbb{Z}^d})$ – такая, что

$$\Pr\{(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d) \in B\} = P(B), B \in \mathfrak{Z}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Определим на $X^{\mathbb{Z}^d}$ группу преобразований τ_a , $a \in \mathbb{Z}^d$, такую, что $(\tau_a x)_t = x_{t+a}$ для всех $x \in X^{\mathbb{Z}^d}$. Пусть L – σ -алгебра подмножеств $X^{\mathbb{Z}^d}$, инвариантных относительно преобразований τ_a .

Случайное поле (ξ_t) с распределением P называется однородным, если для любых $A \in \mathfrak{Z}^{\mathbb{Z}^d}$ и $a \in \mathbb{Z}^d$

$$P(\tau_a A) = P(A),$$

и называется эргодическим, если его распределение P тривиально на L , т.е. $P(A) \in \{0, 1\}$ при $A \in L$.

Для заданного случайного поля (ξ_t) обозначим через $\mathfrak{Z}_S = \sigma(\xi_t, t \in S)$ – σ -алгебру, порожденную случайными величинами ξ_t , $t \in S$, $S \subset \mathbb{Z}^d$.

Случайное поле (ξ_t) называется мартингал-разностным случайным полем ([1]), если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M|\xi_t| < \infty \text{ и } M\left(\xi_t / \mathfrak{I}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}\right) = 0 \text{ (п.н.)}.$$

Здесь и далее M – символ математического ожидания.

Отметим, что из определения мартингал-разностного случайного поля следует, что для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $V \in \mathcal{W}$, $t \notin V$

$$M(\xi_t / \mathfrak{I}_V) = 0 \text{ (п.н.)}.$$

Для каждого натурального n обозначим через V_n d -мерный куб со стороной n , и пусть $S_{V_n} = \sum_{t \in V_n} \xi_t$. Всюду далее мы будем рассматривать суммы S_{V_n} компонент поля (ξ_t) , взятых по V_n , таким, что $V_n \subset V_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

Основным результатом для мартингал-разностных случайных полей является центральная предельная теорема (ЦПТ), полученная в работе [2].

Теорема (ЦПТ). Пусть (ξ_t) – однородное эргодическое мартингал-разностное случайное поле, такое, что $0 < M\xi_0^2 = \sigma^2 < \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_{V_n}}{\sigma \cdot n^{d/2}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Далее отметим, что, помимо приведенного, существует эквивалентное определение эргодичности случайного поля. Однородное случайное поле (ξ_t) называется эргодическим, если для всех $I, \Lambda \in \mathcal{W}$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{a \in V_n} P(A \cap \tau_a(B)) = P(A)P(B), \quad A \in \mathfrak{I}_I, B \in \mathfrak{I}_\Lambda.$$

Из приведенной выше теоремы следует, что выполнение этого условия достаточно для доказательства ЦПТ для мартингал-разностных случайных полей. При выполнении же более сильного условия – условия равномерного сильного перемешивания – удастся не только доказать ЦПТ, но и установить сходимость всех моментов сумм компонент S_{V_n} мартингал-разностного случайного поля к соответствующим моментам стандартного нормального распределения (Теорема 2).

Скажем, что случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом ϕ_I , $I \in \mathcal{W}$, если для каждого фиксированного $I \in \mathcal{W}$

$$\sup \left\{ \left| P(A/B) - P(A) \right|, A \in \mathfrak{F}_I, B \in \mathfrak{F}_\Lambda, P(B) > 0 \right\} \leq \varphi_I(\rho(I, \Lambda)),$$

где функция $\varphi_I(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}^1$ такова, что для любого $I \in W$, $\varphi_I(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, и

$$\rho(I, \Lambda) = \inf \left\{ |t - s|, t \in I, s \in \Lambda \right\},$$

$$|t - s| = \max_{1 \leq i \leq d} |t^{(i)} - s^{(i)}|, \quad t = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)}), \quad s = (s^{(1)}, \dots, s^{(d)}).$$

Основные результаты

Следующий результат является основным в настоящей работе.

Теорема 1. Пусть, (ξ_i) – однородное мартингал-разностное случайное поле с конечным фазовым пространством X . Тогда для всех $k = 1, 2, \dots$

$$M(S_{V_n})^{2k-1} = O(|V_n|^{k-1}).$$

Если, к тому же, случайное поле (ξ_i) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом φ_I , $I \in W$, таким, что

$$\varphi_I(\rho) \leq |I| \cdot \varphi(\rho) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \varphi(j) < \infty,$$

то для всех $k = 1, 2, \dots$

$$M(S_{V_n})^{2k} = (2k-1)!! \sigma^{2k} |V_n|^k \left(1 + O(|V_n|^{-1}) \right),$$

где $\sigma^2 = M\xi_0^2$.

Для доказательства второго утверждения Теоремы 1 нам потребуется следующий результат, представляющий и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть, (ξ_i) – случайное поле с конечным фазовым пространством X , удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом φ_I , $I \in W$, таким, что

$$\varphi_I(\rho) \leq |I| \cdot \varphi(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда для всех $k = 1, 2, \dots$ и целых $m_1, m_2, \dots, m_k \geq 0$, $m_1 + m_2 + \dots + m_k < \infty$

$$\sum_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k}} \left| M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_k}^{m_k} - M \xi_{t_1}^{m_1} M \xi_{t_2}^{m_2} \dots M \xi_{t_k}^{m_k} \right| \leq C |V_n|^{k-1} \sum_{j=1}^n j^{d-1} \varphi(j),$$

где положительное число C не зависит от n .

Доказательство.

Пусть $m_1, m_2, \dots, m_k \geq 0$ — произвольные целые числа, $m_1 + m_2 + \dots + m_k < \infty$. Для всех $t_1, t_2, \dots, t_k \in V_n$ можем написать

$$\begin{aligned} & M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_k}^{m_k} - M \xi_{t_1}^{m_1} M \xi_{t_2}^{m_2} \dots M \xi_{t_k}^{m_k} = \\ &= (M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_k}^{m_k} - M \xi_{t_k}^{m_k} M \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}}) + M \xi_{t_k}^{m_k} (M \xi_{t_1}^{m_1} \dots \xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}} - M \xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}} M \xi_{t_1}^{m_1} \dots \xi_{t_{k-2}}^{m_{k-2}}) + \\ &+ M \xi_{t_k}^{m_k} M \xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}} (M \xi_{t_1}^{m_1} \dots \xi_{t_{k-2}}^{m_{k-2}} - M \xi_{t_{k-2}}^{m_{k-2}} M \xi_{t_1}^{m_1} \dots \xi_{t_{k-3}}^{m_{k-3}}) + \dots + M \xi_{t_k}^{m_k} \dots M \xi_{t_3}^{m_3} (M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} - \\ &- M \xi_{t_1}^{m_1} M \xi_{t_2}^{m_2}) = \sum_{r=2}^k \prod_{j=r+1}^k M \xi_{t_j}^{m_j} (M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r} - M \xi_{t_1}^{m_1} \cdot M \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r}). \end{aligned}$$

Поскольку компоненты случайного поля (ξ_t) принимают значения в конечном множестве X , то для любого r и $t_1, t_2, \dots, t_r \in V_n$ найдется число A_r , $0 < A_r < \infty$, такое, что

$$\left| \prod_{j=r+1}^k M \xi_{t_j}^{m_j} \right| \leq A_r, \quad r = \overline{1, k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{t_1, \dots, t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k}} \left| M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_k}^{m_k} - M \xi_{t_1}^{m_1} M \xi_{t_2}^{m_2} \dots M \xi_{t_k}^{m_k} \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{t_1, \dots, t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k}} \sum_{r=2}^k \left| \prod_{j=r+1}^k M \xi_{t_j}^{m_j} \right| \cdot \left| M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r} - M \xi_{t_1}^{m_1} \cdot M \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r} \right| \leq \\ & \leq \sum_{r=2}^k A_r \cdot \sum_{\substack{t_1, \dots, t_r \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_r}} \sum_{\substack{t_{r+1}, \dots, t_k \in V_n \setminus \{t_1, \dots, t_r\} \\ t_{r+1} \neq \dots \neq t_k}} \left| M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r} - M \xi_{t_1}^{m_1} \cdot M \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=2}^k A_r \cdot C_{|V_n|-r}^{k-r} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_r \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_r}} \left| M_{\xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_1 m_2 \dots m_r} - M_{\xi_{t_1}}^{m_1} \cdot M_{\xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_2 \dots m_r} \right| \leq \\
&\leq \sum_{r=2}^k A_r \cdot \frac{|V_n|^{k-r}}{(k-r)!} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_r \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_r}} \left| M_{\xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_1 m_2 \dots m_r} - M_{\xi_{t_1}}^{m_1} \cdot M_{\xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_2 \dots m_r} \right|.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{t_1, \dots, t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k}} \left| M_{\xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_k}}^{m_1 m_2 \dots m_k} - M_{\xi_{t_1}}^{m_1} M_{\xi_{t_2}}^{m_2} \dots M_{\xi_{t_k}}^{m_k} \right| \leq \\
&\leq \sum_{r=2}^k A_r \cdot \frac{|V_n|^{k-r}}{(k-r)!} \sum_{t_1 \in V_n} \sum_{\substack{t_2, \dots, t_r \in V_n \setminus \{t_1\} \\ t_2 \neq \dots \neq t_r}} \left| M_{\xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_1 m_2 \dots m_r} - M_{\xi_{t_1}}^{m_1} \cdot M_{\xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_2 \dots m_r} \right|. \quad (1)
\end{aligned}$$

Для каждого фиксированного $t_1 \in V_n$ найдем оценку величины

$$\sum_{\substack{t_2, \dots, t_r \in V_n \\ t_2 \neq \dots \neq t_r}} \left| M_{\xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_1 m_2 \dots m_r} - M_{\xi_{t_1}}^{m_1} \cdot M_{\xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_2 \dots m_r} \right| \quad (2)$$

Поскольку случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом φ_I , $I \in W$, то можем написать

$$\begin{aligned}
&\left| M_{\xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_1 m_2 \dots m_r} - M_{\xi_{t_1}}^{m_1} \cdot M_{\xi_{t_2} \dots \xi_{t_r}}^{m_2 \dots m_r} \right| = \\
&= \left| \sum_{x_1 \in X} \dots \sum_{x_r \in X} x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} P(\xi_{t_1} = x_1, \xi_{t_2} = x_2, \dots, \xi_{t_r} = x_r) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{x_1 \in X} x_1^{m_1} P(\xi_{t_1} = x_1) \sum_{x_2 \in X} \dots \sum_{x_r \in X} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} P(\xi_{t_2} = x_2, \dots, \xi_{t_r} = x_r) \right| \leq \\
&\leq \sum_{x_1 \in X} \dots \sum_{x_r \in X} \left| x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} \right| P(\xi_{t_2} = x_2, \dots, \xi_{t_r} = x_r) \cdot \\
&\quad \cdot \left| P(\xi_{t_1} = x_1 / \xi_{t_2} = x_2, \dots, \xi_{t_r} = x_r) - P(\xi_{t_1} = x_1) \right| \leq \\
&\leq \varphi_{\{t_1\}} \left(\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1}) \right) \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \dots \sum_{x_r \in X} \left| x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} \right| \leq B_r \cdot \varphi \left(\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1}) \right),
\end{aligned}$$

где $\Lambda_{r-1} = \{t_2, t_3, \dots, t_r\} \subset V_n \setminus \{t_1\}$ и $B_r = \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \dots \sum_{x_r \in X} |x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r}| < \infty$.

Отсюда

$$\sum_{\substack{t_2, \dots, t_r \in V_n \setminus \{t_1\} \\ t_2 \neq \dots \neq t_r}} |M_{\xi_{t_1}}^{\xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r}} - M_{\xi_{t_1}}^{\xi_{t_1}^{m_1}} \cdot M_{\xi_{t_2}}^{\xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r}}| \leq B_r \sum_{\Lambda_{r-1} \subset V_n \setminus \{t_1\}} \varphi(\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1})).$$

Для всех $t \in V_n$ обозначим

$$V_n^{(j)}(t) = \{s \in V_n : |t - s| = j\}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Пусть, t_2 — точка из Λ_{r-1} , для которой

$$\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1}) = \rho(\{t_1\}, \{t_2\}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda_{r-1} \subset V_n \setminus \{t_1\}} \varphi(\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1})) &= \sum_{j=1}^n \sum_{t_2 \in V_n^{(j)}(t_1)} \sum_{\Lambda_{r-2} \subset V_n \setminus \{t_1, t_2\}} \varphi(\rho(\{t_1\}, \{t_2\})) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{t_2 \in V_n^{(j)}(t_1)} \varphi(j) C_{|V_n|-2}^{r-2} \leq \frac{|V_n|^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{j=1}^n \varphi(j) |V_n^{(j)}(t_1)|. \end{aligned}$$

Поскольку $V_n^{(j)}(t_1)$ содержит все точки $s = (s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(d)})$ из V_n , для которых

$$|t_1^{(i)} - s^{(i)}| \leq j,$$

причем равенство обязательно достигается хотя бы при одном i , $i = \overline{1, d}$, то

$$\begin{aligned} |V_n^{(j)}(t_1)| &= \sum_{k=1}^d C_k^d 2^k (2j-1)^{d-k} = (2j+1)^d - (2j-1)^d = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{d/2} C_d^{2k-1} (2j)^{2k-1} \leq 2^{2d} j^{d-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для (2) имеем следующую оценку

$$\sum_{\substack{t_2, \dots, t_r \in V_n \\ t_2 \neq \dots \neq t_r}} |M_{\xi_{t_1}}^{\xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r}} - M_{\xi_{t_1}}^{\xi_{t_1}^{m_1}} \cdot M_{\xi_{t_2}}^{\xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_r}^{m_r}}| \leq 2^{2d} \cdot B_r \frac{|V_n|^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{j=1}^n j^{d-1} \varphi(j).$$

Подставив полученную оценку в (1), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in V \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}} \left| M_{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_r}}^{m_1 m_2 \dots m_r} - M_{\xi_{i_1}}^{m_1} \cdot M_{\xi_{i_2} \dots \xi_{i_r}}^{m_2 \dots m_r} \right| \leq \\ & \sum_{r=2}^k A_r \cdot \frac{|V_n|^{k-r}}{(k-r)!} \sum_{i_1 \in V_n} 2^{2d} \cdot B_r \frac{|V_n|^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{j=1}^n j^{d-1} \varphi(j) = \\ & |V_n|^{k-1} 2^{2d} \sum_{r=2}^k \frac{A_r B_r}{(k-r)!(r-2)!} \sum_{j=1}^n j^{d-1} \varphi(j) = \\ & = C |V_n|^{k-1} \sum_{j=1}^n j^{d-1} \varphi(j), \end{aligned}$$

где $C = 2^{2d} \cdot \sum_{r=2}^k \frac{A_r B_r}{(k-r)!(r-2)!} < \infty$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству Теоремы 1. При $s < |V_n|$ можем написать

$$\begin{aligned} M(S_{V_n})^s &= M\left(\sum_{i \in V_n} \xi_i\right)^s = \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_{|V_n|} \geq 0 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_{|V_n|} = s}} \frac{s!}{m_1! m_2! \dots m_{|V_n|}!} M_{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_{|V_n|}}}^{m_1 m_2 \dots m_{|V_n|}} = \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{i_1, \dots, i_j \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_j}} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 1} \frac{s!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M_{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_j}}^{m_1 m_2 \dots m_j}. \end{aligned}$$

Поскольку (ξ_i) – мартингал-разностное случайное поле, то $M_{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_j}}^{m_1 m_2 \dots m_j} = 0$ если хотя бы одно из чисел $m_1, m_2, \dots, m_j$ равно 1. Следовательно, достаточно рассматривать суммы по наборам чисел $m_1, m_2, \dots, m_j$, таким, что $m_i \geq 2$ $i = \overline{1, j}$. Отсюда

$$M(S_{V_n})^s = \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{i_1, \dots, i_j \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_j}} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = s}} \frac{s!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M_{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_j}}^{m_1 m_2 \dots m_j}.$$

Пусть, далее, $s = 2k - 1$. Тогда

$$\left| M(S_{V_n})^{2k-1} \right| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_j \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_j}} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k-1}} \frac{(2k-1)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} \left| M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_j}^{m_j} \right|.$$

В правой части неравенства суммирование ведется по $j \leq k-1$, т.к. в противном случае $m_1 + m_2 + \dots + m_j \geq 2j > 2k-1$.

Поскольку компоненты случайного поля (ξ_t) принимают значения в конечном множестве X , то найдется число C_1 , $0 < C_1 < \infty$, такое, что

$$\left| M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_j}^{m_j} \right| < C_1$$

для всех $t_1, t_2, \dots, t_j \in V_n$ и $2 \leq m_1, m_2, \dots, m_j \leq 2k-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| M(S_{V_n})^{2k-1} \right| &\leq C_1 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_j \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_j}} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k-1}} \frac{(2k-1)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} \leq \\ &\leq C_1 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} |V_n|^j j^{2k-1} < C_1 (k-1)^{2k-1} \sum_{j=1}^{k-1} |V_n|^j = \\ &= C_1 (k-1)^{2k-1} \frac{|V_n| (|V_n|^{k-1} - 1)}{|V_n| - 1} = |V_n|^{k-1} C_1 (k-1)^{2k-1} \frac{1 - 1/|V_n|^{k-1}}{1 - 1/|V_n|}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $k = 1, 2, \dots$

$$M(S_{V_n})^{2k-1} = O(|V_n|^{k-1}). \quad (3)$$

Пусть теперь $s = 2k$. Имеем

$$\begin{aligned} M(S_{V_n})^{2k} &= \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{t_1, \dots, t_j \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_j}} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k}} \frac{(2k)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_j}^{m_j} = \\ &= \sum_{\substack{t_1, \dots, t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k}} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_k \geq 2 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_k = 2k}} \frac{(2k)!}{m_1! m_2! \dots m_k!} M \xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} \dots \xi_{t_k}^{m_k} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i_1, \dots, i_j \in V_n} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_j \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k}} \frac{(2k)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M \xi_{i_1}^{m_1} \xi_{i_2}^{m_2} \dots \xi_{i_j}^{m_j} = \\
& = \frac{(2k)!}{2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}} M \xi_{i_1}^2 \xi_{i_2}^2 \dots \xi_{i_k}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i_1, \dots, i_j \in V_n} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_j \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k}} \frac{(2k)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M \xi_{i_1}^{m_1} \xi_{i_2}^{m_2} \dots \xi_{i_j}^{m_j}.
\end{aligned}$$

Далее, с учетом того, что

$$M \xi_{i_1}^2 \xi_{i_2}^2 \dots \xi_{i_k}^2 = M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2 + (M \xi_{i_1}^2 \xi_{i_2}^2 \dots \xi_{i_k}^2 - M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2),$$

получаем

$$\begin{aligned}
M(S_{V_n})^{2k} &= \frac{(2k)!}{2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}} M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2 + \\
&+ \frac{(2k)!}{2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}} (M \xi_{i_1}^2 \xi_{i_2}^2 \dots \xi_{i_k}^2 - M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2) + \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i_1, \dots, i_j \in V_n} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_j \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k}} \frac{(2k)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M \xi_{i_1}^{m_1} \xi_{i_2}^{m_2} \dots \xi_{i_j}^{m_j}. \quad (4)
\end{aligned}$$

В полученном для $M(S_{V_n})^{2k}$ соотношении (4) рассмотрим слагаемые, стоящие справа, начиная с последнего. Применив рассуждения, аналогичные тем, что использовались при получении оценки (3), нетрудно показать, что

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i_1, \dots, i_j \in V_n} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_j \geq 2 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_j \\ m_1 + m_2 + \dots + m_j = 2k}} \frac{(2k)!}{m_1! m_2! \dots m_j!} M \xi_{i_1}^{m_1} \xi_{i_2}^{m_2} \dots \xi_{i_j}^{m_j} = O(|V_n|^{k-1}).$$

Заметим, что в условиях теоремы Лемма 1 имеет место, и, следовательно,

$$\begin{aligned}
& \frac{(2k)!}{2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}} |M \xi_{i_1}^2 \xi_{i_2}^2 \dots \xi_{i_k}^2 - M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2| \leq \\
& \leq \frac{(2k)!}{2^k} \cdot C |V_n|^{k-1} \sum_{j=1}^n j^{d-1} \varphi(j) < C_2 |V_n|^{k-1},
\end{aligned}$$

где $C_2 = \frac{(2k)!}{2^k} \cdot C \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \varphi(j)$, $0 < C_2 < \infty$.

В силу однородности случайного поля (ξ_i)

$$M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2 = (M \xi_0^2)^k = \sigma^{2k},$$

следовательно, для первого слагаемого в (4) можем написать

$$\begin{aligned} & \frac{(2k)!}{2^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in V_n \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}} M \xi_{i_1}^2 M \xi_{i_2}^2 \dots M \xi_{i_k}^2 = \frac{(2k)!}{2^k} C_{|V_n|}^k \sigma^{2k} = \\ & = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} |V_n| (|V_n| - 1) \dots (|V_n| - k + 1) = (2k - 1)!! \sigma^{2k} |V_n|^k (1 + O(|V_n|^{-1})). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M(S_{V_n})^{2k} &= (2k - 1)!! \sigma^{2k} |V_n|^k (1 + O(|V_n|^{-1})) + 2O(|V_n|^{k-1}) = \\ &= (2k - 1)!! \sigma^{2k} |V_n|^k (1 + O(|V_n|^{-1})). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Полученный результат позволяет доказать для мартингал-разностных случайных полей следующий усиленный вариант ЦПТ.

Теорема 2. Пусть (ξ_i) — однородное мартингал-разностное случайное поле с конечным фазовым пространством X , удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом φ_I , $I \in W$, таким, что

$$\varphi_I(\rho) \leq |I| \cdot \varphi(\rho) \text{ и } \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \varphi(j) < \infty,$$

■ пусть $M \xi_0^2 = \sigma^2 > 0$. Тогда для случайного поля (ξ_i) справедлива ЦПТ, причем

$$M \left(\frac{S_{V_n}}{\sigma n^{d/2}} \right)^k \rightarrow M \eta^k \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где η — стандартно нормально распределенная случайная величина.

Доказательство.

Из Теоремы 1 прямо следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left(\frac{S_{V_n}}{\sigma \sqrt{|V_n|}} \right)^{2k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sigma^2 |V_n|)^{k-1/2}} M(S_{V_n})^{2k-1} = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left(\frac{S_{V_n}}{\sigma \sqrt{|V_n|}} \right)^{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sigma^2 |V_n|)^k} M(S_{V_n})^{2k} = (2k-1)!!,$$

а предельные значения являются моментами стандартного нормального распределения. Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Б.С. Нахапетяну за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nahapetian B.S., Petrosian A.N. Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math. Vol. 17, 105–110 (1992).
2. Nahapetian B.S. Billingsley-Ibragimov Theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics, C.R. Acad. Sci. Paris. Vol. 320, 1539–1544 (1995).

ASYMPTOTIC FORM OF MOMENTS OF SUMS OF COMPONENTS OF MARTINGALE-DIFFERENCE RANDOM FIELDS

L.A. Khachatryan

SUMMARY

For weakly dependent martingale-difference random fields the behavior of the moments of sums of their components, taken by increasing subsets, is studied. For these moments the exact asymptotic is found, which allows to prove their convergence to the moments of the standard normal distribution after a suitable normalization.

Keywords: moments, martingale-difference random fields, mixing.

ՄԱՐՏԻՆԳԱԼ-ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՍՈՍԵՆՏՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱԿԱՆ ՎԱՐՔԸ

Լ.Ա. Խաչատրյան

ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Ուսումնասիրվում է թույլ կախյալ մարտինգալ-տարբերական պատահական դաշտերի բաղադրիչների գումարների, վերցրած ըստ աճող ենթաբազմությունների, մոմենտների վարքը: Այդ մոմենտների համար ստացված է ճշգրիտ ասիմպտոտիկա, որը թույլ է տալիս օգտագործելով համապատասխան նորմավորումը ապացուցել նրանց ձգտումը ստանդարտ նորմալ բախշման մոմենտներին: