ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

А. И. ПЕТРОСЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ В БИЦИЛИНДРЕ

Введение

Бергману [1] принадлежит идея каждой вещественной дважды гармонической функции $u(z_1, z_2)$ в бидиске ставить в соответствие комплексозначную функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ следующим образом:

1) при фиксированном z_2 функция $f(z_1, z_2)$ аналитична по z_1;

2) $v(0, z_2) \equiv 0$.

Полученное множество функций, названное им расширенным классом комплексных функций, можно изучать методами теории потенциалов, т.к. задача Дирихле с заданными значениями на остове бидиска в классе всех дважды гармонических функций разрешима. Если условие 2) заменить на условие

2′) $f(0, z_2)$ аналитична,

то полученный класс функций, которые мы будем называть полуаналитическими, уже является расширением класса аналитических функций в том смысле, что в случае бигармонической функции $u(z_1, z_2)$ соответствующая функция $f(z_1, z_2)$ аналитична.

Основным результатом статьи является распространение на класс полуаналитических функций теоремы М.М. Джрбашяна [2] об интегральном представлении по существу произвольных гармонических в круге функций. Эта теорема является существенным расширением известной теоремы Герглотца и сводится к ней в специальном случае.

В работах М.М. Джрбашяна введен обобщенный оператор типа Римана-Лиувилля L^ω, с помощью которого построена теория факторизации функций, мероморфных в круге, а также получены обобщенные интегральные формулы Коши, Шварца и Пуассона. Напомним некоторые определения и результаты из работы [2].

Рассматривается множество Ω положительных и непрерывных на $[0,\ 1)$ функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\omega(0) = 1, \quad \int\limits_0^1 \omega(x)dx < +\infty.$$

Каждой функции $\omega(x) \in \Omega$ ставится в соответствие последовательность положительных чисел

$$\Delta(0) = 1, \quad \Delta(k) = k \int\limits_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{0.1}$$

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$ оператор L^ω определяется следующим образом

$$L^\omega\{\varphi(r)\} = -\frac{d}{dr}\left\{r \int\limits_0^1 \varphi(\tau r) dp(\tau)\right\}, \qquad r \in (0, 1)$$

где функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0) = 1, \qquad p(\tau) = \tau \int\limits_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx.$$

Отметим, что на степенные ряды оператор L^ω действует следующим образом

$$L^\omega\left\{\sum_{k=0}^\infty a_k (re^{i\varphi})^k\right\} = \sum_{k=0}^\infty \Delta(k) a_k (re^{i\varphi})^k.$$

Затем строятся функции, аналитические в круге $|z| < 1$

$$C(z; \omega) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Delta(k)}, \qquad S(z; \omega) = 2C(z; \omega) - 1, \tag{0.2}$$

являющиеся аналогами ядер Коши и Шварца. При этом аналог интегральной формулы Шварца имеет следующий вид

$$f(z) = i\mathrm{Im}\ f(0) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho} e^{-i\vartheta}; \omega\right) \mathrm{Re}\ f_\omega(\rho e^{i\vartheta}) d\vartheta, \tag{0.3}$$

где $0 < \rho < 1$ и $f_\omega(re^{i\vartheta}) = L^\omega\left\{f(re^{i\vartheta})\right\}$.

Пусть R_ω — класс аналитических в единичном круге функций, для которых выполняется условие

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\ f_\omega(re^{i\varphi})| d\varphi\right\} < +\infty.$$

В работе [2] установлена следующая теорема о представлении класса R_ω

Т е о р е м а А (М. М. Джрбашян). *Класс* R_ω *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *представимых в виде*

$$f(z) = iC + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(ze^{-i\vartheta};\omega)d\psi(\vartheta), \qquad |z|<1,$$

где $\operatorname{Im} C = 0$, $\psi(\vartheta)$ — *вещественная функция с конечной полной вариацией на* $[0, 2\pi]$.

Для распространения интегрального представления (0.3) на случай функций n комплексных переменных следует, очевидно, вместо одной функции $\omega(x)$ взять систему из n функций $\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ и применить последовательно операторы $L^{\omega_1}, \dots, L^{\omega_n}$ соответственно по каждой переменной $z_1, \dots, z_n$. Таким образом легко можно получить аналог формулы (0.3), что и было сделано в заметке [3].

Однако получаемое при этом n-мерное ядро Шварца обладает тем недостатком, что его вещественная часть неположительна и, более того, по модулю в среднем не ограничена, поэтому аналог теоремы А с таким ядром неверен. В настоящей работе для двумерного случая вводится новое ядро с положительной вещественной частью, причем это ядро годится для представления не только аналитических, но и полуаналитических функций.

§ 1. Полуаналитические функции

Пусть $\mathbb{C}^2$ — двумерное комплексное пространство; $z = (z_1, z_2)$ — точка этого пространства; $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_i| < 1,\ i = 1, 2\}$ — единичный бидиск; $\mathbb{T}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_i| = 1,\ i = 1, 2\}$ — остов этого бидиска. Функция $u(z_1, z_2) = u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, определенная в $\mathbb{D}^2$, называется бигармонической, если выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \equiv 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} \equiv 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} \equiv 0 \tag{1.3}$$

Если же выполняются лишь условия (1.1) и (1.2), то функция $u(z_1, z_2)$ называется дважды гармонической.

О п р е д е л е н и е. Функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$, определенную в B, назовем полуаналитической, если

а) $u(z_1, z_2)$ — дважды гармоническая;

b) при фиксированном z_2, $|z_2|<1$ функция $f(z_1,z_2)$ аналитична в круге $|z_2|<1$;

c) $f(0,z_2)$ аналитична в круге $|z_2|<1$.

Связь между аналитичностью и полуаналитичностью дается в следующей лемме.

Л е м м а . *Всякая полуаналитическая функция* $f(z_1,z_2)=u(z_1,z_2)+ +iv(z_1,z_2)$, *вещественная часть* $u(z_1,z_2)$ *которой бигармонична, является аналитической функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (см., например, [4]), что всякая бигармоническая в бидиске функция $u(z_1,z_2)$ является вещественной частью аналитической функции $\widetilde{f}(z_1,z_2)$. Итак, $\widetilde{f}(z_1,z_2)=u(z_1,z_2)+i\widetilde{v}(z_1,z_2)$. В силу условия a) при фиксированном z_2 функция $f(z_1,z_2)-\widetilde{f}(z_1,z_2)=i[v(z_1,z_2)- -\widetilde{v}(z_1,z_2)]$, вещественная часть которой есть тождественный нуль, аналитична в круге $|z_1|<1$. Поэтому

$$f(z_1,z_2)-\widetilde{f}(z_1,z_2)=i\varphi(z_2), \tag{1.4}$$

где $\varphi(z_2)$ — некоторая вещественная функция. Далее, из (1.4) и условия c) следует, что функция $i\varphi(z_2)=f(0,z_2)-\widetilde{f}(0,z_2)$ аналитична в $|z_2|<1$, т.е. $\varphi(z_2)\equiv 0$, где C — константа. Отсюда и из (1.4) имеем

$$f(z_1,z_2)=\widetilde{f}(z_1,z_2)+iC,$$

что и доказывает лемму. □

Пусть $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)\in\Omega$; $\{\Delta_1(k)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\Delta_1(k)\}_{k=0}^{\infty}$ — соответствующие этим функциям по формуле (1) последовательности чисел. Пусть, далее

$$S(z;\omega)=P(z;\omega)+iQ(z;\omega)$$

— обобщенное ядро Шварца, определяемое по формуле (2). Введем функцию

$$\widetilde{S}(z_1,z_2;\omega)=S(z_1;\omega_1)P(z_2;\omega_2)+iQ(z_2;\omega_2), \tag{1.5}$$

где $\omega=(\omega_1,\omega_2)$. В следующей теореме дается интегральное представление для полуаналитических функций.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f(z_1,z_2)$ — *полуаналитическая функция,* ρ_1 *и* ρ_2 — *произвольные числа из интервала* $(0,1)$. *Тогда при любом* $|z_1|<\rho_1$, $|z_2|<\rho_2$ *справедливо равенство*

$$f(z_1,z_2)=i\mathrm{Im}\ f(0,0)+ \\ +\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\vartheta_1},\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2};\omega\right)\mathrm{Re}\ f_\omega(\rho_1e^{i\vartheta_1},\rho_2e^{i\vartheta_2})\,d\vartheta_1d\vartheta_2, \tag{1.6}$$

где

$$f_\omega(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2}) = L^\omega\{f(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})\}. \tag{1.7}$$

Здесь оператор L^{ω_1} *действует как на функцию от* r_1, *а* L^{ω_2} *— как на функцию от* r_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При фиксированном z_2, $|z_2| < 1$ функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в круге $|z_1| < 1$. По теореме 3 М. М. Джрбашяна [2] имеем

$$f(z_1, z_2) = i\mathrm{Im}\ f(0, z_2) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\vartheta_1}; \omega_1\right) L^{\omega_1}\{\mathrm{Re}\ f(\rho_1e^{i\vartheta_1}, z_2)\}d\vartheta_1. \tag{1.8}$$

Далее, при фиксированном $\rho_1e^{i\vartheta_1}$ функция $L^{\omega_1}\{\mathrm{Re}\ f(\rho_1e^{i\vartheta_1}, z_2)\}$ гармонична в $|z_2| < 1$. По теореме 4 из [2] имеем

$$L^{\omega_1}\{\mathrm{Re}\ f(\rho_1e^{i\vartheta_1}, z_2)\} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}; \omega_2\right) \mathrm{Re}\ f_\omega(\rho_1e^{i\vartheta_1}, \rho_2e^{i\vartheta_2})d\vartheta_2. \tag{1.9}$$

Приравнивая мнимые части в обобщенной формуле Шварца, получим

$$\mathrm{Im}\ f(0, z_2) = \mathrm{Im}\ f(0, 0) + 12\pi\int_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}; \omega_2\right) L^{\omega_2}\{\mathrm{Re}\ f(0, \rho_2e^{i\vartheta_2})\}d\vartheta_2. \tag{1.10}$$

Написав формулу (1.9) для функции $L^{\omega_2}\{\mathrm{Re}\ f(z_1, \rho_2e^{i\vartheta_2})\}$ при фиксированном $\rho_2e^{i\vartheta_2}$, и положив в ней $z_1 = 0$, будем иметь

$$L^{\omega_2}\{\mathrm{Re}\ f(0, \rho_2e^{i\vartheta_2})\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{\omega_1}\left\{L^{\omega_2}\{\mathrm{Re}\ f(\rho_1e^{i\vartheta_1}, \rho_2e^{i\vartheta_2})\}\right\}d\vartheta_1. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) получаем

$$\mathrm{Im}\ f(0, z_2) = \mathrm{Im}\ f(0, 0) + \\ + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}; \omega_2\right) \mathrm{Re}\ f_\omega(\rho_1e^{i\vartheta_1}, \rho_2e^{i\vartheta_2})d\vartheta_1 d\vartheta_2. \tag{1.12}$$

Подставляя в правую часть равенства (1.8) соотношения (1.9) и (1.12), получим утверждение теоремы. □

Рассмотрим частный случай теоремы 1, когда $\omega_1(x) \equiv 1$, $\omega_2(x) \equiv 1$. Формула (1.6) тогда примет вид

$$f(z_1, z_2) = i\mathrm{Im}\ f(0,0)+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\vartheta_1}, \frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}\right) \mathrm{Re}\ f(\rho_1 e^{i\vartheta_1}; \rho_2 e^{i\vartheta_2} d\vartheta_1 d\vartheta_2, \quad (1.13)$$

где $\widetilde{S}(z_1, z_2) \equiv \widetilde{S}(z_1, z_2; 1)$.

Формула (1.13) является аналогом формулы Шварца для полуаналитических функций.

Т е о р е м а 2. *Мнимая часть полуаналитической функции* $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ *есть функция дважды гармоническая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отделив мнимые части в формуле (1.13), получим

$$v(z_1, z_2) = v(0,0)+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Im}\ \widetilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\vartheta_1}, \frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}\right) \mathrm{Re}\ f(\rho_1 e^{i\vartheta_1}; \rho_2 e^{i\vartheta_2}) d\vartheta_1 d\vartheta_2. \quad (1.14)$$

Согласно определению (1.5) ядра $\widetilde{S}$ имеем

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\vartheta_1}, \frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}\right) = P\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}\right) Q\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\vartheta_1}\right) + Q\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\vartheta_2}\right) \quad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что $\mathrm{Im}\ \widetilde{S}(z_1/\rho_1 e^{-i\vartheta_1}, z_2/\rho_2 e^{-i\vartheta_2})$ есть функция, дважды бигармоническая в бицилиндре $\{|z_1| < \rho_1,\ |z_2| < \rho_2\}$. Отсюда и из формулы (1.14), учитывая, что ρ_1 и ρ_2 — произвольные числа из интервала (0,1), получаем утверждение теоремы. □

§ 2. Представление некоторых классов функций

Пусть $\omega_1(x),\ \omega_2(x) \in \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Обозначим через A_ω множество полуаналитических в бидиске $\mathbb{D}^2$ функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<\rho_1,\rho_2<1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\ f_\omega(\rho_1 e^{i\vartheta_1}; \rho_2 e^{i\vartheta_2})| d\vartheta_1 d\vartheta_2 < +\infty. \quad (2.1)$$

В следующей теореме дается представление класса A_ω.

Т е о р е м а 3. *Класс A_ω совпадает с множеством функций, имеющих вид*

$$f(z_1,z_2)=iC+\int\limits_{\mathbb{T}^2}\widetilde{S}(z_1e^{-i\vartheta_1},z_2e^{-i\vartheta_2};\omega)d\mu(\vartheta_1,\vartheta_2), \qquad (2.2)$$

где $\operatorname{Im} C=0$, μ *— произвольная конечная мера на торе* $\mathbb{T}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z_1,z_2)\in\Omega$. Тогда для фиксированных чисел ρ_1 и ρ_2 $(0<\rho_1,\rho_2<1)$ имеет место формула (1.6). Рассмотрим семейство мер на остове $\mathbb{T}^2$

$$d\mu_{\rho_1\rho_2}=\frac{1}{4\pi^2}\operatorname{Re} f_\omega(\rho_1e^{i\vartheta_1};\rho_2e^{i\vartheta_2})d\vartheta_1d\vartheta_2<+\infty. \qquad (2.3)$$

Полные вариации этих мер в силу условия (2.1) равномерно ограничены. По теореме Банаха-Алаоглу (см. [5]) существует последовательность мер $\mu_n=$ $=\mu_{\rho_1^{(n)},\rho_2^{(n)}}$, $\rho_1^{(n)}\to 1$, $\rho_2^{(n)}\to 2$, слабо сходящаяся к некоторой конечной мере μ, т.е. для любой непрерывной на $\mathbb{T}^2$ функции $F(\vartheta_1,\vartheta_2)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{T}^2}F(\vartheta_1,\vartheta_2)d\mu_n(\vartheta_1,\vartheta_2)=\int\limits_{\mathbb{T}^2}F(\vartheta_1,\vartheta_2)d\mu(\vartheta_1,\vartheta_2).$$

В частности, при фиксированном $z=(z_1,z_2)$, $|z_1|<1$, $|z_2|,<1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\widetilde{S}(z_1e^{-i\vartheta_1},z_2e^{-i\vartheta_2};\omega)d\mu_n(\vartheta_1,\vartheta_2)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}^2}\widetilde{S}(z_1e^{-i\vartheta_1},z_2e^{-i\vartheta_2};\omega)d\mu(\vartheta_1,\vartheta_2). \qquad (2.4)$$

С учетом (2.3) интегральная формула (1.6) для точки $(z_1\rho_1^{(n)},z_2\rho_2^{(n)})$ имеет вид

$$f(z_1\rho_1^{(n)},z_2\rho_2^{(n)})=i\operatorname{Im} f(0,0)+\int\limits_{\mathbb{T}^2}\widetilde{S}(z_1e^{-i\vartheta_1},z_2e^{-i\vartheta_2};\omega)d\mu_n(\vartheta_1,\vartheta_2). \qquad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует представление (2.2).

Докажем обратное. Пусть функция $f(z_1,z_2)$ допускает представление (2.2). Покажем, что $f\in A_\omega$. Учитывая, что $L^\omega\{\widetilde{S}(z_1,z_2;\omega)\}\equiv\tilde{S}(z_1,z_2)$ а также $\operatorname{Re}\tilde{S}(z_1,z_2;\omega)=P(z_1)P(z_2)$ (где $P(z)=\operatorname{Re}(1+z)(1-z)^{-1}$ — ядро Пуассона), применим оператор L^ω к равенству (2.2) и, отделяя вещественные части, получим

$$\operatorname{Re} f_\omega(\rho_1e^{i\vartheta_1};\rho_2e^{i\vartheta_2})=\int\limits_{\mathbb{T}^2}P(r_1e^{i(\varphi_1-\vartheta_1)})P(r_2e^{i(\varphi_2-\vartheta_2)})d\mu(\vartheta_1,\vartheta_2),$$

где $r_1e^{i\varphi_1}=z_1,\ r_2e^{i\varphi_2}=z_2$. Отсюда

$$|\mathrm{Re}\ f_\omega(r_1e^{i\varphi_1},r_2e^{i\varphi_2})|\le\int\limits_{\mathbb{T}^2}P(r_1e^{i(\varphi_1-\vartheta_1)})P(r_2e^{i(\varphi_2-\vartheta_2)})|d\mu(\vartheta_1,\vartheta_2)|. \tag{2.6}$$

Проинтегрировав неравенство (2.6) и применив теорему Фубини, получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathrm{Re}f_\omega(r_1e^{i\varphi_1};r_2e^{i\varphi_2})|d\varphi_1d\varphi_2\le$$
$$\le\int\limits_{\mathbb{T}^2}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(r_1e^{i(\varphi_1-\vartheta_1)})P(r_2e^{i(\varphi_2-\vartheta_2)})d\varphi_1d\varphi_2\right\}d\mu(\theta_1,\theta_2)=$$
$$=4\pi^2\int\limits_{\mathbb{T}^2}|d\mu(\theta_1,\theta_2)|<+\infty,$$

т. е. функция f принадлежит классу A_ω. Теорема доказана. □

В частном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, теорема 3 является аналогом теоремы Герглотца для полуаналитических функций.

Т е о р е м а 4. *Для того, чтобы ассоциированная с мерой* μ *функция*

$$f(z_1,z_2)=if(0,0)+\int\limits_{\mathbb{T}^2}\widetilde{S}(z_1e^{-i\vartheta_1},z_2e^{-i\vartheta_2};\omega)d\mu(\vartheta_1,\vartheta_2) \tag{2.7}$$

была бы аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2}e^{-in\theta_1}e^{ik\theta_2}d\mu(\theta_1,\theta_2)=0\quad(n,k=1,2,\ldots). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (1.5) ядра $\widetilde{S}$ имеем

$$\widetilde{S}(z_1e^{-i\vartheta_1},z_2e^{-i\vartheta_2};\omega)=S(z_1e^{-i\theta_1};\omega_1)P(z_2e^{-i\theta_2};\omega_2)+iQ(z_2e^{-i\theta_2};\omega_2)=$$
$$=2\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{z_1^ne^{-in\theta_1}}{\Delta_1(n)}-1\right)\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{z_2^ke^{-ik\theta_2}}{\Delta_2(k)}+\sum_{k=0}^\infty\frac{\overline{z}_2^ke^{ik\theta_2}}{\Delta_2(k)}-1\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^\infty\frac{z_2^ke^{-ik\theta_2}}{\Delta_2(k)}-\sum_{k=0}^\infty\frac{\overline{z}_2^ke^{ik\theta_2}}{\Delta_2(k)}=$$
$$=2\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty\frac{z_1^nz_2^ke^{-in\theta_1}e^{-ik\theta_2}}{\Delta_1(n)\Delta_2(k)}+2\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty\frac{z_1^n\overline{z}_2^ke^{-in\theta_1}e^{ik\theta_2}}{\Delta_1(n)\Delta_2(k)}-1. \tag{2.9}$$

Это разложение сходится равномерно относительно $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in \mathbb{T}^2$ при любом фиксированном $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$. Подставляя в (2.7) разложение (2.9), получим

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_1^n z_2^k + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,-k} z_1^n \overline{z}_2^k - \frac{a_0}{2}, \tag{2.10}$$

где

$$a_{n,k} = \frac{2}{\Delta_1(n)\Delta_2(k)} \int\limits_{\mathbb{T}^2} e^{-in\theta_1} e^{-ik\theta_2} d\mu(\theta_1, \theta_2) \tag{2.11}$$

$(n = 0, 1, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Из разложения (2.10) ясно, что функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в том и только в том случае, если

$$a_{n,-k} = 0 \quad (n, k = 1, 2, \ldots). \tag{2.12}$$

Условия (2.12) с учетом (2.11) эквивалентны (2.8). Теорема доказана. □

Пусть функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в бидиске $\mathbb{D}^2$. Величину

$$T_\omega(r_1, r_2; f) = \frac{1}{4\pi_2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L^\omega_{(+)} \left\{ \log|f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \right\} d\theta_1 d\theta_2,$$

где $L^\omega_{(+)}\{\varphi(r)\} = \max[0, L^\omega\{\varphi(r)\}]$, по аналогии с одномерным случаем назовем ω-характеристикой функции $f(z_1, z_2)$. Обозначим через N°_ω множество функций, аналитических в $\mathbb{D}^2$ и не обращающихся в нуль, которые имеют ограниченную характеристику, т. е. для которых выполняется условие

$$\sup_{0<r_1,r_2<1} T_\omega(r_1, r_2; f) < +\infty.$$

Т е о р е м а 5. *Класс* N°_ω *совпадает с множеством всех функций* $f(z_1, z_2)$, *представимых интегральной формулой*

$$f(z_1, z_2) = \exp\left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^2} \widetilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1, \theta_2) \right\}, \tag{2.13}$$

где $\operatorname{Im} C = 0$, μ *— конечная мера на* $\mathbb{T}^2$, *удовлетворяющая условию (2.8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ аналитична и не обращается в нуль в бидиске $\mathbb{D}^2$. Тогда функция $\log f(z_1, z_2)$ регулярна в $\mathbb{D}^2$. Покажем, что условия

$$\sup_{0<r_1,r_2<1} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L^\omega_{(+)} \left\{ \log|f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \right\} d\theta_1 d\theta_2 < +\infty \tag{2.14}$$

и

$$\sup_{0<r_1,r_2<1} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| L^\omega \left\{ \log |f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \right\} \right| d\theta_1 d\theta_2 < +\infty \tag{2.15}$$

эквивалентны. Написав формулу (1.6) для функции $\log|f(z_1,z_2)|$ и подставив $z_1 = z_2 = 0$, получим

$$\log|f(0,0) = i \arg f(0,0) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L^\omega \left\{ \log |f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})| \right\} d\theta_1 d\theta_2. \tag{2.16}$$

Используя очевидное равенство

$$L^\omega\{\varphi(r)\} = 2L^\omega_{(+)}\{\varphi(r)\} - |L^\omega\{\varphi(r)\}|,$$

из соотношения (2.16) получаем

$$\log|f(0,0) = i \arg f(0,0) + \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L^\omega_{(+)} \left\{ \log |f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})| \right\} d\theta_1 d\theta_2 -$$
$$- \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |L^\omega \left\{ \log |f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})| \right\} | d\theta_1 d\theta_2.$$

Отсюда ясно, что условия (2.14) и (2.15) выполняются одновременно. По теореме 3 функция $\log f(z_1,z_2)$ представляется интегралом

$$\log f(z_1,z_2) = iC + \int\limits_{\mathbb{T}^2} \widetilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega) d\mu(\theta_1,\theta_2) \tag{2.17}$$

в том и только в том случае, если выполнено условие (2.15), которое, по доказанному выше, эквивалентно (2.14), т. е. если $f \in N^\circ_\omega$. Из (2.17) очевидным образом следует (2.13). Так как функция $\log f(z_1,z_2)$ аналитична, то, в силу теоремы 4, соответствующая мера μ удовлетворяет условию (2.8). □

Отметим, что в теореме 3 дано интегральное представление по существу произвольных полуаналитических функций. Это следует из того, что класс A_ω можно сделать сколь угодно широким, выбрав соответствующим образом функцию ω. Точнее, справедлива следующая

Т е о р е м а 6. *Для произвольной полуаналитической функции f существует функция $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ такая, что $f \in A_\omega$.*

Доказательство этой теоремы идентично доказательству для одномерного случая, приведенного в [6].

В заключение автор выражает благодарность профессору М.М. Джрбашяну за полезные обсуждения и внимание к работе.

Институт Математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1973

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Երկգլանում ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացման մասին (ամփոփում)

$\mathbb{C}^2$ տարածության մեջ երկգլանում որոշված կիսաանալիտիկ ֆունկցիաների համար ստացված է Հերգլոտցի թեորեմայի, ինչպես նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի որոշ արդյունքների անալոգը:

A. I. PETROSYAN. On integral representation of functions in bicylinder (summary)

Analogues of Herglotz's theorem as well as some results of M. M. Djrbashian for semi-analytic functions in the bicylinder of the $\mathbb{C}^2$ space are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Bergman.* The kernel function and conformal mappings,Amer. Math. Soc., 1970, 214–215.
2. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, №5, 1968, 1075–1111.
3. *И. И. Баврин.* Обобщенные интегральные представления в случае полицилиндра, ДАН СССР, 196, №1, 1971, 9–11.
4. *Б. В. Шабат.* Введение в комплексный анализ, Изд. «Наука», 1969, стр. 478.
5. *Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, том 1, Изд. ИЛ, 1962, стр. 459.
6. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121), вып. 4, 1969, 517–615.