ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս.Գ.ԱՖՅԱՆ Ա.Վ.ՊՈՂՈՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ-2001

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

Այնպիսի հավասարումը, որը կապ է ստեղծում $x_1, x_2, ...x_n$ անկախ փոփոխականների, $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ որոնելի ֆունկցիայի և նրա մասնակի ածանցյալների միջև՝ կոչվում է *մասնակի ածանցյալներով հավասարում*, այսինքն, այն հետևյալ տեսքի հավասարում է

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \cdots, u_{x_nx_n}, \cdots) = 0, \quad (1)$$

որտեղ F-ը հայտնի ֆունկցիա է:

(1) հավասարման մեջ մասնակցող ամենաբարձր կարգի ածանցյալի կարգը՝ կոչվում է այդ հավասարման կարգ: Օրինակ, առաջին կարգի x_1 և x_2 անկախ փոփոխականներով ամեն մի հավասարում ունի հետևյալ տեսքը

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0,$$

երկրորդ կարգինը՝

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2}) = 0 :$$

(1) տեսքի հավասարումը կոչվում է *քվազիգծային* հավասարում, եթե այն գծային է միայն ամենաբարձր կարգի ածանցյալների նկատմամբ: Օրինակ,

$$A(x_1,x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2})u_{x_1x_1} + B(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2})u_{x_1x_2}+ \\ + C(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2})u_{x_2x_2} = D(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) :$$

Մասնակի ածանցյալներով հավասարումը կոչվում է *գծային հավասարում*, եթե այն գծային է որոնելի ֆունկցիայի և նրա բոլոր ածանցյալների նկատմամբ: Օրինակ,

$$A(x, y)u_{xx}+2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy}+ \\ + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y)$$

հավասարումը գծային երկրորդ կարգի հավասարում է $u(x,y)$ անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ:

Մասնակի ածանցյալներով *հավասարման լուծում* կոչվում է ամեն մի ֆունկցիա, որը և իր ածանցյալները տեղադրելով համապատասխանաբար որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների փոխարեն՝ հավասարումը դառնում է նույնություն անկախ փոփոխականների նկատմամբ (այն բազմության վրա, որտեղ տրված է հավասարումը):

1. Պարզել՝ հանդիսանու՞մ են արդյոք ստորև բերված հավասարումները մասնակի ածանցյալներով հավասարումներ, թե ոչ

ա. $\cos(u_x+u_y)-\cos u_x\cos u_y+\sin u_x\sin u_y=0$:
բ. $u_{xx}^2+u_{yy}^2-(u_{xx}-u_{yy})^2=0$:
գ. $\sin^2(u_{xx}+u_{xy})+\cos^2(u_{xx}+u_{xy})-u=1$:
դ. $\sin(u_{xy}+u_x)-\sin u_{xy}\cos u_x-\cos u_{xy}\sin u_x+2u=0$:
ե. $(tgu)_x-u_x sec^2u-3u+2=0$:
զ. $log|u_xu_y|-log|u_x|-log|u_y|+5u-6=0$:

2. Պարզել հավասարումների կարգը

ա. $log|u_{xx}u_{yy}|-log|u_{xx}|-log|u_{yy}|+u_x+u_y=0$:
բ. $u_xu_{xy}^2+(u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_y)^2-2xy=0$:
գ. $\cos^2u_{xy}+\sin^2u_{xy}-2u_x^2-3u_y+u=0$:
դ. $2(u_x-2u)u_{xy}-((u_x-2u)^2)_y-xy=0$:
ե. $(u_{yy}^2-u_y)_x-2u_{yy}(u_{xy}-u_x)_y-2u_x+2=0$:
զ. $2u_{xx}u_{xxy}-((u_{xx}-u_y)^2)_y-2u_yu_{xxy}+u_x=0$:

3. Պարզել, թե հետևյալ հավասարումներից որոնք են գծային (համասեռ կամ անհամասեռ) և որոնք ոչգծային (քվազիգծային)

ա. $u_xu_{xy}^2+2xuu_{yy}-3xyu_y-u=0$:
բ. $u_yu_{xx}-3x^2uu_{xy}+2u_x-f(x,y)u=0$:
գ. $2\sin(x+y)u_{xx}-x\cos yu_{xy}+xyu_x-3u+1=0$:
դ. $x^2yu_{xxy}+2e^xy^2u_{xy}-(x^2y^2+1)u_{xx}-2u=0$:

ե. $3u_{xy} - 6u_{xx} + 7u_y - u_x + 8x = 0$:

զ. $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$:

է.. $a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x +$
$+e(x,y)u_y + h(x,y) = 0$:

ը. $a(x,y,u_x,u_{xy})u_{xyy} + b(x,y,u_{yy})u_{yyy} + 2uu_{xy}^2 - f(x,y) = 0$:

թ. $u_{xy} + u_y + u^2 - xy = 0$:

ժ. $u_{xy} + 2(u_x^2 + u)_x - 6x\sin y = 0$:

ի. $2xu_{xy} - 6(u^2 - xy)_x + u_{yy} = 0$:

լ. $(yu_y + u_x^2)_y - 2u_xu_{xy} + u_x - 6u = 0$:

Գ Լ ՈՒ Խ I
ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ ԵՎ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՏԵՍՔԻ ԲԵՐՈՒՄԸ

§1. Առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներով հավասարումներ: Կոշիի խնդիր

1. Առաջին կարգի գծային հավասարման՝

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b \tag{1}$$

բոլոր լուծումները, որոշ մասնավոր դեպքերում, կարելի է գտնել հետևյալ ձևով: Դիցուք հնարավոր է գտնել

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}$$

սովորական ածանցյալներով հավասարումների համակարգի n հատ գծորեն անկախ

$$\varphi_1(x_1, \cdots, x_n, z) = C_1, \cdots, \varphi_n(x_1, \cdots, x_n, z) = C_n \tag{2}$$

առաջին ինտեգրալները: Այդ դեպքում (1) հավասարման բոլոր լուծումները ստացվում են

$$F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = 0$$

հավասարումով, որտեղ F-ը կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

Մասնավորապես, եթե z փոփոխականը մտնում է առաջին ինտեգրալներից միայն մեկի մեջ՝ ասենք վերջինի, ապա (1) հավասարման *ընդհանուր լուծումը* գտնվում է հետևյալ հավասարումից

$$\varphi_n(x_1, \cdots, x_n, z) = f(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}), \tag{3}$$

որտեղ f-ը կամայական դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

2. Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար ամենակարևոր խնդիրներից մեկը՝ *Կոշիի խնդիրն* է՝

գտնել $F(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) = 0$ *հավասարման այնպիսի լուծում, որն անցնի տրված* l *կորով:*

Դիցուք պահանջվում է գտնել այն $z = z(x, y)$ մակերևույթը, կամ որ նույնն է, այն $z(x, y)$ ֆունկցիան, որը բավարարի

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \tag{4}$$

մասնակի ածանցյալներով հավասարմանը և այդ մակերևույթն անցնի

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t) \tag{5}$$

կորով: Սկզբում գտնում ենք

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}$$

համակարգի երկու անկախ առաջին ինտեգրալներ՝

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2 \tag{6}$$

և x, y, z փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով նրանց (5) արտահայտությունները, ստանում ենք հետևյալ երկու հավասարությունները

$$\Psi_1(t) = C_1, \quad \Psi_2(t) = C_2 :$$

Այնուհետև, նրանցից արտաքսելով t պարամետրը, ստացվում է $F(C_1, C_2) = 0$ արտահայտությունը: C_1-ի և C_2-ի փոխարեն տեղադրելով առաջին ինտեգրալների ձախ մասերը՝ ստանում ենք (4) հավասարման որոնելի լուծումը:

Դիտողություն: Որոշ դեպքերում հարմար է օգտվել հավասար կոտորակնե-րի հետևյալ հատկությունից՝ եթե

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

ապա կամայական $k_1, k_2, \cdots, k_n$ թվերի համար ճիշտ է՝

$$\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n} = t :$$

4. Գտնել հետևյալ հավասարումների ընդհանուր լուծումները

ա. $yz_x - xz_y = 0 :$
բ. $(x + 2y)z_x - yz_y = 0 :$
գ. $xu_x + yu_y + zu_z = 0 :$
դ. $(x - z)u_x + (y - z)u_y + 2zu_z = 0 :$
ե. $yz_x + xz_y = x - y :$
զ. $e^x z_x + y^2 z_y = ye^x :$
է. $2xz_x + (y - x)z_y = x^2 :$
ը. $xyz_x - x^2 z_y = yz :$
թ. $xz_x + 2yz_y = x^2 y + z :$
ժ. $(x^2 + y^2)z_x + 2xyz_y + z^2 = 0 :$
ի. $2y^4 z_x - xyz_y = x\sqrt{z^2 + 1} :$
լ. $x^2 zz_x + y^2 zz_y = x + y :$
խ. $yzz_x - xzz_y = e^z :$
ծ. $(z - y)^2 z_x + xzz_y = xy :$
կ. $xyz_x + (x - 2z)z_y = yz :$
հ. $yz_x + zz_y = \dfrac{y}{x} :$
ձ. $\sin^2 x\, z_x + tgzz_y = \cos^2 z :$
ղ. $(x + z)z_x + (y + z)z_y = x + y :$
ճ. $(xz + y)z_x + (x + yz)z_y = 1 - z^2 :$

մ. $(y+z)u_x + (z+x)u_y + (x+y)u_z = u$:

յ. $xu_x + yu_y + (z+u)u_z = xy$:

ն. $(u-x)u_x + (u-y)u_y - zu_z = x+y$:

5. Գտնել հավասարման այն լուծումը, որը կբավարարի նշված պայմանին

ա. $xz_x - yz_y = 0,\ z(x,1) = 2x$:

բ. $z_x + (2e^x - y)z_y = 0,\ z(0,y) = y$:

գ. $2\sqrt{x}z_x - yz_y = 0,\ z(1,y) = y^2$:

դ. $u_x + u_y + 2u_z = 0,\ u(1,y,z) = yz$:

ե. $xu_x + yu_y + xyu_z = 0,\ u(x,y,0) = x^2 + y^2$:

6. Գտնել այն մակերևույթը, որը բավարարում է տրված հավասարմանը և անցնում է տրված կորով

ա. $y^2 z_x + xyz_y = x,\ x = 0,\ z = y^2$:

բ. $xz_x - 2yz_y = x^2 + y^2,\ y = 1,\ z = x^2$:

գ. $xz_x + yz_y = z - xy,\ x = 2,\ z = y^2 + 1$:

դ. $tgxz_x + yz_y = z,\ y = x,\ z = x^3$:

ե. $xz_x - yz_y = z^2(x - 3y),\ x = 1,\ yz + 1 = 0$:

զ. $xz_x + yz_y = z - x^2 - y^2,\ y = -2,\ z = x - x^2$:

է. $yzz_x + xzz_y = xy,\ x = a,\ y^2 + z^2 = a^2$:

ը. $zz_x - xyz_y = 2zx,\ x + y = 2,\ yz = 1$:

թ. $zz_x + (z^2 - x^2)z_y = -x,\ y = x^2,\ z = 2x$:

ժ. $(y-z)z_x + (z-x)z_y = x - y,\ z = y = -x$:

ի. $xz_x + (xz + y)z_y = z,\ x + y = z,\ xz = 1$:

լ. $y^2 z_x + yzz_y = -z^2,\ x - y = 0,\ x - yz = 1$:

խ. $xz_x + zz_y = y,\ y = 2z,\ x + 2y = z$:

ծ. $(y + 2z^2)z_x - 2x^2 zz_y = x^2,\ x = z,\ y = x^2$:

կ. $(x-z)z_x + (y-z)z_y = 2z,\ x - y = 2,\ z2x = 1$:

հ. $xy^3 z_x + x^2 z^2 z_y = y^3 z,\ x - z^3,\ y = z^2$:

§2. Երկրորդ կարգի հավասարումների դասակարգումը

Երկրորդ կարգի քվազիգծային ամեն մի հավասարում ունի հետևյալ տեսքը

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,x_2,...,x_n)u_{x_ix_j}+ \\ +f(x_1,x_2,...,x_n,u,u_{x_1},...,u_{x_n})=0, \tag{1}$$

որտեղ a_{ij} գործակիցները R_n տարածության որևէ D տիրույթում տրված իրական ֆունկցիաներ են, ըստ որում $a_{ij} = a_{ji}$: Ֆիքսենք $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in D$ կետը և կազմենք հետևյալ քառակուսային ձևը՝

$$Q(t_1,t_2,...,t_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0,...,x_n^0)t_it_j : \tag{2}$$

Հայտնի է, որ կարելի է գտնել $t_1,t_2,...,t_n$ փոփոխականների այնպիսի

$$t_i=\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\tau_k,\ \ i=1,2,...,n$$

գծային չվերասերվող ձևափոխություն, որի միջոցով Q քառակուսային ձևը բերվի

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tau_i^2 \tag{3}$$

կանոնական տեսքի, որտեղ α_i գործակիցներից յուրաքանչյուրը $1,-1,0$ թվերից որևէ մեկն է: Q-ի (3) տեսքում բացասական և զրո գործակիցների քանակը կախված չէ կանոնական տեսքի բերող գծային ձևափոխությունից: Այս փաստի վրա է հիմնված (1) տեսքի հավասարումների դասակարգումը:

(1) հավասարումը D բազմության վրա անվանում են՝ **ա.** *էլիպտական,* **բ.***հիպերբոլական,* և **գ.** *պարաբոլական,* եթե D- ի յուրաքանչյուր կետում

քառակուսային ձևի կանոնական տեսքի ա. բոլոր n գործակիցները դրական են, կամ բոլորը բացասական են, բ. գործակիցներից $(n-1)$ հատը մի նշանի են, իսկ n-րդը հակառակ նշանի է, գ. գործակիցներից գոնե մեկը զրո է:

7. Պարզել հետևյալ հավասարումների տեսակը

ա. $u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} + u_x - u_y + 3u - xy^2 = 0$:

բ. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - u_x + u_y - 2u - x^2y = 0$:

գ. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u = 0$:

դ. $u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} - 4u_{yz} + 3u = 0$:

ե. $u_{xy} + u_{xz} - u_{yz} + 2u_x - 3u = 0$:

զ. $u_{xx} + 2u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{yz} - u_x + 2u_y - u = 0$:

է. $u_{xx} + 2u_{yy} + u_{zz} - 4u_{xy} + 2u_{yz} - xye^z = 0$:

ը. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0$:

թ. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + u_{zz} - u + xz^2 \cos y = 0$:

ժ. $5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz \sin y = 0$:

ի. $y^3u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$:

լ. $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0$:

խ. $(l + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$:

ծ. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$:

կ. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$:

հ. $u_{xx} signy + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$:

ձ. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - signy)u_{yy} = 0$:

ղ. $u_{xx} signy + 2u_{xy} + u_{yy} signx = 0$:

ճ. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$:

մ. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$:

§3. Մասնակի ածանցյալներով քվազիգծային երկու անկախ փոփոխականներով երկրորդ կարգի հավասարումների բերումը կանոնական (շիտակ) տեսքի

Դիցուք պահանջվում է

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (1)$$

քվազիգծային հավասարումը, որի A, B և C գործակիցները կախված են միայն x և y անկախ փոփոխականներից, բերել *կանոնական* տեսքի:

Կազմենք (1) հավասարման համապատասխանող

$$Q(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 \qquad (2)$$

քառակուսային ձևը: Նշանակենք այդ ձևի $B^2 - AC$ որոշիչը Δ-ով: Ըստ §2 -ի դասակարգման, (1) հավասարումը կոչվում է էլիպտական, հիպերբոլական կամ պարաբոլական, եթե համապատասխանաբար $(\Delta < 0)$, $(\Delta > 0)$ կամ $(\Delta = 0)$:

Դիտարկենք

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0 \qquad (3)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը նշված երեք դեպքերում:

ա. Երբ $\Delta = B^2 - AC < 0$ (էլիպտական դեպքը), (3) քառակուսի հավասարումը լուծելով $\dfrac{dy}{dx}$-ի նկատմամբ, եթե $A \neq 0$ (իսկ եթե $C \neq 0$ $\dfrac{dy}{dx}$-ի նկատմամբ), ստանում ենք

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{A} : \qquad (4)$$

Դիցուք $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = const$ այդ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է: Կատարելով անկախ փոփոխականների

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \qquad (5)$$

փոխարինումը, որի *յակոբիանը*

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0,$$

(1) հավասարումը բերվում է հետևյալ կանոնական տեսքի

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0 \tag{6}$$

բ. Երբ $\Delta = B^2 - AC > 0$ (հիպերբոլական դեպքը), (3) հավասարումը $\dfrac{dy}{dx}$-ի նկատմամբ ունենում է երկու իրական արմատներ՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{A} : \tag{7}$$

Դիցուք $\varphi(x, y) = const$ և $\psi(x, y) = const$ այդ հավասարումների ընդհանուր ինտեգրալներն են (դրանցով որոշվող կորերը կոչվում են (1) հավասարման *բնութագրիչներ*)։ Այս դեպքում (5) փոխարինումը (1) հավասարումը բերում է

$$v_{\xi\eta} + H(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0 \tag{8}$$

կանոնական տեսքի։ $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ նոր փոխարինումով (8) հավասարումը բերվում է հետևյալ կանոնական տեսքի՝

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + N(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta) = 0 \tag{9}$$

գ. Երբ $\Delta = B^2 - AC = 0$ (պարաբոլական դեպքը), (3) հավասարումը ունենում է մեկ արմատ՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} : \tag{10}$$

Դիցուք $\varphi(x, y) = const$ այդ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է, իսկ $\psi(x, y)$ կամայական ողորկ ֆունկցիա է որի և $\varphi(x, y)$-ի յակոբիանը հավասար չէ զրոյի: Կատարելով (5) փոխարինումը, (1) հավասարումը այս դեպքում կբերվի

$$v_{\eta\eta} + P(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0 \tag{11}$$

կանոնական տեսքի:

Նկատենք, որ, երբ (1) հավասարումը հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարում է, կանոնական տեսքի բերելուց հետո կարելի է այն ավելի պարզեցնել: Այսպես, օրինակ, կատարելով անհայտ ֆունկցիայի

$$v = e^{\lambda\xi + \mu\eta} w$$

փոխարինումը, այնուհետև հարմար ձևով ընտրելով λ և μ հաստատուն-ները, կարելի է հիպերբոլական և էլիպտական դեպքերում ազատվել w-ի առաջին կարգի ածանցյալներից, իսկ պարաբոլական դեպքում՝ w-ից և նրա առաջին կարգի որևէ մի ածանցյալից:

8. Հետևյալ հավասարումները բերել կանոնական տեսքի այնպիսի տիրույթներում, ուր պահպանված է դիտարկվող հավասարման տեսակը
ա. $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$:
բ. $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$:
գ. $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$:
դ. $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0$:
ե. $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x + ye^{\frac{y}{x}} = 0$:
զ. $xy^2 u_{xx} - 2x^2 y u_{xy} + x^3 u_{yy} - y^2 u_x = 0$:
է. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$:
ը. $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} - xu = 0$:
թ. $u_{xx} - 2x u_{xy} = 0$:
ժ. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0$:
ի. $yu_{xx} + u_{yy} = 0$:
լ. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$:
խ. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0$:
ծ. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$:

9. Բերել կանոնական տեսքի (և այնուհետև պարզեցնել) հետևյալ հավասարումները

ա. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$:
բ. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$:
գ. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$:
դ. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$:
ե. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$:
զ. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$:
է. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$:
ը. $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0$:
թ. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$:
ժ. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0$:
ի. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$:
լ. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0$:
խ. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x = 0$:
ծ. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} + u_x - 2u_y + u = 0$:

10. Բերել կանոնական տեսքի

ա. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$:
բ. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x -$
$-4u_y - 6u_z = 0$:
գ. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 4u_{yz} + u_{zz} + 2u_{xz} + 2u = 0$:
դ. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0$:
ե. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$:
զ. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0$:
է. $u_{xx} + 2u_{yy} + u_{zz} - 4u_{xy} = 0$:
ը. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + u_{zz} = 0$:
թ. $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 4u_{yz} + 5u_{zz} - 8u_{xz} = 0$:

Գ Լ ՈՒ Խ II
ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՏԵՍԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1. Հիպերբոլական տեսակի հավասարումների բերվող խնդիրներ

Ֆիզիկայի և մեխանիկայի շատ խնդիրներ բերվում են երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներով հավասարումների ուսումնասիրման: Օրինակ, տատանողական երևույթների ուսումնասիրումը (դա լինի առաձգական, ձայնային, էլեկտրամագնիսական և այլ) բերվում են, այսպես կոչված, *տատանումների հավասարման*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p\ grad\ u) - qu + F(x,t), \tag{1}$$

որտեղ $\rho,\ p,\ q$ գործակիցները նկարագրում են միջավայրի հատկություն-ները, իսկ $F(x,t)$-ն արտաքին գրգռման ինտենսիվությունն է:

Մասնավորապես

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u + F \tag{2}$$

հավասարումը նկարագրում է լարի փոքր լայնական տատանումները: Եթե $\rho = const$, ապա

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,\ f = \frac{F}{\rho},\ a^2 = \frac{T}{\rho} \tag{3}$$

հավասարումն անվանում են *միաչափ ալիքային հավասարում*.

(1) տեսքի հավասարումով է նկարագրվում նաև առաձգական ձողի փոքր երկայնական տատանումները

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t), \tag{4}$$

որտեղ $S(x)$-ը ձողի լայնական հատույթի մակերեսն է, իսկ $E(x)$-ը Յունգի մոդուլը:

Թաղանթի փոքր լայնական տատանումները նկարագրվում են

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F \tag{5}$$

հավասարումով: Եթե $\rho = const$, ապա (5)-ն անվանում են *երկչափ ալիքային հավասարում*.

Եռաչափ ալիքային հավասարումը

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F \tag{6}$$

նկարագրում է, օրինակ, ձայնի տարածումը համասեռ միջավայրում և էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածումը համասեռ ոչհաղորդիչ միջավայրում:

Ենթադրենք միջավայրում գոյություն ունի փոփոխական էլեկտրամագնիսական դաշտ: Նշանակենք $\mathbf{E}$(x,t)-ով էլեկտրական դաշտի լարվածությունը, $\mathbf{H}$(x,t)-ով մագնիսական դաշտի լարվածությունը, ε-ով և μ-ով դիէլեկտրիկ և մագնիսական թափանցելիությունները, $\rho(x)$-ով լիցքերի խտությունը, $\mathbf{I}$(x,t)-ով հաղորդականության հոսանքները: Այս մեծությունները բավարարում են *Մաքսվելի գծային հավասարումների համակարգին*

$$\begin{gathered} div(\varepsilon\,\mathbf{E}\,) = 4\pi\rho,\ div(\mu\,\mathbf{H}\,) = 0, \\ rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\,\mathbf{H}\,), \\ rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\,\mathbf{E}\,) + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{I}, \end{gathered}$$

որտեղ c-ն լույսի արագությունն է վակուումում:

m_0 զանգվածով ազատ ռելյատիվիստական մասնիկի $\varphi(x,t)$ ալիքային ֆունկցիան բավարարում է *Քլեյնի-Գորդոնի* հավասարմանը

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m_0^2\right)\varphi = 0:$$

հավասարմանը:

Տատանողական երևույթների լրիվ նկարագրության համար անհրաժեշտ է գիտենալ սկզբնական շեղումը և արագությունը *(սկզբնական պայմաններ)*, իսկ եթե տատանվող միջավայրը սահմանափակ է, նաև *եզրային տվյալներ*:

Ֆիզիկայի որևէ խնդիր մաթեմատիկորեն ձևակերպելու համար անհրաժեշտ է

ա. ընտրել ֆիզիկական երևույթը նկարագրող ֆունկցիան,

բ. գրել այն դիֆերենցիալ հավասարումը, որին բավարարում է նշված ֆունկցիան,

գ. ձևակերպել սկզբնական և եզրային պայմանները:

Լուծել հետևյալ խնդիրները

11. Մաթեմատիկորեն ձևակերպել S հաստատուն կտրվածքով և l երկարությամբ համասեռ առաձգական ձողի երկայնական տատանման խնդիրը՝ կամայական սկզբնական շեղումների և արագությունների դեպքում, երբ

ա. ձողի ծայրերը կոշտ ամրացված են,

բ. ձողի ծայրերը ազատ են,

գ. ձողի $x = 0$ և $x = l$ ծայրերին սկսած $t = 0$ պահից կիրառված են x առանցքով ուղղված համապատասխանաբար $F(t)$ և $\Psi(t)$ ուժերը,

դ. ձողի ծայրերը առաձգական ձևով ամրացված են, այսինքն՝ իրենց շեղումներին համեմատական դիմադրություններ են կրում,

ե. ձողի $x = 0$ ծայրը կոշտ ամրացված է, իսկ $x = l$ ծայրը կրում է արագությանը համեմատական դիմադրություն:

12. Համասեռ և առաձգական ծանր ձողի մի ծայրը կոշտ ամրացված է՝ ազատ անկում կատարող վերելակում, որը հասնելով v_0 արագության միանգամից կանգ է առնում: Ձևակերպել ձողի փոքր երկայնական տատանումների խնդիրը:

13. Ձևակերպել համասեռ և առաձգական ձողի երկայնական տատանումների խնդիրը, եթե ձողը հանդիպում է արագությանը համեմատական դիմադրության: Ձողի ծայրերը կոշտ ամրացված են, իսկ սկզբնական շեղումներն ու արագությունները կամայական են:

14. Ձևակերպել $S = S(x)$ փոփոխական լայնական հատույթով և l երկարությամբ համասեռ առաձգական ձողի երկայնական տատանումների խնդիրը, եթե սկզբնական պայմանները կամայական են: Դիտարկել հետևյալ դեպքերը

ա. ձողն ունի հատած կոնի ձև՝ կոշտ ամրացված հիմքերով,

բ. ձողի $x = 0$ ծայրը առաձգական ամրացված է, իսկ $x = l$ ծայրի միավոր մակերեսին կիրառված է $F(t)$ ուժ, որը ուղղված է ձողի երկայնքով:

15. Միևնույն S լայնական հատույթով երկու համասեռ առաձգական կիսաանվերջ ձողեր անմիջականորեն միացված են և կազմում են երկու կողմից անվերջ ձող: Ձևակերպել այդ ձողի երկայնական տատանումների խնդիրը, եթե ρ_1, E_1, ρ_2, E_2 ձողերի խտություններն ու Յունգի մոդուլներն են: Ձողերի լայնական հատույթների սկզբնական շեղումներն ու արագությունները համարել կամայական:

16. l երկարությամբ, համասեռ, գլանային ձողի $x = 0$ ծայրը ամրացված է, իսկ $x = l$ ծայրը ազատ է թողնված: $t = 0$ պահին M զանգվածով և v արագությամբ շարժվող բեռը հարվածում է ձողի ազատ ծայրին և կպչում է նրան: Ձևակերպել ձողի երկայնական տատանումների խնդիրը $t > 0$ պահին:

17. Ձևակերպել l երկարությամբ, $\rho = \rho(x)$ գծային խտությամբ և T լարումով լարի փոքր, լայնական տատանումների խնդիրը: Անտեսել ծանրության և դիմադրության ուժերը: Սկզբնական շեղումները և արագությունները համարել կամայական: Դիտարկել հետևյալ դեպքերը

ա. լարի ծայրերը առաձգականորեն ամրացված են,

բ. լարի ծայրերը ազատ են թողնված,

գ. լարի ծայրերին կիրառված են $F(t)$ և $\Phi(t)$ լայնական ուժեր:

18. l երկարությամբ և ρ հաստատուն խտությամբ առաձգական լարի ծայրերը կոշտ ամրացված են: Սկսած $t = 0$ պահից լարի վրա ազդում են հավասարաչափ բաշխված $F(x, t)$ գծային խտությամբ լայնական ուժեր:

Ձևակերպել $u(x,t)$ լայնական շեղումների որոշման եզրային խնդիրը $t > 0$ պահին:

19. Ձևակերպել լարի փոքր լայնական տատանումների եզրային խնդիրը, եթե տատանումները կատարվում են արագությանը համեմատական դիմադրություն ունեցող միջավայրում: Լարի ծայրերը կոշտ ամրացված են:

20. Ձևակերպել l երկարությամբ համասեռ, բարակ հաղորդալարի փոփոխական հոսանքի ուժը և լարումը որոշելու եզրային խնդիրը՝ անընդհատ բաշխված R օհմական դիմադրությամբ, C ունակությամբ, L ինքնինդուկցիայով և G արտահոսքով, եթե լարի մի ծայրը հողակցված է, իսկ մյուսին կիրառված է $F(t)$ էլեկտրաշարժիչ ուժ: Տրված են նաև $i(x,0) = f(x)$ և $v(x,0) = F(x)$ սկզբնական հոսանքը և լարումը:

21. l երկարությամբ, առաձգական, համասեռ գլանի լայնական հատույթները $t = 0$ պահին ստացել են փոքր պտույտներ: Լայնական հատույթները մնում են հարթ և չեն դեֆորմացվում՝ պտտվելով գլանի առանցքի շուրջ: Ձևակերպել լայնական հատույթների պտույտի անկյան որոշման եզրային խնդիրը $t > 0$ պահին: Դիտարկել

ա. ազատ թողնված,

բ. կոշտ ամրացված,

գ. առաձգական ամրացված

ծայրերի դեպքերը:

22. Համասեռ թաղանթը դադարի վիճակում համընկնում է (x,y) հարթության D տիրույթի հետ, որի եզրը L-ն է, ρ-ն նրա մակերևույթային խտությունն է, T-ն լարումը, $\varphi(x,y)$-ը և $\psi(x,y)$-ը թաղանթի (x,y) կետի սկզբնական շեղումը և արագությունն են: Ձևակերպել այդպիսի թաղանթի փոքր, լայնական տատանումների եզրային խնդիրը: Անտեսել ծանրության ուժը: Դիտարկել հետևյալ դեպքերը

ա. թաղանթի եզրը կոշտ ամրացված է,

բ. թաղանթի եզրը ազատ է թողնված,

գ. թաղանթի եզրին կիրառված է $F(x,y,t)$ $((x,y) \in L)$ լայնական ուժը,

դ. թաղանթի եզրը առաձգականորեն ամրացված է,

ե. թաղանթի եզրը կոշտ ամրացված է, իսկ թաղանթի վրա ազդում է $F(x, y, t)$ լայնական ուժը,

զ. թաղանթի եզրը կոշտ ամրացված է, իսկ տատանումները կատարվում են այնպիսի միջավայրում, որը շեղմանը համեմատական դիմադրություն է ցույց տալիս:

§2. Եզրային և Կոշիի խնդիրներ

Տատանողական պրոցեսները, որոշ սահմանափակումների դեպքում, նկարագրվում են

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_{tt} = 0 \tag{1}$$

հավասարումով: (1) հավասարման լուծումը ընդունված է անվանել *ալիք*, իսկ ինքը հավասարումը՝ *ալիքային*:

Քանի որ (1) հավասարմանը համապատասխանող $Q(\lambda)$ քառակուսային ձևն ունի

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \lambda_{n+1}^2$$

տեսքը, ապա այն հիպերբոլական տեսակի հավասարում է:

Ալիքային տեսության մեջ ամենակարևոր խնդիրներից մեկը *Կոշիի խնդիրն է*: Այն կայանում է հետևյալում.

գտնել (1) հավասարման $u(x, t)$ այնպիսի լուծում, որը բավարարի հետևյալ սկզբնական պայմաններին

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{2}$$

որտեղ φ և ψ-ն նախապես տրված ֆունկցիաներ են $x_1, x_2, \cdots, x_n$ փոփոխականներից:

Դիտարկենք Կոշիի խնդրի հետևյալ պարզագույն դեպքը $(n = 1)$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty : \end{aligned} \tag{3}$$

$f(x,t) \equiv 0$ դեպքում (3) խնդրի լուծումը տրվում է *Դալամբերի բանաձևով*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz : \tag{4}$$

Ընդհանուր դեպքում $(f(x,t) \neq 0)$ (3) խնդրի լուծումը կարելի է կառուցել *Դյուամելի եղանակով:* Համառոտ նկարագրենք այն: Դիցուք $v(x,t,\tau)$ ֆունկցիան հետևյալ խնդրի լուծումն է

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ v(x,\tau,\tau) &= 0, \quad v_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \tag{5}$$

որտեղ τ-ն որևէ դրական պարամետր է: Այդ դեպքում

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{6}$$

ֆունկցիան (3) խնդրի լուծումն է: $v(x,t,\tau)$ ֆունկցիան կարելի է կառուցել Դալամբերի բանաձևի օգնությամբ:

Կոշիի խնդրի լուծումը $n = 2$ դեպքում տրվում է *Պուասոնի բանաձևով*

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{K_t} \frac{\psi(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{K_t} \frac{\varphi(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}},$$

որտեղ K_t-ն $(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 \le t^2$ շրջանն է:

Կոշիի խնդրի լուծումը $n = 3$ դեպքում տրվում է *Կիրխհոֆի բանաձևով*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_t} \frac{\psi(y_1, y_2, y_3)}{t} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_t} \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3)}{t} d\sigma,$$

որտեղ S_t-ն $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = t^2$ սֆերան է :

23. Լուծել Կոշիի խնդիրները

ա. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,\ u(x,0) = 3x^2,\ u_y(x,0) = 0$:

բ. $u_{xx} - u_{yy} + 5u_x + 3u_y + 4u = 0,$
$u(x,0) = xe^{-\frac{5}{2}x - x^2},\ u_y(x,0) = e^{-\frac{5}{2}x}$:

գ. $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0,\ u(x,x) = \sin x,\ u_y(x,x) = \cos x$:

դ. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} + u_x + (1 + \cos x - \sin x)u_y = 0,$
$u(x, \sin x) = \cos x,\ u_y(x, \sin x) = \sin x$:

ե. $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0,$
$u(x,0) = x^2,\ u_y(x,0) = x \sin x$:

զ. $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,\ u(0,y) = 2ye^y,\ u_x(0,y) = 2e^y$:

է. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$
$u(x, \sin x) = x + \cos x,\ u_y(x, \sin x) = \sin x$:

ը. $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y = 0,$
$u(x, -\cos x) = 1 + 2\sin x,\ u_y(x, -\cos x) = \sin x$:

թ. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0,$
$u(x,0) = x + xe^{-\frac{x}{2}},\ u_y(x,0) = e^{-\frac{x}{2}}$:

ժ. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0,$
$u(x, -\sin x) = 0,\ u_y(x, -\sin x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin x$:

ի. $e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0,$
$u(x,0) = 1 - e^{2x},\ u_y(x,0) = 3$:

լ. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0,\ u(x,0) = -\dfrac{x^2}{2},\ u_y(x,0) = -\sin x$:

խ. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0,$
$u(x, \cos x) = \sin x,\ u_y(x, \cos x) = e^{\frac{x}{2}}$:

ծ. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_y(x,0) = -e^{3x}$:

կ. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0,$
$u(0,y) = 0,\ u_x(0,y) = -e^{-\frac{y}{2}}$:

24. Ցույց տալ, որ

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \mu(x_1, \cdots, x_n) + \right. \\ \left. + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \nu(x_1, \cdots, x_n) \right) \tag{7}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է (1) հավասարման լուծում, եթե μ և ν ֆունկցիաները անվերջ դիֆերենցելի են, իսկ (7) շարքը կարելի է երկու անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցել: Δ-ն Լապլասի օպերատորն է $x_1, \cdots, x_n$ փոփոխականներից:

25. Օգտվելով (7) բանաձևից լուծել Կոշիի խնդիրները՝ (1) հավասարման համար, եթե

ա. $u(x,0) = x_1^3 x_2^2,\ u_t(x,0) = x_1^2 x_2^4 - 3x_1^3$:

բ. $u(x,0) = x_1 x_2 x_3,\ u_t(x,0) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$:

գ. $u(x,0) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ u_t(x,0) = x_1 x_2$:

դ. $u(x,0) = e^{x_1} \cos x_2,\ u_t(x,0) = x_1^2 - x_2^2$:

ե. $u(x,0) = x_1^2 + x_2^2,\ u_t(x,0) = 1$:

զ. $u(x,0) = e^{x_1},\ u_t(x,0) = e^{-x_1}$:

է. $u(x,0) = \frac{1}{x_1},\ u_t(x,0) = 0,\ x_1 \neq 0,\ x_1^2 \neq t^2$:

26. Ցույց տալ, որ

$$u(x,t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{(t-\tau)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\mu(x_1,\cdots,x_n,\tau)+ \\ +\frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x_1,\cdots,x_n,\tau)\Bigg) \tag{8}$$

ֆունկցիան, որտեղ Δ-ն Լապլասի օպերատորն է $x_1,\cdots,x_n$ փոփոխականներից, իսկ μ և ν ֆունկցիաները անվերջ դիֆերենցելի են, հանդիսանում է

$$u_{tt}=\Delta u$$

$$u(x,\tau,\tau)=\mu(x,\tau),\ u_t(x,\tau,\tau)=\nu(x,\tau)$$

խնդրի լուծում, եթե (8) շարքը կարելի է երկու անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցել:

27. Օգտվելով (7) և (8) բանաձևերից լուծել Կոշիի խնդիրները

ա. $u_{tt}=\Delta u+ax+bt,\ u(x,y,z,0)=xyz,\ u_t(x,y,z,0)=xy+z$:

բ. $u_{tt}=\Delta u+\dfrac{x}{1+t^2}e^y\cos z,$
$u(x,y,z,0)=z\sin(\sqrt{2}(x+y)),\ u_t(x,y,z,0)=0$:

գ. $u_{tt}=\Delta u+\dfrac{xt}{1+t^2},$
$u(x,y,z,0)=x\sin y,\ u_t(x,y,z,0)=y\cos z$:

դ. $u_{tt}=\Delta u+txy\sin az,$
$u(x,y,z,0)=az+bxy,\ u_t(x,y,z,0)=0$:

ե. $u_{tt}=\Delta u+axyze^{-bt},\ u(x,y,z,0)=2xy,$
$u_t(x,y,z,0)=x\sin(\sqrt{2}y)\cos(\sqrt{2}z)$:

զ. $u_{tt}=\Delta u+axyz\sin bt,\ u(x,y,z,0)=x^2yz^2,$
$u_t(x,y,z,0)=y\sin\omega xe^{\omega z}$:

է. $u_{tt}=\Delta u+xyzln(1+t^2),$
$u(x,y,z,0)=ye^x\sin z,\ u_t(x,y,z,0)=xz\sin y$:

ը. $u_{tt} = \Delta u + \dfrac{ayzt^3}{1+t^2},\ u(x,y,z,0) = xe^y,\ u_t(x,y,z,0) = ye^z$:

թ. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - xyt,\ u(x,y,0) = 0,\ u_t(x,y,0) = xy$:

ժ. $u_{tt} = \Delta u - xyt,$
$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z),\ u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z)$:

ի. $u_{tt} = \Delta u + f(x,y,z),\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z,),$
$u_t(x,y,0) = \psi(x,y,z),\ \Delta\varphi = 0,\ \Delta\psi = 0$:

լ. $u_{tt} = \Delta u + f(x,y,z)g(t),\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z),$
$u_t(x,y,0) = \psi(x,y,z),\ \Delta f = 0,$
$\Delta\varphi = 0,\ \Delta\psi = 0,\ g \in C^1(t \geq 0)$:

28. Օգտվելով Դալամբերի բանաձևից և Դյուամելի եղանակից, լուծել Կոշիի խնդիրները

ա. $u_{tt} = u_{xx} + bx^2,\ u(x,0) = e^{-x},\ u_t(x,0) = c\cos x$:

բ. $u_{tt} = u_{xx} + axt,\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \sin x$:

գ. $u_{tt} = u_{xx} + ae^{-t},\ u(x,0) = b\sin x,\ u_t(x,0) = c\cos x$:

դ. $u_{tt} = u_{xx} + a\sin bt,\ u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = \sin x$:

ե. $u_{tt} = u_{xx} + x\sin t,\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = \cos x$:

29. Օգտվելով

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < \infty$$

խնդրի $u(x,t)$ լուծման Դալամբերի բանաձևից՝ ցույց տալ, որ

ա. եթե $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները կենտ են, ապա $u(0,t) = 0$,

բ. եթե $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները զույգ են, ապա $u_x(0,t) = 0$:

30. Ստուգել, որ

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty$$

Կոշիի խնդրի լուծումը բավարարում է հետևյալ հատկություններին՝

ա. $u(0,t) = 0$, եթե $f(x,t)$ ֆունկցիան կենտ է x փոփոխականի նկատմամբ, բ. $u_x(0,t) = 0$, եթե $f(x,t)$ ֆունկցիան զույգ է x փոփոխականի նկատմամբ:

31. Օգտվելով **29** և **30** խնդիրների պնդումներից, լուծել հետևյալ եզրային խնդիրները՝ տվյալները համապատասխան ձևով շարունակելով ամբողջ թվային առանցքի վրա

ա. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x^2,\ x > 0:$

բ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 1 - e^x,\ u_t(x,0) = shx,\ x > 0:$

գ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = x - e^x,\ u_t(x,0) = x^2,\ x > 0:$

դ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 1 + x^3,\ u_t(x,0) = x^2 e^{6x},\ x > 0:$

ե. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^x \cos t,\ x > 0,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ t > 0,\ x > 0,$

զ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \cos x,\ x > 0,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0,\ t > 0:$

է. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin x \sin t,\ x > 0,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0,\ t > 0:$

ը. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + te^x,\ x > 0,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0,\ t > 0:$

թ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + chxcht,\ x > 0,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = shx,\ u_t(x,0) = chx,\ x > 0:$

ժ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \cos x,\ x > 0,\ t > 0,$

$u(0,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = x^2,\ x > 0:$

ի. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin x \sin t,\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = x^2,\ x > 0:$

լ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + xe^t,\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = x - e^x,\ x > 0:$

32.Հետևյալ խնդիրներում լուծումը փնտրել $u(x,t) = f(x - at)$ տեսքով

ա. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$

$u(0,t) = \mu(t),\ t > 0,$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0:$

բ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = 0,\ x > 0,$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0,\ 0 < x < c \\ v_0,\ c < x < 2c: \\ 0,\ 2c < x \end{cases}$$

գ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0,$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0:$

դ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) - hu(0,t) = \chi(t),\ t > 0,\ h > 0$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0:$

ե. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) + hu_t(0,t) = 0,\ t > 0,$

$u(x,0) = u_t(x,0) = \omega,\ x > 0:$

զ. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$

$u(0,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=af^{'}(x),\ x>0$:

ե. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,$
$u_x(0,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=af^{'}(x),\ x>0$:

զ. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,$
$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=af^{'}(x),\ x>0$:

թ. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,$
$u_x(0,t)+hu_t(0,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=af^{'}(x),\ x>0$:

ժ. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,$
$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ t>0,$
$u_t(x,0)=0,\ x>0,$
$u(x,0)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{l},\ 0<x<l\\ 0,\ l<x\end{cases}$:

ի. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0\le x\le l,\ t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l},\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l$:

լ. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0\le x\le l,\ t>0,$
$u(0,t)=u_x(l,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=Ax,\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l$:

խ. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0\le x\le l,\ t>0,$
$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{l},\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l$:

ծ. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0\le x\le l,\ t>0,$
$u(0,t)=0,\ mlu_{tt}(l,t)=-a^2u_x(l,t),\ t>0,$
$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l,\ u_t(l,0)=-v$:

33. Լուծել եզրային խնդիրները

ա. $u_{tt}=a^2u_{xx}+x\cos t,\ x>0,\ t>0,$

$u(0,t) = \sin t,\ t > 0,$

$u(x,0) = \sin 2x,\ u_t(x,0) = e^x,\ x > 0$:

բ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + xt,\ x > 0,\ t > 0,$

$u(0,t) = t,\ t > 0,$

$u(x,0) = shx,\ u_t(x,0) = chx,\ x > 0$:

գ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + t\cos x,\ x > 0,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = sht,\ t > 0,$

$u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = \sin x,\ x > 0$:

34. Գտնել $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}$ հավասարման ընդհանուր լուծումը, եթե u ֆունկցիան կախված է միայն r $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$ և t փոփոխականներից:

35. Լուծել հետևյալ խնդիրը

$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ -\infty < x, y, z < +\infty,\ t > 0,$

$u(r,0) = \varphi(r),\ u_t(r,0) = \psi(r),\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ 0 \le r,$

և գտնել $\lim\limits_{x,y,z \to 0} u(x,y,z,t)$:

36. Լուծել

$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(r,t),\ 0 \le r < +\infty,\ t > 0,$

$u(r,0) = 0,\ u_t(r,0) = 0,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ 0 \le r,$

խնդիրը:

37. Լուծել

$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ -\infty < x, y, z < +\infty,\ t > 0,$

խնդիրը, հետևյալ սկզբնական պայմանների դեպքում

ա. $u(r,0) = \begin{cases} u_0,\ r \le r_0 \\ 0,\ r > r_0 \end{cases},$

$u_t(r,0) = 0$:

բ. $u_t(r,0) = \begin{cases} u_0,\ r \le r_0 \\ 0,\ r > r_0 \end{cases},$

$u(r,0) = 0$:

§3. Գուրսայի խնդիրը և նրա լուծումը: Ռիմանի ֆունկցիան: Կոշիի խնդրի ընդհանուր դրվածքը և նրա լուծումը Ռիմանի եղանակով

Դիտարկենք կանոնական տեսքի բերված երկու անկախ փոփոխականներով գծային հիպերբոլական տեսակի հետևյալ հավասարումը

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (1)$$

որտեղ $a,\ b,\ c$ և f-ը $D = (0,x_0)\times(0,y_0)$ ուղղանկյան $\overline{D}$ փակման վրա տրված անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Գուրսայի խնդիրը. Պահանջվում է $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ դասում գտնել այն $u(x,y)$ ֆունկցիան, որը բավարարի (1) հավասարմանը D ուղղանկյան մեջ և ընդունի նրա $y=0,\ 0\le x\le x_0$ և $x=0,\ 0\le y\le y_0$ կողմերի վրա տրված արժեքները՝

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ u(0,y)=\varphi_2(y): \qquad (2)$$

Ենթադրենք նաև, որ $\varphi_1\in C^1[0,x_0]$, $\varphi_2\in C[0,y_0]$ և $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$:

Թեորեմ: եթե $a,\ b,\ c$ և f ֆունկցիաներն անընդհատ են D-ի փակման վրա, $\varphi_1\in C^1[0,x_0]$, $\varphi_2\in C[0,y_0]$ և $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, ապա (1)-(2) Գուրսայի խնդիրը շիտակ է դրված:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ արտահայտությունը

$$L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu: \qquad (3)$$

Այս արտահայտության *համալուծ դիֆերենցիալ արտահայտություն* անվանում են

$$L^*(v) = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv: \qquad (4)$$

Սահմանում: $R(x,y;\xi,\eta)$ ֆունկցիան կոչվում է L դիֆերենցիալ արտահայտության *Ռիմանի ֆունկցիա*, եթե այն բավարարում է

$$L^*(R)=0 \tag{5}$$

հավասարմանը և $x=\xi$ ու $y=\eta$ բնութագրիչների վրա

$$R(\xi,y;\xi,\eta)=e^{\int_\eta^y a(\xi,y')dy'},\ R(x,\eta;\xi,\eta)=e^{\int_\xi^x a(x',\eta)dx'} \tag{6}$$

— պայմաններին:

$R(x,y;\xi,\eta)$-ի մեջ (x,y) կետը արգումենտի դեր է կատարում, իսկ (ξ,η) կետը՝ պարամետրի: (6) պայմաններից անմիջապես ստանում ենք ՝

$$R(\xi,y;\xi,\eta)=1,$$

$$R_y(\xi,y;\xi,\eta)=a(\xi,y)R(\xi,y;\xi,\eta),$$

$$R_x(x,\eta;\xi,\eta)=b(x,\eta)R(x,\eta;\xi,\eta)\,:$$

Վերը նշված թեորեմից հետևում է՝ Ռիմանի ֆունկցիայի գոյությունը և միակությունը, որպես (5)-(6) Գուրսայի խնդրի լուծում: Եթե L օպերատորն ինքնահամալուծ օպերատոր է, ապա Ռիմանի ֆունկցիան սիմետրիկ է՝

$$R(x,y;\xi,\eta)=R(\xi,\eta;x,y)\,:$$

Դիցուք ℓ-ը (x,y) հարթության մեջ ողորկ կորի մի աղեղ է, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

ա. ℓ-ը (1) հավասարման ամեն մի $x=const, y=const$ բնութագրիչների հետ հատվում է միայն մեկ կետում:

բ. ℓ-ի ցանկացած կետում տարած շոշափողը չունի (1) հավասարման բնութագրիչի ուղղություն:

Այսպիսի կորի հավասարումը կարելի է գրել և $y=g(x)$ և $x=h(y)$ տեսքերով:

Կոշիի խնդիրը դրվում է հետևյալ կերպ. պահանջվում է գտնել (1) հավասարման այնպիսի $u(x,y)$ լուծում (ℓ կորի շրջակայքում), որը բավարարի ℓ կորի վրա հետևյալ պայմաններին

$$u|_{\ell}=\varphi_0,\ u_y|_{\ell}=\varphi_1, \tag{7}$$

որտեղ φ_0 և φ_1-ը ℓ կորի վրա տրված ֆունկցիաներ են, համապատասխանաբար C^2 և C^1 դասերից:

(7) պայմանները հնարավորություն են տալիս գտնելու u_x ածանցյալը ℓ կորի կետերում: Հետևապես, u_y ածանցյալի փոխարեն ℓ կորի վրա կարելի է տալ u_x ածանցյալը: Եվ ընդհանրապես, (7)-ի երկրորդ պայմանի փոխարեն կարելի է ℓ կորի կետերում տալ u-ի ածանցյալը ըստ որևէ ուղղության, որը չի համընկնում շոշափողի ուղղության հետ:

Կոշիի խնդրի լուծման Ռիմանի եղանակը կայանում է հետևյալում.

Թեորեմ: Եթե a, b, c, a_x, b_y, f ֆունկցիաները անընդհատ են $\overline{D}$: $x_1 \le \xi \le x_2$, $y_1 \le \eta \le y_2$ ուղղանկյան վրա, $\varphi_0 \in C^2[x_1,x_2]$ և $\varphi_1 \in C^1[x_1,x_2]$, ապա (1) և (7) Կոշիի խնդրի լուծումը $C^1(\overline{D})$ դասում գոյություն ունի, միակն է և արտահայտվում է Ռիմանի հետևյալ բանաձևով

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\varphi_0(h(y))R(h(y),y;x,y)+\frac{1}{2}\varphi_0(x)R(x,g(x);x,y)+$$

$$+\int_{l_{xy}}\left[\left(\frac{R}{2}\omega-\frac{\varphi_0}{2}R_\xi+b\varphi_0R\right)d\xi-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{R}{2}\varphi_1-\frac{\varphi_0}{2}R_\eta+a\varphi_0R\right)d\eta\right]+\int_{G_{xy}}Rf\,d\xi d\eta,$$

որտեղ G_{xy}-ը և l_{xy}-ը $\xi=x$, $\eta=y$; $\xi=x^{'}=h(y)$, $\eta=y^{'}=g(x)$ բնութագրիչների միջև ընկած G տիրույթի և ℓ կորի համապատասխան մասերն են, իսկ $\omega(x)=\varphi_0^{'}(x)-\varphi_1(x)g^{'}(x)$:

38. Գտնել

$$L(u) = u_{tt} - a^2 u_{xx},\ a = const$$

օպերատորի Ռիմանի ֆունկցիան և նրա օգնությամբ լուծել

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$

խնդիրը:

39. Գտնել

$$L(u) = u_{tt} - a^2 u_{xx} \pm c^2 u,\ a = const$$

օպերատորի Ռիմանի ֆունկցիան և նրա օգնությամբ լուծել

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u + f(x,t),\ -\infty < x <,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$

խնդիրը:

40. Լուծել

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0,\ -\infty < x < \infty,\ 1 < y < \infty,$$

$$u(x,1) = \varphi(x),\ u_y(x,1) = \psi(x)$$

խնդիրը:

41. Հետևյալ հավասարումների համար լուծել Կոշիի

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u_x(0,t) = \psi(t)$$

և Գուրսայի

$$u(x,x) = \varphi(x),\ u(x,-x)\psi(x),\ x \geq 0,\ \varphi(0) = \psi(0)$$

խնդիրները:

ա. $u_{xx} - u_{tt} + au_x + \dfrac{a^2}{4}u = 0,\ a = const$:

բ. $u_{xx} - u_{tt} + bu_t - \dfrac{b^2}{4}u = 0,\ b = const$:

գ. $u_{xx} - u_{tt} + au_x + bu_t + \dfrac{a^2}{4}u - \dfrac{b^2}{4}u = 0,$
$a = const,\ b = const$:

42. Լուծել **41** խնդրի **ա,բ,գ** հավասարումները

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(x,x) = \psi(x),\ \varphi(0) = \psi(0)$$

պայմաններով:

43. Գտնել

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0, \end{cases}$$

հավասարումների համակարգի այն լուծումը, որի համար՝

ա. $u(x,0) = \varphi(x),\ v(x,0) = \psi(x)$:

բ. $u(x,x) = \varphi(x),\ v(x,-x) = \psi(x),\ x \geq 0$:

գ. $u(x,0) = \varphi(x),\ v(x,-x) = \psi(x),\ x \geq 0$:

դ. $u(x,0) = \varphi(x),\ v(x,x) = \psi(x),\ x \geq 0$:

ե. $u(x,0) = \varphi(x),$
$v(x,-\frac{x}{2}) = \psi(x),\ x \geq 0,\ \varphi(0) = 0,\ \psi(0) = 0$:

44. Ցույց տալ, որ

$au_x + v_y = 0,\ u_y + v_x = 0$

համակարգը կլինի հիպերբոլական տեսակի, այն և միայն այն դեպքում եթե $a > 0$ և լուծել այն

$$u\left(x, \frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \varphi(x),\ v\left(x, -\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \psi(x)$$

պայմանների դեպքում:

Գ Լ ՈՒ Խ III
ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ՏԵՍԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1. Պարաբոլական տեսակի հավասարումների բերվող խնդիրներ

Միջավայրում ջերմության տարածումը կամ դիֆուզիան նկարագրվում են *ընդհանուր դիֆուզիայի հավասարումով*

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div(p\ grad\ u) - qu + F(x,t): \tag{1}$$

Մասնավորապես, եթե $u(x,t)$ ֆունկցիան նկարագրում է միջավայրի ջերմաստիճանը $x = (x_1, x_2, x_3)$ կետում ժամանակի t պահին, ապա այն բավարարում է

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div(k\, grad\, u) + F(x,t) \tag{2}$$

ջերմության տարածման հավասարմանը, որտեղ $c(x), \rho(x), k(x)$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար միջավայրի խտությունը, տեսակարար ջերմունակությունը և ջերմահաղորդականության գործակիցն են միջավայրի x կետում: $F(x,t)$-ն ջերմության աղբյուրի ինտենսիվությունն է:

Եթե միջավայրը համասեռ է, այսինքն՝ c, ρ և k ֆունկցիաները նույնաբար հաստատուններ են, ապա (2)-ն ընդունում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f,\ a^2 = \frac{k}{c\rho},\ f = \frac{F}{c\rho} \tag{3}$$

տեսքը, որտեղ $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$: (3) հավասարումն անվանում են *ջերմահաղորդականության հավասարում:*

Ջերմության տարածումը լրիվին նկարագրելու համար անհրաժեշտ է գիտենալ միջավայրի սկզբնական ջերմաստիճանը (*սկզբնական պայման*) և միջավայրի *եզրային պայմանները*, եթե այն սահմանափակ է: (2), (3) հավասարումները և նրանց համապատասխանող եզրային պայմանները հանդիսանում են

ա. էներգիայի պահպանման օրենքի,

բ. պինդ մարմիններում ներքին ջերմահաղորդականության օրենքի (*Ֆուրիեի օրենքի*),

գ. պինդ մարմնի մակերևույթի և նրան շրջապատող միջավայրի միջև կատարվող ջերմափոխանակության օրենքի (*Նյուտոնի օրենքի*) հետևանքներ:

Միաչափ դեպքում Ֆուրիեի օրենքն արտահայտվում է

$$q = -\sigma\lambda\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

բանաձևով, որտեղ q-ն այն ջերմության քանակությունն է, որը միավոր ժամանակում անցնում է x առանցքի ուղղությամբ և նրան ուղղահայաց σ հարթության միջով, λ-ն ջերմահաղորդականության գործակիցն է: Վերջինը, ընդհանրապես կախված է մարմնի ֆիզիկական հատկություններից և u ջերմաստիճանից:

Նյուտոնի օրենքը արտահայտվում է

$$q = \sigma\alpha(u - u_0) \tag{5}$$

բանաձևով, որտեղ q-ն այն ջերմության քանակությունն է, որը միավոր ժամանակում անցնում է մարմնի σ մակերույթի միջով, u-ն մակերևույթի ջերմաստիճանն է, u_0-ն շրջակա միջավայրի ջերմաստիճանն է, իսկ α-ն ջերմափոխանակության գործակիցը:

Եթե $u(x,t)$ ֆունկցիան նկարագրում է մարմնի խտությունը x կետում ժամանակի t պահին, ապա այն բավարարում է

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div(D\ grad\ u) - qu + F(x,t) \tag{6}$$

դիֆուզիայի հավասարմանը, որտեղ $\rho(x),\ D(x),\ q(x)$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար միջավայրի ծակոտկենության, դիֆուզիայի և կլանման գործակիցներն են: Համապատասխան եզրային պայմաններում դիֆուզիայի ենթարկված նյութի քանակությունը և կոնցենտրացիան նույն դերն են կատարում, ինչ ջերմահաղորդականության եզրային պայմաններում ջերմության քանակությունը և ջերմաստիճանը: Մասնավորապես, դիֆուզիայի օրենքը (*Ներնստի օրենքը*) կարտահայտվի (4) բանաձևով, որտեղ $\lambda = D$ դիֆուզիայի գործակիցն է, իսկ q-ն այն նյութի քանակությունն է, որը միավոր ժամանակում դիֆուզիայի է ենթարկվում x առանցքի ուղղությամբ և նրան ուղղահայաց σ հարթության միջով: (5) բանաձևով արտահայտվում է *ծավալային միջնորմով կատարվող դիֆուզիայի օրենքը*:

Եթե m_0 զանգվածով քվանտային մասնիկը գտնվում է $V(x)$ պոտենցիալով արտաքին ուժային դաշտում, ապա նրա $\psi(x,t)$ ալիքային ֆունկցիան բավարարում է *Շրյոդինգերի հավասարմանը*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi,$$

որտեղ $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27}$ էրգ.վրկ Պլանկի հաստատունն է:

45. l երկարությամբ համասեռ ձողի կողմնային մակերևույթը ջերմամեկուսացված է, իսկ սկզբնական ջերմաստիճանը հավասար է $\varphi(x)$ -ի $(0 \le x \le l)$: Ձևակերպել $t > 0$ պահին ձողի $u(x,t)$ ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը, եթե

ա. ձողի ծայրերը ջերմամեկուսացված են,

բ. ձողի $x = 0$ և $x = l$ ծայրերը, սկսած $t = 0$ պահից, պահվում են $q(t)$ և $Q(t)$ ջերմաստիճաններում,

գ. $x = 0$ և $x = l$ ծայրերում կատարվում է ջերմափոխանակություն` արտաքին միջավայրի հետ, որը ձողի ծայրերում ունի $T_0(t)$ և $T_l(t)$ ջերմաստիճանները:

46. R շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող գունդը տաքացված է մինչև T ջերմաստիճան: Ձևակերպել գնդի ջերմաստիճանի որոշման եզրային խնդիրը, եթե ա. քիմիական ռեակցիայի հետևանքով, գնդի յուրաքանչյուր կետում կլանվում է ջերմության քանակություն, որը համեմատական է այդ կետում u ջերմաստիճանին, իսկ գնդի մակերևույթը ջերմամեկուսացված է,

բ. գնդում կան Q հաստատուն հզորությամբ ջերմային աղբյուրներ, իսկ նրա եզրում կատարվում է ջերմափոխանակություն՝ զրո ջերմաստիճան ունեցող միջավայրի հետ:

47. S հաստատուն լայնական հատույթով և l երկարությամբ խողովակում, որը լցված է ծակոտկեն նյութով, կատարվում է դիֆուզիա՝ սկզբնական $\varphi(x)$ կոնցենտրացիայով: Ձևակերպել $t>0$ պահին գազի կոնցենտրացիայի որոշման եզրային խնդիրը, համարելով, որ խողովակի մակերևույթը անթափանց է և

ա. $x=0$ ծայրում պահպանվում է $\mu(t)$ կոնցենտրացիա, իսկ $x=l$ ծայրը անթափանց է,

բ. $x=0$ ծայրում պահպանվում է գազի $q(t)$ հոսք, իսկ $x=l$ ծայրը փակված է ծակոտկեն միջնորմով, որտեղ կատարվում է գազափոխանակություն, ընդ որում, արտաքին միջավայրն ունի զրոյական կոնցենտրացիա:

48. S հաստատուն լայնական հատույթով և l երկարությամբ խողովակը լցված է գազով, որի սկզբնական կոնցենտրացիան $\varphi(x)$ է: Խողովակի մակերևույթը ծակոտկեն է և նրա միջով կատարվում է նյութափոխանակություն՝ $v(t)$ կենցենտրացիա ունեցող միջավայրի հետ: Ձևակերպել խողովակում գազի u կոնցենտրացիայի որոշման եզրային խնդիրը $t>0$ պահին, եթե

ա. գազի մասնիկները տրոհվում են (անկայուն գազ) և տրոհման արագությունը համեմատական է կոնցենտրացիայից քառակուսի արմատին,

բ. գազի մասնիկները բազմանում են uu_t արտադրյալին համեմատական արագությամբ:

49. Ձևակերպել ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը R շառավղով անվերջ գլանում, որի կողմնային մակերևույթը պահվում է զրոյական ջերմաստիճանում: $t=0$ պահին գլանը ունեցել է $\varphi(r)$ ջերմաստիճան:

50. Ձևակերպել ջերմաստիճանի որոշման եզրային խնդիրը R շառավղով և $2h$ բարձրությամբ գլանում, եթե նրա սկզբնական ջերմաստիճանը եղել է $\varphi(r, \theta, z)$, իսկ կողմնային մակերևույթը և հիմքերը պահվում են զրոյական ջերմաստիճանում:

51. Ձևակերպել ջերմաստիճանի որոշման եզրային խնդիրը R շառավղով համասեռ գնդում, եթե սկզբնական ջերմաստիճանը եղել է $\varphi(r)$, իսկ մակերևույթի ջերմաստիճանը $\psi(t)$ է:

52. Ձևակերպել ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը R շառավղով համասեռ գնդում, եթե սկզբնական ջերմաստիճանը եղել է $\psi(r, \theta, \varphi)$, իսկ մակերևույթը պահվում է զրոյական ջերմաստիճանում:

53. Ձևակերպել բարակ և համասեռ ուղղանկյուն թիթեղի ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը, եթե նրա եզրագիծը պահվում է զրոյական ջերմաստիճանում, իսկ սկզբնական ջերմաստիճանը՝ $\varphi(x, y)$:

54. Տրված է $2R$ հաստությամբ անսահմանափակ թիթեղ, որն ունի զրոյական ջերմաստիճան: Թիթեղը երկու կողմից տաքացվում է q հաստատուն ջերմային հոսքով: Ձևակերպել ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը թիթեղում:

55. Ձևակերպել ջերմաստիճանի որոշման խնդիրը խողովակում, որի սկզբնական ջերմաստիճանը $f(r, \varphi)$ է: Խողովակի ներքին և արտաքին շառավիղները համապատասխանաբար a և b են: Ներքին և արտաքին պատերը պահվում են զրոյական ջերմաստիճանում:

§2. Եզրային և Կոշիի խնդիրներ

Պարաբոլական տեսակի հավասարումների բնորոշ օրինակ է *ջերմահաղորդականության հավասարումը*

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_t = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) : \tag{1}$$

Դիցուք Q-ն $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ կետերի տարածության որևէ տիրույթ է, որը սահմանափակված է $t = T_0$ և $t = T_1$ հարթություններով ու այնպիսին է, որ ցանկացած $t = T$ հարթությամբ հատելիս, ստացվում է n-չափանի միակապ տիրույթ: S-ով նշանակենք Q տիրույթի կողմնային մակերևույթը (S-ը մասնավորապես կարող է լինել գլանային մակերևույթ), Ω-ով՝ ստորին հիմքը և Γ-ով՝ S-ի և Ω-ի միավորումը:

Առաջին եզրային (կամ Դիրիխլեի) խնդիրը կայանում է հետևյալում. գտնել $C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ դասին պատկանող այն $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ ֆունկցիան,որը Q տիրույթում բավարարի (1) հավասարմանը և եզրի Γ մասում համնկնի տրված $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ անընդհատ ֆունկցիայի հետ:

Երբ Ω-ն համնկնում է R^n տարածության հետ, դրվում է *երկրորդ եզրային խնդիրը*, որը կայանում է հետևյալում. գտնել սահմանափակ և $C^2(R^{n+1}) \cap C(\overline{R^{n+1}})$ դասին պատկանող (1) հավասարման այնպիսի լուծում, որը $t = 0$ հիպերհարթության վրա համնկնի տրված $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիայի հետ:

Դիտարկենք երկու անկախ փոփոխականների դեպքը

$$\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{gathered} \tag{2}$$

որտեղ $\varphi(x)$-ը անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է:

Հայտնի է, որ $f(x,t) \equiv 0$ դեպքում, (2) խնդրի լուծումը տրվում է

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{3}$$

տեսքով:

Ընդհանուր դեպքում $(f(x,t) \not\equiv 0)$, (2) խնդրի լուծումը կարելի է կառուցել Դյուամելի եղանակով: Համառոտ նկարագրենք այն: Եթե $w(x,t,\tau)$ ֆունկցիան

$$\begin{gathered} w_t = a^2 w_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ w(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \quad -\infty < x < +\infty \end{gathered} \tag{4}$$

խնդրի լուծումն է, որտեղ τ-ն դրական պարամետր է, ապա (2) խնդրի լուծումը տրվում է

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau \tag{5}$$

բանաձևով:

56. Ցույց տալ, որ (3) բանաձևով տրվող ֆունկցիան, որտեղ $\varphi(x)$-ը $(-\infty<x<+\infty)$ անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է, հանդիսանում է (2) խնդրի լուծում:

57. Ստուգել, որ

$$E(x,t)=\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{n}{2}}}e^{\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}{4(t-t_0)}\right]}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է (1) հավասարման լուծում:

($E(x,t)$ ֆունկցիան կոչվում է (1) հավասարման *հիմնարար լուծում*):

58. Ցույց տալ, որ (5) բանաձևով որոշվող ֆունկցիան հանդիսանում է (2) խնդրի լուծում, ուր

$$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi,$$

իսկ $f(x,t)$-ն անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է:

59. Լուծել հետևյալ խնդիրները՝ տվյալները համապատասխան ձևով շարունակելով ամբողջ թվային առանցքի վրա

ա. $u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<+\infty,\ t>0,$
$u(0,t)=0,\ t>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ 0<x<+\infty:$
բ. $u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<+\infty,\ t>0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

գ. $u_t = a^2 u_{xx} - hu,\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

դ. $u_t = a^2 u_{xx} - hu,\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

ե. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = 0,\ 0 < x < +\infty:$

զ. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = 0,\ 0 < x < +\infty:$

է. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

ը. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

թ. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

ժ. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < +\infty:$

60. Ցույց տալ, որ

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \tau(x_1, \cdots, x_n) \tag{6}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է (1) հավասարման լուծում, եթե $\tau \in C^\infty(R)$ և (6) շարքը կարելի է անդամ-առ-անդամ ածանցել մեկ անգամ ըստ t-ի, և երկու անգամ ըստ յուրաքանչյուր x_i-ի:

61. Դիցուք Q-ն (x,y,t) փոփոխականների տարածության մեջ` $t = 0, t = T > 0$ հարթություններով և $S: x^2 + y^2 = 1$ շրջանային գլանով սահմանափակված տիրույթն է: Օգտվելով (6) բանաձևից, գտնել Q-ում ռեգուլյար այնպիսի $u(x,y,t)$ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

հավասարմանը և հետևյալ եզրային ու սկզբնական պայմաններին

ա. $u|_S = -4t,\ u(x,y,0) = 1 - x^2 - y^2$:
բ. $u|_S = -32t^2 - 16t,\ u(x,y,0) = 1 - (x^2 + y^2)^2$:
գ. $u|_S = 1 + 4t,\ u(x,y,0) = 1 - x^2 - y^2$:
դ. $u|_S = e^{2t+\cos\varphi+\sin\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ u(x,y,0) = e^{x+y}$:
ե. $u|_S = 1 + 16t + 32t^2,\ u(x,y,0) = (x^2 + y^2)^2$:
զ. $u|_S = 1 + 36t + 288t^2 + 384t^3,\ u(x,y,0) = (x^2 + y^2)^3$:

62. Ստուգել, որ

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^k}{p^k k!} \Delta^k \tau(x,y)$$

ֆունկցիան, որտեղ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, իսկ $\tau(x,y)$-ը կամայական բազմանդամ է x և y փոփոխականներից, հանդիսանում է

$$u_{xx} + u_{yy} = pu_t,\ p = const$$

հավասարման լուծում:

63. Ցույց տալ, որ

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^{2k} \tau(x) \tag{7}$$

ֆունկցիան, որտեղ $\tau \in C^\infty(R^n)$, իսկ (7) շարքը կարելի է անդամ-առանդամ ածանցել չորս անգամ ըստ յուրաքանչյուր x_i փոփոխականի և մեկ անգամ ըստ t-ի, հանդիսանում է

$$\Delta\Delta u - u_t = 0 \tag{8}$$

հավասարման լուծում:

64. (1) հավասարման համար կառուցել Կոշիի խնդրի լուծումը՝ հետևյալ սկզբնական պայմանով

ա. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \sin lx_1$:
բ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \cos lx_1$:
գ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = chlx_1$:
դ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = shlx_1$:
ե. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \sin l_1x_1 \sin l_2x_2$:
զ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \sin lx_1 \cos l_2x_2$:
է. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \cos l_1x_1 \cos l_nx_n$:
ը. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \cos l_1x_1 \sin l_2x_2$:
թ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \sin l_1x_1 \sin l_2x_2 \cdots \sin l_nx_n$:
ժ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \sin l_1x_1 + \cos l_nx_n$:
ի. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = e^{l_1x_1}$:
լ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = e^{l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_nx_n}$:
խ. $u(x, y, 0) = x^2y + xy^2 + xy$:
ծ. $u(x, y, 0) = (x + y)^5$:
կ. $u(x, y, z, 0) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$:
հ. $u(x, y, z, 0) = (xyz)^2$:
ձ. $u(x, y, z, 0) = (xyz)^3$:
ղ. $u(x, y, z, 0) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$:
ճ. $u(x, y, z, 0) = x^3 + y^3 + z^3$:

65. Ցույց տալ, որ

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^{2k}\tau(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^{2k}\nu(x) \qquad (9)$$

ֆունկցիան, որտեղ $\nu, \tau \in C^{\infty}(R^n)$, իսկ (9) շարքերը կարելի է ցանկացած անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցել, հանդիսանում է

$$\Delta\Delta u - u_{tt} = 0 \qquad (10)$$

հավասարման լուծում:

66. Օգտվելով (7) բանաձևից, գտնել (8) հավասարման այնպիսի լուծումներ, որոնք բավարարեն **64** խնդրի **ա-ճ** պայմաններին:

67. Օգտվելով (9) բանաձևից, գտնել (10) հավասարման այնպիսի լուծումներ, որոնք բավարարեն հետևյալ պայմաններին

ա. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \sin x_1,\ u_t(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \cos x_1$:
բ. $u(x, y, z, 0) = (x^3 + y^3 + z^3)^2,\ u_t(x, y, z, 0) = x^2y^2z^2$:
գ. $u(x, y, z, 0) = (x + y + z)^3,\ u_t(x, y, z, 0) = (xyz)^3$:
դ. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = chlx_1,\ u_t(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = shmx_1$:
ե. $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = e^{ax_1},\ u_t(x, 0) = e^{bx_1}$:

Գ Լ ՈՒ Խ IV
ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՏԵՍԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1.Էլիպտական տեսակի հավասարման բերվող խնդիրներ

Ստացիոնար (ժամանակից անկախ) երևույթների նկարագրման ժամանակ, թե ալիքային (տես գլուխ 2), և թե դիֆուզիայի ընդհանուր (տես գլուխ 3) հավասարումները ստանում են հետևյալ տեսքը

$$-div(p\ grad\ u)+qu=F(x):\tag{1}$$

Եթե $p=const$ և $q=0$ ապա (1) հավասարումն

$$\Delta=-f,\ f=\frac{F}{p}\tag{2}$$

անվանում են *Պուասոնի հավասարում*, իսկ եթե նաև $f=0$ ապա

$$\Delta u=0\tag{3}$$

Լապլասի հավասարում: Ստացիոնար երևույթների լրիվ նկարագրության համար անհրաժեշտ է գիտենալ նաև միջավայրի եզրային պայմանները՝
առաջին սեռի եզրային պայմանը՝

$$u|_S=f_1,$$

երկրորդ սեռի եզրային պայմանը՝

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S=f_2,$$

երրորդ սեռի եզրային պայմանը՝

$$\frac{\partial u}{\partial n}+hu|_S=f_3:$$

Եթե ալիքային հավասարման մեջ արտաքին $f(x,t)$ գրգռումն ունի

$$f(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}$$

տեսքը, ապա $u(x,t)$ լուծումը փնտրելով $u(x)e^{i\omega t}$ տեսքով, $u(x)$ հավասարման համար կստանանք

$$\Delta u + k^2 u = -f(x),\ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

Հելմհոլցի հավասարումը: Հելմհոլցի հավասարման են բերվում, օրինակ, ցրման (դիֆրակցիայի) խնդիրները:

Եթե m_0 զանգվածով քվանտային մասնիկն ունի որոշակի E էներգիա, ապա նրա $\psi(x,t)$ ալիքային ֆունկցիան ունի

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$$

տեսքը, որտեղ $\psi(x)$-ը բավարարում է Շրյոդինգերի ստացիոնար հավասարմանը

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi = E\psi : \tag{2}$$

Եթե $V = 0$ (ազատ մասնիկ), ապա (2) հավասարումը վերածվում էՀելմհոլցի համասեռ հավասարման:

Ստացիոնար պրոցեսների դեպքում Մաքսվելի հավասարումները (տես գլուխ 2) վերածվում են *էլեկտրաստատիկայի*

$$div\ (\varepsilon\,\mathbf{E}) = 4\pi\rho,\ rot\ \mathbf{E} = 0$$

և մագնիտաստատիկայի

$$div\ (\mu\mathbf{H}) = 0,\ rot\ \mathbf{H} = \tfrac{4\pi}{c}\ \mathbf{I}$$

հավասարումների: Եթե $\varepsilon = const$, ապա էլեկտրաստատիկ պոտենցիալը բավարարում է Պուասոնի հավասարմանը

$$\Delta u = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho :$$

Լուծել հետևյալ խնդիրները

68. Օգտվելով Մաքսվելի հավասարումներից, ցույց տալ, որ էլեկտրաստատիկ դաշտի պոտենցիալը բավարարում է Պուասոնի հավասարմանը, որի աջ մասը համեմատական է ծավալային լիցքերի $\rho(x, y, z)$ խտությանը: Ձևակերպել հնարավոր եզրային պայմանները և տալ նրանց ֆիզիկական մեկնաբանումը:

69. Ցույց տալ, որ ստացիոնար մագնիսական դաշտի պոտենցիալը բավարարում է Լապլասի հավասարմանը:

70. Ցույց տալ, որ ստացիոնար էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը բավարարում է Լապլասի հավասարմանը: Ձևակերպել եզրային պայմանները՝

ա. հողակցված իդեալական հաղորդչի մակերևույթի վրա,

բ. դիէլեկտրիկի և հաղորդչի եզրի վրա:

71. Էլեկտրաստատիկ դաշտը, որը ստեղծվում է վերջավոր չափսեր ունեցող լիցքավորված հաղորդչի կողմից՝ կարելի է որոշել, եթե

ա. տրված է հաղորդչի պոտենցիալի արժեքը,

բ. տրված է հաղորդչի լիցքի մեծությունը:

Այս խնդիրները կոչվում են *էլեկտրաստատիկայի առաջին և երկրորդ հիմնական խնդիրներ*: Տալ այդ խնդիրների մաթեմատիկական ձևակերպումը:

72. Դուրս բերել ստացիոնար դիֆուզիայի հավասարումը՝ համասեռ, իզոտրոպ միջավայրում:

73. Ցույց տալ, որ անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար հոսանքի արագությունների պոտենցիալը բավարարում է Լապլասի հավասարմանը: Ձևակերպել եզրային պայմանը՝ պինդ մարմնի մակերևույթին, որը գտնվում է հեղուկում դադարի վիճակում:

§2. Հարմոնիկ ֆունկցիաներ և պարզագույն եզրային խնդիրներ

Էլիպտական տեսակի հավասարման պարզագույն օրինակ է

$$\Delta u = f$$

Պուասոնի հավասարումը, որտեղ

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} :$$

Պուասոնի հավասարման համապատասխան համասեռ հավասարումը կոչվում է *Լապլասի հավասարում*`

$$\Delta u = 0 :$$

Դիցուք $S \subset R^n$ որևէ փակ մակերևույթ է և D-ն նրանով սահմանափակված տիրույթն է: Կասենք, որ $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^m(D \cup S)$ դասին, եթե $u(x)$-ը անընդհատ է $D \cup S$-ում իր մինչև m-րդ կարգի մասնակի ածանցյալների հետ միասին: $C^0(D \cup S)$-ը $D \cup S$-ում անընդհատ ֆունկցիաների դասն է:

$u(x)$ $(x \in D \cup S)$ ֆունկցիան կոչվում է *ռեգուլյար,* եթե բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա. $u(x) \in C^0(D \cup S) \cap C^2(D)$,

բ. եթե D տիրույթն անսահմանափակ է, ապա $n = 2$ դեպքում $u(x)$-ը սահմանափակ է, իսկ $n > 2$ դեպքում` անվերջում ձգտում է զրոյի ոչ դանդաղ քան $\frac{1}{|x|^{n-2}}$-ը:

Լապլասի հավասարման ռեգուլյար լուծումները կոչվում են *հարմոնիկ ֆունկցիաներ:* Հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության մեջ կենտրոնական տեղ են գրավում *Դիրիխլեի և Նեյմանի եզրային խնդիրները:* Այդ խնդիրները նաև անվանում են առաջին և երկրորդ եզրային խնդիրներ:

Դիրիխլեի խնդիրը. գտնել D տիրույթում այնպիսի $u(x)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in S$$

եզրային պայմանին, որտեղ $\varphi(x)$-ը S-ի վրա տրված անընդհատ ֆունկցիա է:

Նեյմանի խնդիրը. գտնել $C^1(D \cup S)$ դասում այնպիսի $u(x)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x), \quad x \in S$$

եզրային պայմանին, որտեղ n-ը S-ի արտաքին նորմալն է, իսկ $\varphi(x)$-ը S-ի վրա տրված անընդհատ ֆունկցիա է:

Որպեսզի Նեյմանի խնդիրը լուծում ունենա անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_S \varphi(x) dS = 0 : \tag{1}$$

Եթե (1) պայմանը բավարարված է, ապա ասում են, որ Նեյմանի խնդիրը ճիշտ է դրված :

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ անալիտիկ ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը հանդիսանում են հարմոնիկ ֆունկցիաներ (համալուծ հարմոնիկ ֆունկցիաներ): Այս փաստով է պայմանավորված երկու անկախ փոփոխականներով հարմոնիկ ֆունկցիաների և մեկ կոմպլեքս փոփոխականով անալիտիկ ֆունկցիաների սերտ կապը:

74. Գտնել Լապլասի օպերատորի տեսքը
ա. բևեռային կոորդինատներում՝ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,
բ. գլանային կոորդինատներում՝ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$,
գ. սֆերիկ կոորդինատներում՝ $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$:

***

Որոշ խնդիրներ լուծելիս կարելի է օգտվել այն բանից, որ $u(x,y) = A(x^2-y^2)+Bxy+Cx+Dy$ բազմանդամը հանդիսանում է $u_{xx}+u_{yy} = 0$ հավասարման լուծում:

***

75. Գտնել $0 \le \rho < a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ շրջանում որոշված այնպիսի $u(\rho,\varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի հետևյալ եզրային պայմանին

ա. $u(a,\varphi) = A$:
բ. $u(a,\varphi) = A\cos\varphi$:
գ. $u(a,\varphi) = A + By$:
դ. $u(a,\varphi) = Axy$:
ե. $u(a,\varphi) = A + B\sin\varphi$:
զ. $u(a,\varphi) = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$:

76. Գտնել $0 \le \rho < a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ շրջանում որոշված այնպիսի $u(\rho,\varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի հետևյալ եզրային պայմանին: Նշել նաև ոչ ճիշտ դրված խնդիրները

ա. $u_\rho(a,\varphi) = A$:
բ. $u_\rho(a,\varphi) = Ax$:
գ. $u_\rho(a,\varphi) = A(x^2-y^2)$:
դ. $u_\rho(a,\varphi) = A\cos\varphi + B$:
ե. $u_\rho(a,\varphi) = A\sin\varphi + B\sin^3\varphi$:

77. Գտնել $0 \le \rho < a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ շրջանի դրսում որոշված այնպիսի $u(\rho,\varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի **75** խնդրի **ա-զ** եզրային պայմաններին:

78. Գտնել $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ շրջանի դրսում որոշված այնպիսի $u(\rho,\varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի **76** խնդրի **ա-ե** եզրային պայմաններին:

79. Գտնել $a < \rho < b$ օղակում որոշված այնպիսի $u(\rho,\varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի $u(a,\varphi) = u_1, \;\; u(b,\varphi) = u_2$ եզրային արժեքներին:

80. Գտնել $0 < \rho < a, 0 < \varphi < \alpha$ շրջանային սեկտորում այնպիսի $u(\rho, \varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի հետևյալ պայմաններին

$$u(a, \varphi) = \frac{u_0}{\alpha}\varphi,\ u(\rho, 0) = 0,\ u(\rho, \alpha) = u_0 :$$

81. Գտնել $y > 0$ կիսահարթության մեջ Լապլասի հավասարման այնպիսի լուծում, որն ընդունի հետևյալ եզրային արժեքները

$$u|_{x<0,\, y=0} = \varphi_1,\ u|_{x>0,\, y=0} = \varphi_2 :$$

82. Գտնել այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա

ա. $\rho = a$ շառավղով գնդում,

բ. $\rho = a$ շառավղով գնդից դուրս,

որը $\rho = a$ սֆերայի վրա ընդունի $u_0 = const$ արժեքը:

83. Գտնել $z = 0$ և $z = h$ հարթություններով սահմանափակված շերտում այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$u|_{z=0} = u_1,\ u|_{z=h} = u_2$$

եզրային պայմաններին:

84. Գտնել $0 < x < a,\ 0 < y < b$ ուղղանկյան մեջ այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա, որը բավարարի հետևյալ պայմաններին

$$u(x, 0) = u_1,\ u(x, b) = u_2,\ u_x|_{x=0,\, x=a} = 0 :$$

85. Գտնել $\Delta u = 1$ հավասարման այն լուծումը $\rho < a$ շրջանում, որի համար $u|_{\rho=a} = 0$:

86. Գտնել $\Delta u = \dfrac{aA}{2}$ հավասարման այն լուծումները $\rho < a$ շրջանում, որոնց համար

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a} = B :$$

87. Գտնել $\Delta u = A$ հավասարման այն լուծումները $a < \rho < b$ օղակում, որոնք բավարարում են հետևյալ եզրային պայմաններին

ա. $u|_{\rho=a} = u_1,\ u|_{\rho=b} = u_2,$

բ. $u|_{\rho=a} = u_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=b} = C,$

գ. $\dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a} = B,\ u|_{\rho=b} = C,$

88. Գտնել

ա. $\Delta u = 1,$

բ. $\Delta u = A\rho + B$

հավասարումների լուծումները $\rho < a$ գնդում, եթե

$$u|_{\rho=a} = 0$$

89. Գտնել

ա. $\Delta u = 1,$

բ. $\Delta u = A + \frac{B}{\rho}$

հավասարումների լուծումները $a < \rho < b$ սֆերիկ շերտում, եթե

$$u|_{\rho=a} = 0,\ u|_{\rho=b} = 0:$$

90. Որոշել ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխումը $a < \rho < b$ սֆերիկ շերտում, եթե $\rho = a$ սֆերան պահվում է u_1 ջերմաստիճանում, իսկ $\rho = b$-ն՝ u_2:

91. Դիցուք $u = u(x_1, \cdots, x_n)$-ը հարմոնիկ ֆունկցիա է ինչ որ տիրույթում: Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հարմոնիկ է, արդյոք, այդ նույն տիրույթում

ա. $u(x+h)$, $h = (h_1, \cdots, h_n)$-ը հաստատուն վեկտոր է,

բ. $u(\lambda h)$, λ-ն սկալյար հաստատուն է,

գ. $u(Cx)$, C-ն հաստատուն, օրթոգոնալ մատրից է,

դ. $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ $(n = 2),$

ե. $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ $(n > 2)$,

զ, $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3}$, $(n = 3)$,

է. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $(n = 2)$,

ը. $x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $(n = 2)$,

թ. $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2}$, $(n = 2)$,

ժ. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$, $(n = 2)$,

ի. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$, $(n = 2)$:

92. Գտնել k հաստատունի այն արժեքը, որի դեպքում տրված ֆունկցիան հարմոնիկ է

ա. $x_1^3 + kx_1x_2^2$,

բ. $x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2$,

գ. $e^{2x_1}chkx_2$,

դ. $\sin 3x_1 chkx_2$,

ե. $\dfrac{1}{|x|^k}$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $|x| \neq 0$:

93. Ցույց տալ, որ $u(x)$ հարմոնիկ ֆունկցիայի հետ միաժամանակ հարմոնիկ է նաև

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

ֆունկցիան՝ ամենուրեք, որտեղ այն որոշված է:

94. Դիցուք ρ-ն և φ-ն բևեռային կոորդինատներն են հարթության վրա: Ցույց տալ, որ $n \geq 0$ դեպքում

ա. $u(r,\varphi) = r^n \cos n\varphi,\ v(r,\varphi) = r^n \sin n\varphi$ ֆունկցիաները հարմոնիկ են ամբողջ հարթության վրա,

բ. $u(r,\varphi) = r^{-n} \cos n\varphi,\ v(r,\varphi) = r^{-n} \sin n\varphi,\ w(r) = lnr$ ֆունկցիաները հարմոնիկ են ամբողջ հարթության վրա՝ բացի կոորդինատների սկզբնակետից:

95. Ցույց տալ, որ $|z| < R$ շրջանում $u(x,y)$ հարմոնիկ ֆունկցիան ներկայացվում է որպես

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

շարքի գումար, որտեղ $r = |z|$, $\varphi = argz$, $z = x + iy$, իսկ a_k-ն և b_k -ն իրական հաստատուններ են:

96. Ցույց տալ, որ $|z| \le R$ շրջանից դուրս սահմանափակ հարմոնիկ $u(x,y)$ ֆունկցիան ներկայացվում է

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

բանաձևով, որտեղ $r = |z|$, $\varphi = argz$, $z = x + iy$, իսկ a_k-ն և b_k -ն իրական հաստատուններ են:

97. Ցույց տալ

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x_n^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \tau(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \nu(x_1, \cdots, x_{n-1}) \right) \tag{2}$$

ֆունկցիայի հարմոնիկությունը, եթե τ-ն և ν-ն կամայական անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, իսկ (2) շարքը կարելի է երկու անգամ ածանցել ըստ յուրաքանչյուր x_i փոփոխականի:

98. Ստուգել, որ

$$E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, \ n > 2 \\ -ln|x-y|, \ n = 2 \end{cases},$$

ֆունկցիան բավարարում է Լապլասի հավասարմանը ինչպես ըստ x, այնպես էլ ըստ y կետերի, եթե միայն $x \neq y$, որտեղ $|x-y|$-ը x և y n չափանի կետերի միջև հեռավորությունն է:

99. Օգտվելով (2) բաձևից լուծել

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \ u(x,y,0) = g(x,y), \ u_z(x,y,0) = h(x,y)$$

Կոշիի խնդիրը, երբ

ա. $g = x + 2y, \ h = 2x - y^2$:

բ. $g = xe^y, \ h = 0$:

գ. $g = xy + x^2, \ h = e^x + y$:

դ. $g = x\sin y, \ h = \cos y$:

ե. $g = x^3 + 2, \ h = 2x^2 - y$:

զ. $g = \cos 2x, \ h = x - 2\sin 2y$:

100. Ի՞նչ արժեք է հարկավոր վերագրել $u(a)$ -ին, որպեսզի $u(r)$-ը $K : a < r < b, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 < a < b < \infty$, օղակում լինի հարմոնիկ, $\bar{K}$-ում անընդհատ և $(a < c < b)$

ա. $u(c) = T_0, \ u(b) = T$:

բ. $u(c) = T, \ u_r(b) = U$:

գ. $u(c) = T, \ u_r(b) + hu(b) = W$:

դ. $u_r(c) = U, \ u(b) = T$:

101. Ի՞նչ արժեք է հարկավոր վերագրել $u(a)$ -ին և $u(b)$-ին, որպեսզի $u(r)$-ը $K : a < r < b, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 < a < b < \infty$ օղակում լինի հարմոնիկ, $\bar{K}$-ում անընդհատ և $(a < c < b, \ a < d < b)$

ա. $u(c) = T_0, \ u(d) = T_1$:

բ. $u_r(c) = U, \ u(d) = T$:

102. Ի՞նչ արժեք է հարկավոր վերագրել $u(b)$-ին, որպեսզի $u(r)$-ը $K : a < r < b,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 < a < b < \infty$ օղակում լինի հարմոնիկ, $\bar{K}$-ում անընդհատ և $(a < c < b)$

ա. $u(c) = T_0,\ u(a) = T$:

բ. $u(c) = T,\ u_r(a) = U$:

գ. $u(c) = T,\ u_r(a) - hu(a) = W$:

դ. $u_r(c) = U,\ u(a) = T$:

103. Ապացուցել Գուրսայի բանաձևը՝

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0,0) + iC,\ z = x + iy,\ (0,0) \in D,$$

որը հնարավորություն է տալիս D միակապ տիրույթում, առանց ինտեգրելու, վերականգնել $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան իր $u(x,y)$ իրական մասով՝ iC կեղծ հաստատունի ճշտությամբ:

104. Ցույց տալ $\varphi(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ֆունկցիայի անալիտիկությունը, եթե $u(x,y)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է:

105. Կորագիծ ինտեգրալի միջոցով վերականգնել $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան D միակապ տիրույթում, եթե հայտնի է նրա $u(x,y)$ իրական մասը

ա. $u = x^3 - 3xy^2$:

բ. $u = e^x \sin y$:

գ. $u = chy \sin x$:

106. Օգտվելով Կոշի-Ռիմանի $u_x(x,y) = v_y(x,y),\ u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ հավասարումների համակարգից, գտնել $u(x,y)$ ֆունկցիայի համալուծ հարմոնիկ- $v(x,y)$ ֆունկցիան, եթե

ա. $u = xy^3 - yx^3$:

բ. $u = e^y \sin x$:

գ. $u = shx \sin y$:

դ. $u = chx \cos y$:

ե. $u = shx \cos y$:

գ. $u = chx \sin y$:

107. Օգտվելով Կոշի-Ռիմանի $u_x(x,y) = v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ հավասարումների համակարգից, գտնել $u(x,y)$ հարմոնիկ ֆունկցիան, եթե

ա. $u_x = 3x^2y - y^3$:

բ. $u_y = e^x \cos y$:

գ. $u_x = e^x \sin y$:

դ. $u_y = x^2 - y^2 + x + y$:

ե. $u_x = xy + x^2 - y^2$:

108. **106** և **107** խնդիրները լուծել Գուրսայի բանաձևի օգնությամբ:

§3. Լապլասի հավասարման Դիրիխլեի և Նեյմանի խնդիրների Գրինի ֆունկցիաները

Սահմանում: Լապլասի հավասարման այն լուծումը, որը կախված է $r = |x - y|$ հեռավորությունից, կոչվում է *հիմնարար կամ տարրական լուծում:*

Այն ունի հետևյալ տեսքը

$$E(x,y) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x-y|}, & n = 2 \\ \\ \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} :$$

Լապլասի հավասարման $E(x,y)$ հիմնարար լուծումը $n = 3$ դեպքում կարելի է դիտել, որպես կամայական $y = (y_1, y_2, y_3)$ կետում էլեկտրաստատիկ դաշտի պոտենցիալ, որը ստեղծվում է $x = (x_1, x_2, x_3)$ կետում տեղադրված միավոր էլեկտրական լիցքով:

Սահմանում: $G(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է *Լապլասի հավասարման Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիա* D տիրույթում, եթե ` ա. $G(x,y)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել Լապլասի հավասարման հիմնարար $E(x,y)$ լուծման և $C(\bar{D})$ դասին պատկանող $g(x,y)$ հարմոնիկ ֆունկցիայի գումարի տեսքով՝ $G(x,y) = E(x,y) + g(x,y)$,

բ. D տիրույթի S եզրի վրա $G(x,y)$ ֆունկցիան հավասար է զրոյի:

Գրինի ֆունկցիայի սահմանումից բխում են նրա հետևյալ պարզագույն հատկությունները

ա. Գրինի ֆունկցիան հարմոնիկ է D տիրույթում ըստ x-ի, բացառությամբ y կետի,

բ. եթե Գրինի ֆունկցիան գոյություն ունի, ապա այն միակն է,

գ. Գրինի ֆունկցիան դրական է D տիրույթում,

դ. Գրինի ֆունկցիան սիմետրիկ է՝ $G(x,y) = G(y,x)$:

Դիցուք S փակ մակերևույթը բաժանում է R^n տարածությունը D^+ ներքին և D^- արտաքին տիրույթների: Գրինի ֆունկցիան ունի հետևյալ ֆիզիկական մեկնաբանությունը:

D^- տիրույթում բաշխենք լիցքեր այնպես, որպեսզի այդ լիցքերի $g(x,y)$ պոտենցիալը S մակերևույթի վրա համընկնի - $E(x,y)|_{y\in S}$ պոտենցիալի հետ: $g(x,y)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է D^+ տիրույթում ըստ y փոփոխականի, քանի որ նա հանդիսանում է D^+ տիրույթին չպատկանող լիցքերի պոտենցիալ: Դիտարկենք $G(x,y) = E(x,y) + g(x,y)$ ֆունկցիան: Նա բավարարում է հետևյալ պայմաններին

ա. հանդիսանում է D^+ տիրույթում $g(x,y)$ հարմոնիկ ֆունկցիայի և $E(x,y)$ հիմնարար լուծման գումար,

բ. D^+ տիրույթի S եզրի վրա հավասար է զրոյի:

Այսպիսով, Գրինի ֆունկցիայի ռեգուլյար մասը հանդիսանում է D^- տիրույթում բաշխված լիցքերի պոտենցիալը, որը S եզրի վրա ընդունում է - $E(x,y)|_S$ արժեքը:

R^2 տարածության մեջ միակապ տիրույթների համար Գրինի ֆունկցիան կարելի է կառուցել *կոնֆորմ արտապատկերումների* օգնությամբ: Դիտարկենք S եզրով D հարթ միակապ տիրույթը: Ենթադրենք, հայտնի է այն $w = w(z,z_0)$ անալիտիկ ֆունկցիան, որը կոնֆորմ արտապատկերում է D տիրույթը միավոր շրջանի վրա այնպես, որ z_0 կետը արտապատկերվում է սկզբնակետին: Այդ դեպքում

$$G(z, z_0) = \ln \frac{1}{|w(z, z_0)|} \tag{1}$$

ֆունկցիան կլինի Գրինի ֆունկցիան D տիրույթի համար:

Թեորեմ: եթե $u_{|S} = f$ եզրային պայմանով Դիրիխլեի ներքին խնդիրը $C^1(\overline{D})$ դասում ունի լուծում, ապա այն ներկայացվում է

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} dS_y \tag{2}$$

բանաձևով, որտեղ ν-ն S մակերևույթի արտաքին նորմալն է, իսկ ω_n-ը R_n-ում միավոր սֆերայի մակերեսն է՝ $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$:

Սահմանում: D տիրույթում Լապլասի հավասարման *Նեյմանի ներքին խնդրի Գրինի ֆունկցիա* կոչվում է այն $G(x, y)$ ֆունկցիան, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին

ա. այն ունի

$$G(x, y) = E(x, y) + g(x, y)$$

տեսքը, որտեղ $E(x, y)$-ը Լապլասի հավասարման հիմնարար լուծումն է, իսկ $g(x, y)$ -ը հարմոնիկ ֆունկցիա է D տիրույթում և ըստ x և ըստ y փոփոխականների;

բ. երբ x կամ y կետը գտնվում է D տիրույթի S եզրի վրա

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_S = -\frac{\omega_n}{|S|}, \tag{3}$$

որտեղ $|S|$-ը S մակերևույթի մակերեսն է:

Նեյմանի ներքին խնդրի Գրինի ֆունկցիան սիմետրիկ չէ: Այն կլինի սիմետրիկ, եթե պահանջվի, որ $\int_S G(y,x)d\sigma$-ն կախված չլինի $x \in D$ կետից:

Նեյմանի արտաքին խնդրի դեպքում, Գրինի ֆունկցիայի սահմանման մեջ (3) պայմանը հարկավոր է փոխարինել

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0, \tag{4}$$

պայմանով: Նեյմանի արտաքին խնդրի Գրինի ֆունկցիան սիմետրիկ է:

Թեորեմ: եթե $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = f$ եզրային պայմանով Նեյմանի ներքին խնդիրը $C^1(\overline{D})$ դասում ունի լուծում, ապա այն ներկայացվում է

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S f(y)G(y,x)d\sigma_y + \frac{1}{|S|}\int_S u(y)d\sigma_y \tag{5}$$

բանաձևով:

Նեյմանի արտաքին խնդրի լուծումը ներկայացվում է

$$u(x) = -\int_S f(y)G(y,x)d\sigma_y \tag{6}$$

բանաձևով:

109. Կառուցել $z \geq 0$ կիսատարածության համար Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան:

110. Օգտվելով նախորդ խնդրի պատասխանից գտնել հողակցված, իդեալական հաղորդիչ $z = 0$ հարթության վրա տեղադրված e կետային լիցքի պոտենցիալը: Հաշվել ինդուկցված մակերևույթային լիցքերի խտությունը: Կառուցել Դիրիխլեի խնդրի լուծումը $z \geq 0$ կիսատարածության համար:

111. Կառուցել $z = 0$ և $z = l$ հարթություններով սահմանափակված շերտի Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան: Ուսումնասիրել ստացված շարքի զուգամիտությունը և այն ածանցելու հնարավորությունը:

112. Կառուցել $z = 0$, $z = l$ և $x = 0$ հարթություններով սահմանափակված կիսաշերտի Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան:

113. Կառուցել $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (n-ը բնական է) մեծությամբ երկնիստ անկյան Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան:

114. Կառուցել կիսահարթության Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան և նրա օգնությամբ լուծել Դիրիխլեի խնդիրը $y > 0$ կիսահարթության համար, եթե

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ V, \ x > 0 \end{cases} :$$

115. Կառուցել $\alpha = 0$ և $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (n-ը բնական է) ճառագայթներով սահմանափակված տիրույթի Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան:

116. Կառուցել R շառավղով գնդի համար Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան:

117. Գտնել հողակցված սֆերայի ներսում գտնվող e կետային լիցքի ստեղծած էլեկտրաստատիկ դաշտի պոտենցիալը: Յաշվել սֆերայի վրա ինդուկցված լիցքերի մակերևույթային խտությունը և լուծել Դիրիխլեի ներքին խնդիրը սֆերայի համար:

118. Կառուցել R շառավղով

ա. շրջանի,

բ. կիսաշրջանի,

գ. քառորդ շրջանի,

դ. $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (n-ը բնական է) անկյունով սեկտորի,

ե. կիսագնդի,

զ. քառորդ գնդի

Դիրիխլեր խնդրի Գրինի ֆունկցիաները:

119. Կառուցել a և b շառավիղներով համակենտրոն սֆերաներով սահմանափակված սֆերիկ շերտի Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան: Ուսումնասիրել ստացված շարքի զուգամիտությունը և այն ածանցելու հնարավորությունը:

120. Կառուցել $a \leq r \leq b$ օղակի Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիան: Ուսումնասիրել ստացված շարքի զուգամիտությունը և այն ածանցելու հնարավորությունը:

121. Ցույց տալ, որ եթե $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է D տիրույթում, ապա

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

ֆունկցիան նույնպես հարմոնիկ է այդ տիրույթում: Օգտվելով այս փաստից՝ լուծել Նեյմանի խնդիրը գնդի համար:

122. Օգտվելով կոնֆորմ արտապատկերումներից՝ կառուցել հետևյալ տիրույթների Դիրիխլեի խնդրի Գրինի ֆունկցիաները

ա. $y > 0$ կիսահարթություն,

բ. $|z| < R,\ y > 0$ կիսաշրջան,

գ. $x > 0,\ y > 0$ քառորդ,

դ. $0 < y < \pi$ շերտ:

§4. Պոտենցիալներ և նրանց կիրառությունները

Դիցուք D-ն սահմանափակ տիրույթ է R^n տարածությունում, որի եզրը S-ողորկ մակերևույթն է, իսկ μ-ն այդ տիրույթում տրված որևէ բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիա է:

Սահմանում.

$$u(x) = \int_D E(x,y)\mu(y)d\tau_y \tag{1}$$

ֆունկցիան կոչվում է D տիրույթում $\mu(y)$ խտությամբ բաշխված *զանգվածի ծավալային պոտենցիալ* որտեղ $E(x,y)$-ը Լապլասի հավասարման հիմնարար լուծումն է:

Ծավալային պոտենցիալն ունի հետևյալ կարևոր հատկությունները.

ա. Եթե $\mu(y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{D}$-ում, ապա $u(x)$-ն անընդհատ է և ունի մինչև առաջին կարգի անընդհատ ածանցյալներ R^n-ում, հարմոնիկ է $D \cup S$-ից դուրս, $u(\infty) = 0$, եթե $n > 2$, իսկ $n = 2$ դեպքում աճում է ինչպես $ln|x|$ $(x \to \infty)$ ֆունկցիան:
բ. Եթե $\mu(y)$ ֆունկցիան ունի առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ D-ում և անընդհատ է $\overline{D}$-ում, ապա $u(x)$-ն ունի մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ D-ում և այդտեղ բավարարում է

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x)$$

Պուասոնի հավասարմանը, որտեղ ω_n-ը միավոր սֆերայի մակերեսն է $\left(\omega_n = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2\pi^{\frac{n}{2}}\right)$:

Ենթադրենք μ-ն S-ի վրա տրված որևէ անընդհատ ֆունկցիա է:

Սահմանում.

$$w(x) = \int_S \mu(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial n} d\sigma \tag{2}$$

ֆունկցիան կոչվում է *կրկնակի շերտի պոտենցիալ*, որտեղ n-ը S մակերևույթի y կետում տարված արտաքին նորմալն է:

Կրկնակի շերտի պոտենցիալն ունի հետևյալ կարևոր հատկությունները.
ա. $w(x)$-ը S մակերևույթի վրա չգտնվող կետերում ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ և բավարարում է Լապլասի հավասարմանը:
բ. $w(x)$-ը ձգտում է զրոյի $|x|^{1-n}$ արագությամբ, երբ $|x| \to \infty$:
գ. Եթե S-ը Լյապունովյան մակերևույթ է, ապա $w(x)$-ը գոյություն ունի նաև մակերևույթի x_0 կետում և ունի $w_+(x_0)$-ներսից և $w_-(x_0)$-դրսից սահմաններ, որոնք հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով

$$\begin{aligned} w_+(x_0) &= w(x_0) - \frac{\omega_n}{2}\mu(x_0), \\ w_-(x_0) &= w(x_0) + \frac{\omega_n}{2}\mu(x_0) : \end{aligned} \tag{3}$$

Այս երկու բանաձևերից ստացվում է $w(x)$ ֆունկցիայի թռիչքի համար հետևյալ

$$w_-(x_0) - w_+(x_0) = \omega_n \mu(x)$$

բանաձևը:

դ. Մասնավոր դեպքում, երբ $\mu = 1$, $w(x)$-ը կոչվում է *Գաուսի ինտեգրալ*, որն ունի հետևյալ արժեքները

$$\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial n} d\sigma = \begin{cases} 0, & x \notin D \cup S \\ -\omega_n, & x \in D \end{cases} \quad : \tag{4}$$

Եթե S-ը Լյապունովյան մակերևույթ է, ապա

$$\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial n} d\sigma = -\frac{\omega_n}{2}, \tag{5}$$

եթե $x \in S$:

ե. կրկնակի շերտի պոտենցիալը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով

$$w(x) = -\int_S \mu(y) \frac{\cos\varphi}{|y-x|^{n-1}} d\sigma, \tag{6}$$

որտեղ φ-ն $y - x$ վեկտորի և n նորմալի կազմած անկյունն է:

Սահմանում. S մակերևույթի վրա $\mu \in C(S)$ խտությամբ բաշխված զանգվածի *պարզ շերտի պոտենցիալ* կոչվոմ էհետևյալ ֆունկցիան

$$v(x) = \int_S \mu(y) E(x,y) d\sigma : \tag{7}$$

Պարզ շերտի պոտենցիալն ունի հետևյալ կարևոր հատկությունները.

ա. $v(x)$-ը S մակերևույթին չպատկանող կետերում ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ և բավարարում է Լապլասի հավասարմանը:

բ. Եթե $n > 2$,ապա $v(x) \to 0$ $\frac{1}{|x|^{n-2}}$ արագությամբ, երբ $|x| \to \infty$, իսկ եթե $n = 2$, ապա $v(x)$-ն աճում է ինչպես $ln|x|$ $(|x| \to \infty)$ ֆունկցիան :

գ. $v(x)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է R^n-ում:

դ. Դիցուք S-ը Լյապունովյան մակերևույթ է, իսկ n_0-ն S-ի x_0 կետում տարված արտաքին նորմալն է: Այդ դեպքում նորմալի վրա գտնվող x կետում

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_0} = -\int_S \mu(y) \frac{\cos\psi}{|y-x|^{n-1}} d\sigma_y, \qquad (8)$$

որտեղ ψ-ն $y-x$ վեկտորի և միևնույն n_0 արտաքին նորմալի կազմած անկյունն է: Հայտնի է, որ (8) ինտեգրալը որոշված է նաև մակերևույթի x_0 կետում, որը կնշանակենք հետևյալ ձևով

$$-\int_S \mu(y) \frac{\cos\psi_0}{|y-x_0|^{n-1}} d\sigma_y :$$

ե. $v(x)$-ը S մակերևույթի կետերում ունի ներսից և դրսից կանոնավոր նորմալ ածանցյալներ, որոնք որոշվում են հետևյալ բանաձևերով

$$\left[\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_0}\right]_+ = -\int_S \mu(y) \frac{\cos\psi_0}{|y-x_0|^{n-1}} d\sigma_y - \frac{\omega_n}{2}\mu(x_0),$$

$$\left[\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_0}\right]_- = -\int_S \mu(y) \frac{\cos\psi_0}{|y-x_0|^{n-1}} d\sigma + \frac{\omega_n}{2}\mu(x_0) :$$

Այս երկու բանաձևերից կունենանք հետևյալ բանաձևը

$$\left[\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_0}\right]_- - \left[\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_0}\right]_+ = \omega_n \mu(x_0) :$$

Դիտողություն. $n=2$ դեպքում պոտենցիալներն անվանում են *լոգարիթմական:*

123. Մաթեմատիկորեն ձևակերպել և լուծել այն եզրային խնդիրը, որին կբավարարի a շառավղով և $\mu=\mu_0$ հաստատուն խտություն ունեցող գնդի ծավալային պոտենցիալը:

124. Գտնել a շառավղով և $\mu = \mu_0$ հաստատուն խտությամբ գնդի ծավալային պոտենցիալը՝ ուղղակի հաշվելով այն:

125. Գտնել $a \le r \le b$ սֆերիկ շերտում $\mu = \mu_0$ հաստատուն խտությամբ բաշխված զանգվածի ծավալային պոտենցիալը:

126. Գտնել a շառավղով գնդում $\mu = \mu_1$ և $a < b < r < c$ սֆերիկ շերտում $\mu = \mu_2$ հաստատուն խտություններով բաշխված զանգվածի ծավալային պոտենցիալը:

127. Գտնել c շառավղով գնդում $\mu = \mu(r)$ փոփոխական խտությամբ բաշխված զանգվածի ծավալային պոտենցիալը: Ստանալ այստեղից **125** և **126** խնդիրների լուծումները:

128. Մաթեմատիկորեն ձևակերպել և լուծել այն եզրային խնդիրը, որին կբավարարի համասեռ $(\mu = \mu_0)$ սֆերիկ պարզ շերտի պոտենցիալը:

129. Գտնել համասեռ $(\mu = \mu_0)$ սֆերիկ պարզ շերտի պոտենցիալը՝ ուղղակի հաշվելով այն:

130. Գտնել $z = 0$ իդեալական հաղորդիչ հարթության վրա տեղադրված գնդում $\mu = \mu_0$ հաստատուն խտությամբ բաշխված ծավալային լիցքերի ստեղծած էլեկտրաստատիկ դաշտը:

131. Մաթեմատիկորեն ձևակերպել և լուծել այն եզրային խնդիրը, որին կբավարարի լիցքի հաստատուն $(\mu = \mu_0)$ խտություն ունեցող շրջանի լոգարիթմական պոտենցիալը:

132. Գտնել լիցքի հաստատուն $(\mu = \mu_0)$ խտություն ունեցող շրջանի լոգարիթմական պոտենցիալը՝ ուղղակի հաշվելով այն:

133. Հաշվել լիցքի հաստատուն $(\mu = \mu_0)$ խտություն ունեցող հատվածի $(-a \le x \le a)$ պարզ շերտի լոգարիթմական պոտենցիալը:

134. Հաշվել լիցքի հաստատուն $(\mu = \mu_0)$ խտություն ունեցող հատվածի $(-a \le x \le a)$ կրկնակի շերտի լոգարիթմական պոտենցիալը:

135. Լուծել Դիրիխլեի ներքին խնդիրը a շառավղով շրջանի համար՝ լուծումը փնտրելով կրկնակի շերտի պոտենցիալի տեսքով:

136. Լուծել Դիրիխլեի արտաքին խնդիրը a շառավղով շրջանի համար՝ լուծումը փնտրելով կրկնակի շերտի պոտենցիալի տեսքով:

137. Լուծել Նեյմանի խնդիրը a շառավղով շրջանի համար՝ լուծումը փնտրելով պարզ շերտի պոտենցիալի տեսքով:

138 Լուծել Դիրիխլեի և Նեյմանի խնդիրները կիսատարածության համար:

139. Լուծել Դիրիխլեի խնդիրը կիսահարթության համար:

Գ Լ ՈՒ Խ V
ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ԱՆՋԱՏՄԱՆ ԿԱՄ ՖՈՒՐԻԵԻ ԵՂԱՆԱԿԸ

§1. Ֆուրիեի եղանակը
հիպերբոլական տեսակի հավասարումների համար

Փոփոխականների անջատման եղանակով կարելի է կառուցել բավականաչափ լայն դասի հավասարումների համար, այսպես կոչված, *խառը խնդիրների* լուծումները: Նկարագրենք այդ եղանակի ընդհանուր պատկերը հետևյալ մասնավոր հիպերբոլական հավասարման համար՝

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

որտեղ $p(x)$, $p^{'}(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են $0 \le x \le l$ հատվածում և $p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, $\rho(x) > 0$:

Խառը խնդիրը կայանում է հետևյալում՝ գտնել (1) հավասարման այնպիսի լուծում, որը բավարարի

$$\begin{gathered} \alpha u(0,t) + \beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \\ \gamma u(l,t) + \delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

եզրային պայմաններին (α, β, γ, δ-ն հաստատուններ են, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$) և

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{3}$$

սկզբնական պայմաններին:

Փոփոխականների անջատման եղանակի էությունը կայանում է հետևյալում՝ սկզբում փնտրում ենք (2) եզրային պայմաններին բավարարող (1) հավասարման $T(t)X(x)$ տեսքի ոչ զրոյական լուծումներ՝

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

Տեղադրելով այն (1) հավասարման մեջ և հաշվի առնելով, որ $X(x) \neq 0$ ու $T(t) \neq 0$, ստանում ենք

$$\frac{\frac{d}{dx}[p(x)X^{'}(x)] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T^{''}(t)}{T(t)} : \tag{5}$$

Այս հավասարության ձախ մասը կախված է միայն x փոփոխականից, իսկ աջը՝ միայն t-ից: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում երբ (5) հավասարության երկու մասն էլ նույն հաստատունն են: Նշանակենք այդ հաստատունը λ-ով: Այդ դեպքում (5) հավասարությունից կստանանք երկու սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ

$$T^{''}(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)X^{'}(x)] + [\lambda\rho(x) - q(x)]X(x) = 0 : \tag{7}$$

Տեղադրելով (4) արտահայտությունը նաև (2) եզրային պայմանների մեջ, կունենանք

$$\begin{aligned} \alpha X(0) + \beta X^{'}(0) = 0, \\ \gamma X(l) + \delta X^{'}(l) = 0 : \end{aligned} \tag{8}$$

(7)-(8) եզրային խնդիրը կոչվում է *Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիր* (կամ կարճ Շ-Լ խնդիր): λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում (7) հավասարումը ունի ոչզրոյական լուծում, կոչվում են *սեփական արժեքներ,* իսկ իրենք լուծումները՝ *սեփական ֆունկցիաներ:* Բոլոր սեփական արժեքների բազմությունը կոչվում է (7)-(8) խնդրի *սպեկտր,* իսկ սպեկտրի և սեփական ֆունկցիաների որոնումը՝ *սպեկտրային խնդիր:* Քանի որ (7) հավասարումը համասեռ է, իսկ (8) պայմանները զրոյական, ապա սեփական ֆունկցիաները որոշվում են հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ: Ընտրենք այդ բազմապատկիչն այնպես, որ

$$\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx = 1,$$

որտեղ $X_k(x)$-ը λ_k սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ֆունկցիան է: Այս պայմանին բավարարող սեփական ֆունկցիաները կոչվում են նորմավորված: Նշենք սեփական ֆունկցիաների և սեփական արժեքների որոշ հատկություններ.

ա. ամեն մի սեփական արժեքի համապատասխանում է միայն մեկ սեփական ֆունկցիա (հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ),

բ. տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներն օրթոգոնալ են $\rho(x)$ կշռով, այսինքն՝

$$\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = 0 \quad (k \neq m),$$

գ. բոլոր սեփական արժեքներն իրական են,

դ. գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ սեփական արժեքներ

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim \lambda_n = +\infty,$$

ե. որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում սեփական արժեքները բացասական չեն, իսկ սեփական ֆունկցիաները կազմում են լրիվ համակարգ:

(6) հավասարման ընդհանուր լուծումը նշանակենք $T_k(t)$-ով: Ունենք

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t,$$

որտեղ A_k-ն և B_k-ն կամայական հաստատուններ են:

Կամայական

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = (A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x)$$

տեսքի ֆունկցիան կլինի (1) հավասարման լուծում և կբավարարի (2) եզրային պայմաններին:

(1)-(3) խառը խնդրի լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x) : \qquad (10)$$

ենթադրենք, որ (10) շարքը և երկու անգամ ըստ x և t փոփոխականների անդամ առ անդամ ածանցելուց ստացված շարքերը հավասարաչափ զուգամետ են: Ակնհայտ է, որ (10) շարքի գումարը, այդ պայմանների դեպքում, կբավարարի (1) հավասարմանը և (2) եզրային պայմաններին: Պահանջելով,որ (10) շարքի գումարը բավարարի նաև (3) սկզբնական պայմաններին, ստանում ենք

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi(x), \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x) = \psi(x) : \tag{12}$$

Երբ $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ սեփական ֆունկցիաների համակարգը լրիվ է և օրթոնորմավորված, A_k և B_k գործակիցների որոնման համար (11) և (12)-ից ունենք՝

$$A_k = \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho(x)\psi(x)X_k(x)dx :$$

Տեղադրելով A_k և B_k հաստատունների արժեքները (10) շարքի մեջ՝ կստանանք (1)-(3) խառը խնդրի լուծումը:

Ընդհանուր դեպքում հնարավոր չէ գտնել Շ-Լ խնդրի լուծումը: Այն մասնավոր դեպքում, երբ (1) հավասարման գործակիցները հաստատուններ են խնդրի լուծումը կառուցվում է բացահայտորեն: Այսպես,օրինակ,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{$5'$}$$

լարի տատանման հավասարման դեպքում (6) և (7) հավասարումներն ունեն համապատասխանաբար հետևյալ տեսքերը՝

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{$6'$}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l : \tag{7'}$$

Պարզության համար ենթադրենք, որ եզրային պայմանները ունեն

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{8'}$$

տեսքը: Այս դեպքում $(7') - (8')$ խնդրի սեփական արժեքները գտնվում են՝

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \cdots :$$

Նրանց համապատասխան գծորեն անկախ ֆունկցիաները հանդիսանում են

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

որը լրիվ համակարգ է $(0, l)$ միջակայքում, իսկ $(6')$ հավասարման լուծումները տրվում են

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\pi k}{l} t + B_k \sin \frac{a\pi k}{l} t$$

տեսքով:

Փոփոխականների անջատման եղանակը կարելի է կիրառել նաև անհամասեռ հավասարման և անհամասեռ եզրային պայմանների դեպքում: Սահմանափակվենք հետևյալ խառը խնդրի դիտարկումով

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = f(x, t) \tag{13}$$

$$\begin{gathered} a_1 u_x(0, t) + b_1 u(0, t) = \mu(t), \\ a_2 u_x(l, t) + b_2 u(l, t) = \nu(t), \\ a_k^2 + b_k^2 \neq 0 \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{14}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) : \tag{15}$$

$a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2$ հաստատունների վրա դրվող որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում որոնելի ֆունկցիայի

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

փոխարինումով, որտեղ

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\mu(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\nu(t),$$

(13)-(15) խառը խնդիրը բերվում է համասեռ եզրային պայմաններով հետևյալ խառը խնդրին

$$v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_{tt} = F(x,t) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} a_1 v_x(0,t) + b_1 v(0,t) = 0, \\ a_2 v_x(l,t) + b_2 v(l,t) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x,0) = \psi_1(x), \tag{18}$$

որտեղ

$$F(x,t) = f(x,t) - w_{xx} + \frac{1}{a^2} w_{tt},$$

$$\varphi_1(x) = w(x,0), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - w_t(x,0) :$$

Ենթադրենք, որ գոյություն ունի

$$X^{''} + \lambda X = 0, \tag{19}$$

$$a_1 X^{'}(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X^{'}(l) + b_2 X(l) = 0 \tag{20}$$

Շ-Լ խնդրի $X_n(x), n = 1, 2, \cdots$ գծորեն անկախ սեփական ֆունկցիաների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ: $F(x,t)$, $\varphi_1(x)$ և $\psi_1(x)$ ֆունկցիաները ներկայացնելով հետևյալ շարքերով

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \tag{21}$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x), \quad \psi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k X_k(x), \tag{22}$$

(16)-(18) խնդրի լուծումը փնտրենք

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \tag{23}$$

տեսքով: Տեղադրելով (23)-ը (16) հավասարման մեջ ու հաշվի առնելով (21), (22) վերլուծությունները, կստանանք

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k(t) X_k^{''}(x) - \frac{1}{a^2} T_k^{''}(t) X_k(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x), \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{'}(0) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k X_k(x) : \end{gathered} \tag{25}$$

Համաձայն (19)-ի՝ (24)-ից կստանանք

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k^{''}(t) + a^2 \lambda_k T_k(t)) X_k(x) = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x) : \tag{26}$$

Շնորհիվ $X_k(x),\ k = 1, 2, \cdots$ համակարգի գծորեն անկախության, (25)-ից և (26)-ից ստանում ենք հետևյալ խնդիրը

$$\begin{gathered} T_k^{''}(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = -a^2 c_k(t), \\ T_k(0) = d_k, \quad T_k^{'}(0) = e_k,\ k \in N \end{gathered} \tag{27}$$

որը հեշտությամբ լուծվում է: Տեղադրելով $T_k(t)$ ֆունկցիաները (23)-ի մեջ, կստանանք (16)-(18) խնդրի լուծումը. եթե F, φ_1, ψ_1 ֆունկցիաները ապահովում են (23) շարքի և այն շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությունը, որոնք կստացվեն նրանից ըստ x և t փոփոխականների երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելով:

Երբ (13) հավասարման աջ մասը կախված է միայն x փոփոխականից

$$f(x,t) \equiv f(x),$$

իսկ (14) եզրային պայմանների աջ մասերը հաստատուններ են $\mu(t) = \mu_0$, $\nu(t) = \nu_0$ և

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_1 b_2 l \neq 0, \tag{28}$$

ապա

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

փոխարինումով, որտեղ

$$\begin{aligned} w^{''}(x) &= f(x), \\ a_1 w^{'}(0) + b_1 w(0) &= \mu_0, \\ a_2 w^{'}(l) + b_2 w(l) &= \nu_0, \end{aligned} \tag{29}$$

$v(x,t)$ ֆունկցիան որոշելու համար կստանանք հետևյալ խնդիրը

$$v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_{tt} = 0,$$

$$a_1 v_x(0,t) + b_1 v(0,t) = 0,$$

$$a_2 v_x(l,t) + b_2 v(l,t) = 0,$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - w(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x) :$$

Իսկ (28) պայմանի դեպքում (29) խնդիրը միշտ ունի լուծում:

Որոշ դեպքերում (10) կամ (23) շարքերի գումարը կարող է ածանցյալներ չունենալ: Հետևաբար նրանք չեն կարող լինել դիֆերենցիալ հավասարման լուծում: Սակայն, ինչպես հայտնի է, ուրիշ լուծում փնտրելն անիմաստ է: Այս պատճառով, (10) և (23) շարքերի գումարները համարում են խառը խնդրի իսկական կամ ընդհանրացված լուծումներ:

140. $0 < x < l,\, t > 0$ կիսաշերտում լուծել

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

հավասարման համար հետևյալ խառը խնդիրները

(համասեռ եզրային պայմաններ)

ա. $u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{2\pi}{l}x$:

բ. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \sin\dfrac{5\pi}{2l}x,\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2l}x$:

գ. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = x,$
$u_t(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2l}x + \sin\dfrac{3\pi}{2l}x$:

դ. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{2l}x,$
$u_t(x,0) = \cos\dfrac{3\pi}{2l}x + \cos\dfrac{5\pi}{2l}x$:

ե. $u(0,t) = u(l,t) = u_t(x,0) = 0,$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 \le x \le c \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c \le x \le l \end{cases} :$$

զ. $u(0,t) = u(l,t) = u_t(x,0) = 0,\ u(x,0) = hx(l-x)$:

է. $u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = hx(l-x)$:

ը. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{l}x,$
$u_t(x,0) = \cos\dfrac{5\pi}{l}x$:

բ. $u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0,$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi(x-c)}{h}, \ |x-c| < \frac{h}{2} \\ 0, \ |x-c| > \frac{h}{2} \end{cases} :$$

գ. $u(0,t) = u_x(l,t) = u_t(x,0) = 0, \ u(x,0) = rx, r = const :$

դ. $u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = 0,$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0, \ 0 \le x < c-\delta, \\ v_0, \ c-\delta \le x \le c+\delta \\ 0, \ c+\delta < x \le l \end{cases} :$$

ե. $u_x(-l,t) = u_x(l,t) = u_t(x,0) = 0, \ u(x,0) = -\varepsilon x :$

զ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 1 :$

է. $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 1 :$

ը. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = 1, \ u_t(x,0) = 0 :$

թ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 1 :$

ժ. $u(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = x :$

ի. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) :$

լ. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) :$

խ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) :$

ծ. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ h > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) :$

կ. $u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0, \ h_1, h_2 > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) :$

շ. $u(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ h > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

(անհամասեռ եզրային պայմաններ)

ո. $u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(l,t) = H$:

չ. $u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(l,t) = A\sin\omega t$:

պ. $u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u(l,t) = A\sin\omega t$:

ջ. $u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = Ae^{-t},$

$$u(x,0) = \frac{Aach\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}},\ u_t(x,0) = \frac{-Aach\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}} :$$

ռ. $u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t),\ u_x(l,t) + gu(l,t) = \nu(t),\ h,g > 0,$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0$:

ս. $u_x(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

վ. $u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(l,t) = At^m,\ m > -1$:

տ $u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

141. $0 < x < l, t > 0$ կիսաշերտում լուծել

$$u_{tt} = a^2u_{xx} - 2\nu u_t\ (\nu > 0)$$

հավասարման համար հետևյալ խառը խնդիրները

ա. $u(0,t) = u(l,t) = u_t(x,0) = 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x,\ 0 < x < x_0 \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0},\ x_0 \le x < l \end{cases} :$$

բ. $u(0,t) = u_x(l,t) = u_t(x,0) = 0,\ u(x,0) = kx$:

գ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

դ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ h > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

ե. $u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0,\ h_1, h_2 > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

զ. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

է. $u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(l,t) = A\sin\omega t$:

142. Լուծել հետևյալ խառը խնդիրները՝ անհամասեռ հավասարումների համար

(համասեռ եզրային պայմաններ)

ա. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(x,0) = u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u_t(x,0) = v_0$:

բ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

գ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

դ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi(x)t,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ե. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{-t}\sin\dfrac{\pi}{l}x,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

զ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2xe^{-t},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

է. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \dfrac{1}{4}\sin t,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ը. $u_{tt} = 4u_{xx} + 2e^{-t}\cos\dfrac{x}{2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$

$u_x(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

թ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \omega^2(x+u) + g\sin\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u_x(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ժ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi(x)t^m,\ 0<x<l,\ t>0,\ m>-1,$
$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = u_t(x,0)$:

ի. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi_0\cos\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

լ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi(x)\cos\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

խ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi(x)\sin\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ծ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi_0\sin\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

կ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t + g,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u_t(x,0) = 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x, & 0<x<x_0 \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0<x<l \end{cases} :$$

հ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t + \Phi(x)t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ձ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t + \Phi(x)\sin\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

(անհամասեռ եզրային պայմաններ)

ղ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t) = \alpha,\ u(l,t) = \beta,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ճ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ 0<x<l,\ t>0,$
$u_x(0,t) = \alpha,\ u_x(l,t) = \beta,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

մ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ 0<x<l,\ t>0,$

$u_x(0,t) - hu(0,t) = \alpha,\ h > 0,\ u(l,t) = \beta,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$:

յ. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = \alpha,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = \beta,\ h > 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

ն. $u_{xx} = u_{tt} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = \mu(t),\ u_x(l,t) + hu(l,t) = \nu(t),$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \psi(x),\ h > 0$:

շ. $u_{xx} = u_{tt} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t),\ u_x(l,t) = \nu(t),$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ h > 0$:

ո. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = u(x,0) = 0,\ u_x(l,t) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t,$
$u_t(x,0) = -2 \cos \frac{2x}{a}$:

չ. $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t,\ u(\frac{\pi}{2}, t) = \pi t,\ u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = 2x$:

պ. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \pi t,\ u(x,0) = e^{-x} \sin x,\ u_t(x,0) = x$:

143. Լուծել հետևյալ բազմաչափ խառը խնդիրները

ա. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0,$
$u(t,0,y) = u(t,l_1,y) = u(t,x,0) = u(t,x,l_2) = 0,$
$u(x,y,0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y),\ u_t(x,y,0) = 0$:

բ. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0,$
$u(t,0,y) = u(t,l_1,y) = u(t,x,0) = u(t,x,l_2) = 0,$
$u(x,y,0) = 0,\ u_t(x,y,0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y)$:

գ. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < s,\ 0 < y < p,\ t > 0,$
$u(t, 0, y) = u(t, s, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, p) = 0,$
$u(x, y, 0) = \sin\frac{\pi}{s}x \sin\frac{\pi}{p}y,\ u_t(x, y, 0) = 0:$

դ. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < s,\ 0 < y < p,\ t > 0,$
$u(t, 0, y) = u(t, s, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, p) = 0,$
$u(x, y, 0) = Axy,\ u_t(x, y, 0) = 0:$

ե. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0,$
$u(t, 0, y) = u(t, \pi, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, \pi) = 0,$
$u(x, y, 0) = 3\sin x \sin 2y,\ u_t(x, y, 0) = 5\sin 3x \sin 4y:$

զ. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A(x, y)\sin\omega t,$
$0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0,$
$u(t, 0, y) = u(t, l_1, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, l_2) = 0,$
$u(x, y, 0) = 0,\ u_t(x, y, 0) = 0:$

է. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{e^{-t}x}{\rho}\sin\frac{2\pi}{p}y,$
$0 < x < s,\ 0 < y < p,\ t > 0,$
$u(t, 0, y) = u(t, s, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, p) = 0,$
$u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0:$

ը. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ r_1 < r < r_2,\ t > 0,$
$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_1} = \varepsilon\omega\cos\omega t,\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_2} = 0:$

թ. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ r_1 < r < r_2,\ t > 0,$
$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_2} = 0,$
$u(r, 0) = 0,\ u_t(r, 0) = -\frac{a^2}{\rho_0}f(r),\ r_1 < r < r_2:$

§2. Ֆուրիեի եղանակը պարաբոլական տեսակի հավասարումների համար

Դիտարկենք հետևյալ պարզագույն դեպքը

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

որտեղ $\varphi(x)$-ը տրված անընդհատ ֆունկցիա է $[0,l]$-ում, ունի կտոր-առ-կտոր անընդհատ ածանցյալ և $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$: Փնտրելով (2) եզրային պայմաններին բավարարող (1) հավասարման $X(x)T(t)$ տեսքի լուծումներ, $X(x)$ ֆունկցիան գտնելու համար ստանում ենք

$$X^{''} + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{4}$$

եզրային խնդիրը, իսկ $T(t)$ ֆունկցիան գտնելու համար՝

$$T^{'} + \lambda T = 0 \tag{5}$$

հավասարումը: (4) խնդրի սեփական արժեքները և ֆունկցիաները մեզ հայտնի են՝ $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$, $n = 1, 2, \cdots$: λ հաստատունի այդ արժեքների դեպքում (5) հավասարման ընդհանուր լուծումը, ակնհայտ է, ունի

$$T_n(t) = a_n \exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right], \quad n = 1, 2\cdots$$

տեսքը, որտեղ a_n-ը կամայական հաստատուն է:

Այսպիսով, ունենալով (2) պայմաններին բավարարող (1) հավասարման

$$a_n \exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{\pi n}{l}x$$

տեսքի լուծումները, (1)-(3) խառը խնդրի լուծումը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{\pi n}{l}x :$$

Օգտվելով (3) սկզբնական պայմանից, գտնում ենք՝

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx :$$

$\varphi(x)$ ֆունկցիայի վրա դրված պայմաններից հետևում է, որ այս բանաձևով որոշված a_n գործակիցների դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{l}x$$

շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային, որը հայտնի է եռանկյունաչափական շարքերի տեսությունից:

Այժմ, դիտարկենք անհամասեռ հավասարման համար հետևյալ խառը խնդիրը՝

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{8}$$

որտեղ $f(x,t)$-ն անընդհատ է $0 \le x \le l, t \ge 0$-ում, և ըստ x փոփոխականի ունի կտոր-առ-կտոր անընդհատ ածանցյալ և t փոփոխականի բոլոր դրական արժեքների համար բավարարում է $f(0,t) = f(l,t) = 0$ պայմաններին: Այս դեպքում $f(x,t)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել Ֆուրիեի շարքի տեսքով

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{9}$$

որտեղ

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}xdx : \tag{10}$$

(6)-(8) խնդրի լուծումը փնտրենք հետևյալ շարքի տեսքով`

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{11}$$

որտեղ $T_n(t)$ անհայտ ֆունկցիաները գտնելու համար պահանջենք, որ (11) շարքի գումարը բավարարի (6) հավասարմանը: Շնորհիվ (8) և (9) հավասարությունների` $T_n(t)$ ֆունկցիաները որոշելու համար կստանանք Կոշիի հետևյալ խնդիրը`

$$\begin{gathered} T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = 0 : \end{gathered} \tag{12}$$

(12) խնդրի լուծումն ունի հետևյալ տեսքը`

$$T_n(t) = \int_0^t exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)\right] f_n(\tau)d\tau :$$

Տեղադրելով $T_n(t)$-ի արտահայտությունը (11) շարքի մեջ, ստանում ենք (6)-(8) խնդրի լուծումը`

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)\right] f_n(\tau)d\tau\right)\sin\frac{\pi n x}{l} : \tag{13}$$

Եթե (8) զրոյական սկզբնական պայմանի փոխարեն տրված լինի կամայական սկզբնական պայման`

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{14}$$

ապա (6), (7), (14) խնդրի լուծումը կլինի նախորդ երկու խնդիրների լուծումների գումարը:

Ոչ զրոյական եզրային պայմանների դեպքը՝

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad t \geq 0 \tag{15}$$

որոնելի ֆունկցիայի

$$u(x,t) = v(x,t) + \mu(t) + \frac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)],$$

փոխարինումով բերվում է զրոյական եզրային պայմաններով դեպքին:

144. Լուծել

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < l, \ t > 0,$$

հավասարումը՝ հետևյալ սկզբնական և եզրային պայմանների դեպքում

(համասեռ եզրային պայմաններ)

ա. $u(0,t) = u(l,t) = 0, \ u(x,0) = \varphi(x)$:
բ. $u(0,t) = u(l,t) = 0, \ u(x,0) = u_0$:
գ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ u(x,0) = \varphi(x)$:
դ. $u_x(0,t) - H\,(u(0,t) - u_1) = 0,$
$u_x(l,t) + H\,(u(l,t) - u_2) = 0, \ H > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x)$:
ե. $u(0,t) = u(l,t) = 0, \ u(x,0) = 2x(l-x)$:

(անհամասեռ եզրային պայմաններ)

զ. $u(0,t) = u_1, \ u(l,t) = u_2, \ u(x,0) = u_0$:
է. $u(0,t) = u_0, \ u_x(l,t) = Q_0, \ u(x,0) = \varphi(x)$:
ը. $u(0,t) = u_0, \ u_x(l,t) = 0, \ u(x,0) = 0$:

ք. $u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=Q,\ u(x,0)=0$:
ժ. $u(0,t)=0,\ u(l,t)=At,\ u(x,0)=0$:
ի. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=q,\ u(x,0)=Ax$:
լ. $u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=Ae^{-t},\ u(x,0)=T$:
խ. $u(0,t)=0,\ u(l,t)=A\cos\omega t,\ u(x,0)=\varphi(x)$:
ծ. $u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=A\cos\omega t,\ u(x,0)=\varphi(x)$:
կ. $u_x(0,t)=At,\ u_x(l,t)=T,\ u(x,0)=0$:

145. Լուծել հետևյալ խառը խնդիրները՝ անհամասեռ հավասարումների համար

ա. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x)$:

բ. $u_t=a^2u_{xx}+\Phi(t)\sin\dfrac{\pi x}{l},\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x)$:

գ. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0,$
$u_x(0,t)-hu(0,t)=\psi_1(t),\ u_x(l,t)+hu(l,t)=\psi_2(t),$
$u(x,0)=\varphi(x)$:

դ. $u_t=a^2u_{xx}+f(x),\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=q,\ u(x,0)=\varphi(x)$:

146. Լուծել հետևյալ խառը խնդիրները

(համասեռ եզրային պայմաններ)

ա. $u_t=a^2u_{xx}-\beta u,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u_x(l,t)=0,\ u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{2l}$:

բ. $u_t=a^2u_{xx}-h(u-u_0),\ 0<x<l,\ t>0,\ h>0,\ u_0>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=0$:

գ. $u_t=a^2u_{xx}-hu,\ 0<x<l,\ t>0,\ h>0$
$u_x(0,t)-H\left(u(0,t)-u_1\right)=0,$

$u_x(l,t) + H\,(u(l,t) - u_2) = 0,\ H > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x)$:

դ. $u_t = u_{xx} - u,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 1$:

ե. $u_t = u_{xx} - 4u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = x^2 - \pi x$:

զ. $u_t = u_{xx} - u + \sin x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = 0$:

է. $u_t = u_{xx} - u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = \sin\dfrac{x}{2}$:

(անհամասեռ եզրային պայմաններ)

ը. $u_t = a^2u_{xx} - h(u - u_0),\ 0 < x < l,\ t > 0,\ h > 0,\ u_0 > 0,$
$u(0,t) = u_1,\ u(l,t) = u_2,\ u(x,0) = \varphi(x)$:

թ. $u_t = a^2u_{xx} - hu,\ 0 < x < l,\ t > 0,\ h > 0,$
$u_x(0,t) = Q_1,\ u_x(l,t) = -Q_2,\ u(x,0) = \varphi(x)$:

ժ. $u_t = a^2u_{xx} - h(u - u_0),\ -\pi < x < \pi,\ t > 0,\ h > 0,\ u_0 > 0,$
$u(-\pi,t) = u(\pi,t),\ u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t),\ u(x,0) = \varphi(x)$:

ի. $u_t = a^2u_{xx} - h(u - u_0),\ -\pi < x < \pi,\ t > 0,\ h > 0,\ u_0 > 0,$
$u_x(-\pi,t) = u(\pi,t),\ u(-\pi,t) = u(\pi,t),\ u(x,0) = u_1$:

լ. $u_t = a^2u_{xx} - Hu + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,\ H > 0,$
$u_x(0,t) - hu(0,t) = \psi_1(t),$
$u_x(l,t) + hu(l,t) = \psi_2(t),\ h > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x)$:

խ. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = t,\ u(x,0) = e^x \sin \pi x$:

ծ. $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u_x(\dfrac{\pi}{2},t) = 1,\ u(x,0) = x$:

147. Լուծել հետևյալ բազմաչափ խառը խնդիրները

ա. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < l,\ 0 < y < l,\ t > 0,$
$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = u_0$:

բ. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),\ 0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = 0$:

գ. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \dfrac{3\pi x}{2p} \cos \dfrac{\pi y}{2s},$
$0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = u_y(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = B \sin \dfrac{\pi x}{2p} \cos \dfrac{3\pi y}{2s}$:

դ. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s},$
$0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u(0, y, t) = u(p, y, t) = u(x, 0, t) = u_y(x, s, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = 0$:

ե. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u(0, y, t) = u(p, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$:

զ. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u_x(0, y, t) = u(p, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$:

է. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{a^2}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r, t),\ 0 \le r < R,\ t > 0,$
$|u(r, t)| < \infty,\ u(R, t) = 0,\ u(r, 0) = 0$:

ը. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{a^2}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{Q}{c\rho},\ 0 \le r < R,\ t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty,\ u(R, t) = U,\ u(r, 0) = T$:

բ. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right),\ 0 \le r \le r_0,\ t > 0,$
$u_r(r_0,t) + hu(r_0,t) = 0,\ u(r,0) = f(r)$:

ժ. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right),\ 0 \le r \le r_0,\ t > 0,$
$u(r_0,t) = 0,\ u(r,0) = f(r)$:

ի. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right),\ 0 \le r \le r_0,\ t > 0,$
$u(r_0,t) = u_1,\ u(r,0) = u_0$:

լ. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right),\ 0 \le r \le r_0,\ t > 0,$
$\lambda u_r(r_0,t) = q,\ u(r,0) = u_0$:

§3. Ֆուրիեի եղանակը էլիպտական տեսակի հավասարումների համար

Փոփոխականների անջատման եղանակով լուծենք Դիրիխլեի խնդիրը ուղղանկյուն տիրույթի համար: Գտնենք Լապլասի հավասարման՝

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

այնպիսի լուծում $\{0 \le x \le l,\ 0 \le y \le b\}$ ուղղանկյուն տիրույթում, որը բավարարի

$$u(0,y) = u(l,y) = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_1(x),\ u(x,b) = f_2(x) \tag{3}$$

եզրային պայմաններին:

Սկզբում գտնենք (1) հավասարման $X(x)Y(y)$ տեսքի այնպիսի լուծումներ, որոնք բավարարեն միայն (2) պայմանին: Տեղադրելով այդպիսի ֆունկցիան (1) հավասարման մեջ և անջատելով փոփոխականները, կստանանք՝

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 : \tag{4}$$

Որպեսզի տեղի ունենա (4) հավասարությունը, անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

որտեղ λ-ն հաստատուն է: Այստեղից ստանում ենք, որ $X(x)$ և $Y(y)$ ֆունկցիաները պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարումներին՝

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 : \tag{6}$$

(2) եզրային պայմաններից բխում է, որ

$$X(0) = X(l) = 0 : \tag{7}$$

Ինչպես գիտենք (5), (7) խնդրի սեփական արժեքները

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = 1, 2, \cdots$$

թվերն են, իսկ նրանց համապատասխան սեփական ֆունկցիաներն են՝

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \ n = 1, 2, \cdots :$$

Այժմ անդրադառնանք (6) հավասարմանը: Երբ $\lambda = \lambda_n$, նրա ընդհանուր լուծումն ունի

$$Y_n(y) = C_n e^{\pi ny/l} + D_n e^{-\pi ny/l}$$

տեսքը:

Այսպիսով ստանում ենք (2) պայմաններին բավարարող (1) հավասարման $X(x)Y(y)$ տեսքի մի շարք լուծումներ՝

$$X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\pi n y/l} + D_n e^{-\pi n y/l}) \sin \frac{\pi n}{l} x :$$

Այժմ (1)-(3) խնդրի լուծումը փնտրենք հետևյալ շարքի տեսքով՝

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\pi n y/l} + D_n e^{-\pi n y/l}) \sin \frac{\pi n}{l} x \qquad (8) :$$

Ընտրենք C_n և D_n գործակիցները, օգտվելով (3) եզրային պայմաններից, ըստ որի պետք է տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները՝

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

և

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\pi n b/l} + D_n e^{-\pi n b/l}) \sin \frac{\pi n}{l} x :$$

Առաջինից կունենանք՝

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

երկրորդից՝

$$C_n e^{\pi n b/l} + D_n e^{-\pi n b/l} = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx :$$

Գտնելով այստեղից C_n և D_n գործակիցները և տեղադրելով (8) շարքի մեջ՝ կստանանք Դիրիխլեի խնդրի լուծումը:

148. Գտնել $\rho \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ շրջանում այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը բավարարի

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{13}$$

հավասարմանը և հետևյալ եզրային պայմանին

ա. $u(a,\varphi)=f(\varphi)$:

բ. $u(a,\varphi)=A\sin\varphi$:

գ. $u(a,\varphi)=A\sin^3\varphi+B$:

դ. $u(a,\varphi)=\begin{cases} A\sin\varphi, \ 0<\varphi<\pi \\ \frac{1}{3}A\sin^3\varphi, \ \pi<\varphi<2\pi \end{cases}$:

ե. $a=1, \ u(a,\varphi)=\cos^2\varphi$:

զ. $a=1, \ u(a,\varphi)=\sin^3\varphi$:

է. $a=1, \ u(a,\varphi)=\cos^4\varphi$:

ը. $a=1, \ u(a,\varphi)=\sin^6\varphi+\cos^6\varphi$:

թ. $u(a,\varphi)=\varphi\sin\varphi$:

ժ. $u_\rho(a,\varphi)=f(\varphi)$:

ի. $u_\rho(a,\varphi)=A\cos\varphi$:

լ. $u_\rho(a,\varphi)=A\cos 2\varphi$:

խ. $u_\rho(a,\varphi)=\sin^3\varphi$:

ծ $u_\rho(a,\varphi)-hu(a,\varphi)=-f(\varphi)$:

կ. $u_\rho(a,\varphi)+hu(a,\varphi)=T+Q\sin\varphi+U\cos 3\varphi$:

149. Գտնել $\rho>a, \ 0\leq\varphi\leq 2\pi$ տիրույթում այնպիսի ֆունկցիա, որը բավարարի (13) հավասարմանը, մնա սահմանափակ, երբ $\rho\to\infty$ և բավարարի հետևյալ եզրային պայմաններին

ա. $u(a,\varphi)=f(\varphi)$:

բ. $u(a,\varphi)=A\sin\varphi$:

գ. $u(a,\varphi)=A\sin^3\varphi+B$:

դ. $u(a,\varphi)=\begin{cases} A\sin\varphi, \ 0<\varphi<\pi \\ \frac{1}{3}A\sin^3\varphi, \ \pi<\varphi<2\pi \end{cases}$:

ե. $u(a,\varphi)=T\sin\dfrac{\varphi}{2}$:

զ. $u_\rho(a,\varphi)=f(\varphi)$:

է. $u_\rho(a,\varphi) = \frac{1}{2} + \varphi\sin 2\varphi$:
ը. $u_\rho(a,\varphi) - hu(a,\varphi) = f(\varphi)$:
թ. $u(a,\varphi) = U\varphi + \varphi\cos\varphi$:

150. Գտնել $a \le \rho \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ օղակում այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը բավարարի (13) հավասարմանը և հետևյալ եզրային պայմաններին
ա. $u(a,\varphi) = f(\varphi),\ u(b,\varphi) = F(\varphi)$:
բ. $u(a,\varphi) = 0,\ u(b,\varphi) = A\cos\varphi$:
գ. $u(a,\varphi) = A,\ u(b,\varphi) = B\sin 2\varphi$:
դ. $u_\rho(a,\varphi) = q\cos\varphi,\ u(b,\varphi) = Q + T\sin 2\varphi$:
ե. $u(a,\varphi) = T + U\cos\varphi,\ u_\rho(b,\varphi) - hu(b,\varphi) = 0$:
զ. $a = 1,\ b = 2,\ u(a,\varphi) = u_1,\ u(b,\varphi)) = u_2$:
է. $a = 1,\ b = 2,\ u(a,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi,\ u(b,\varphi)) = \sin^2\varphi$:

151. Գտնել $\rho \le a,\ 0 \le \varphi \le \alpha$ շրջանային սեկտորում այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը բավարարի (13) հավասարմանը և հետևյալ եզրային պայմաններին
ա. $u(a,\varphi) = f(\varphi),\ u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0$:
բ. $u(a,\varphi) = A\varphi,\ u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0$:
գ. $u(a,\varphi) = f(\varphi),\ u_\varphi(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0$:
դ. $u(a,\varphi) = U\varphi,\ u_\varphi(\rho,0) = u_\varphi(\rho,\alpha) = 0$:
ե. $u_\rho(a,\varphi) = Q,\ u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0$:
զ. $u_\rho(a,\varphi) + \gamma u(\rho,\varphi) = 0,$
$u(\rho,0) = u_\varphi(\rho,\alpha) + hu(\rho,\alpha) = 0,\ h > 0$:

152. Գտնել $a \le \rho \le b,\ 0 \le \varphi \le \alpha$ օղակաձև սեկտորում այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որն այդտեղ բավարարի (13) հավասարմանը և

$$u(a,\varphi) = f(\varphi),\ u(b,\varphi) = F(\varphi),$$
$$u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0$$

եզրային պայմաններին:

153. Գտնել $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b$ ուղղանկյան մեջ այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը բավարարի $u_{xx} + u_{yy} = 0$ հավասարմանը և հետևյալ եզրային պայմաններին

ա. $u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = F(x),$
$u(0,y) = \varphi(y),\ u(a,y) = \Phi(y)$:

բ. $u(x,0) = 0,\ u(x,b) = F(x),$
$u(0,y) = u_x(a,y) = 0$:

գ. $u(x,0) = A,\ u(x,b) = Bx,$
$u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0$:

դ. $u(x,0) = 0,\ u_y(x,b) = Bx,$
$u_x(0,y) = u(a,y) = 0$:

ե. $u_y(x,0) = T\sin\dfrac{\pi x}{2a},\ u(x,b) = 0,$
$u(0,y) = U,\ u_x(a,y) = 0$:

զ. $u(x,0) = 0,\ u(x,b) = U,$
$u(0,y) = 0,\ u_x(a,y) = q$:

է. $u(x,0) = 0,\ u(x,b) = \dfrac{sTx}{a},$
$u(0,y) = 0,\ u(a,y) = Ty$:

ը. $u(x,0) = B\sin\dfrac{\pi x}{a},\ u(x,b) = 0,$
$u(0,y) = A\sin\dfrac{\pi y}{b},\ u(a,y) = 0$:

թ. $u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = \varphi(x),$
$u_x(0,y) = \psi(y),\ u_x(a,y) = \kappa(y)$:

ժ. $u(x,0) = 0,\ u(x,b) = V_0,$
$u(0,y) = V,\ u(a,y) = 0$:

154. Գտնել $0 \leq x \leq \infty,\ 0 \leq y \leq l$ կիսաշերտում այնպիսի ֆունկցիա, որը բավարարի $u_{xx} + {}_{yy} = 0$ հավասարմանը և հետևյալ եզրային պայմաններին

ա. $u(x,0) = u_y(x,l) = 0,$
$u(0,y) = f(y),\ u(\infty,y) = 0$:

բ. $u_y(x,0) = u_y(x,l) + hu(x,l) = 0,\ h > 0,$
$u(0,y) = f(y),\ u(\infty,y) = 0:$
գ. $u(x,0) = u(x,l) = 0,$
$u(0,y) = y(l-y),\ u(\infty,y) = 0:$
դ. $u_y(x,0) - hu(x,0) = 0,\ u(x,l) = 0,\ h > 0,$
$u(0,y) = l - y,\ u(\infty,y) = 0:$

Գ Լ ՈՒ Խ VI
ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§1. Լապլասի ձևափոխությունը

Սահմանում.

$$F(z) = \int_a^b K(z,t)f(t)dt$$

ֆունկցիան կոչվում է f ֆունկցիայի *ինտեգրալային ձևափոխություն* (պատկեր), f ֆունկցիան՝ F-ի *նախապատկեր*, իսկ K-ն *ինտեգրալային ձևափոխության կորիզ:*

Դիցուք f ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) f-ն անընդհատ է ամենուրեք, բացի գուցե, վերջավոր թվով առաջին սեռի խզման կետերի,

2) գոյություն ունեն այնպիսի $M > 0$ և $s > 0$ հաստատուններ, որ կամայական t-ի համար ճիշտ է $|f(t)| < Me^{st}$ անհավասարությունը:

Այդ դեպքում կամայական p-ի համար $(Rep > s)$, գոյություն ունի

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \quad (F(p) = Lf(t)) \qquad (1)$$

ինտեգրալը, որը $Rep > s$ կիսահարթության մեջ անալիտիկ ֆունկցիա է: (1) բանաձևով որոշվող F ֆունկցիան կոչվում է f ֆունկցիայի *Լապլասի ձևափոխություն:*

Լապլասի ձևափոխության լայն կիրառությունների հիմքում ընկած են հետևյալ հիմնական հատկությունները.

1. $L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)]$,

2. $L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau\right] = L[f_1(t)]L[f_2(t)]$,

3. $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \dfrac{F(p)}{p}$,

4. $L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f_0 - \cdots - p f_0^{n-2} - f_0^{n-1}$,

որտեղ $f_0^{(k)} = \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{d^k f(t)}{dt^k}$,

5. $L[f(t-b)] = e^{-bp} L[f(t)]$,

6. $L[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$, եթե $a > 0$,

7. $L[e^{-\lambda t} f(t)] = F(p+\lambda)$,

8. $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$,

9. Եթե $\frac{f(t)}{t}$ ֆունկցիայի նկատմամբ կարելի է կիրառել Լապլասի ձևափոխություն, ապա $L\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \displaystyle\int_p^{\infty} f(q)dq$:

Որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում f նախապատկերը կարելի է վերականգնել F պատկերի օգնությամբ՝ Լապլասի հակադարձ ձևափոխությամբ: Ստորև ներկայացնում ենք պատկերների և նախապատկերների մի փոքր աղյուսակ, որը կօգնի լուծել այս պարագրաֆի խնդիրները

$Lf(t)$	$f(t)$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t \sin at}{2a}$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
$e^{-z\sqrt{p}}$	$\frac{z}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-z^2/4t}$

Լուծել հետևյալ խնդիրները Լապլասի ձևափոխության օգնությամբ

155. $u_y = u_{xx} + a^2 u + f(x),\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty,$
$u(0,y) = u_x(0,y) = 0,\ 0 < y < \infty$:

156. $u_y = u_{xx} + u + B\cos x,\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$:
$u(0, y) = Ae^{-3y},\ u_x(0, y) = 0,\ 0 < y < \infty$:

157. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ 0 < t,$
$u(+0, t) = \delta(t),\ u(l - 0, t) = 0,\ 0 < t,$
$u(x, +0) = 0,\ 0 < x < l$:

158. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ 0 < t,$
$u(+0, t) = \delta(t),\ u(\infty - 0, t) = 0,\ 0 < t,$
$u(x, +0) = 0,\ 0 < x < \infty$:

159. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ 0 < t,$
$u(+0, t) = \mu(t),\ u(\infty - 0, t) = 0,\ 0 < t,$
$u(x, +0) = 0,\ 0 < x < \infty$:

160. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ 0 < t,$
$u(0, t) = E(t),\ 0 < t,$
$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u(x, t)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, երբ $x \to \infty$:

161. $u_{xx} = a^2 u_{tt} + 2bu_t + c^2 u,\ 0 < x < \infty,\ 0 < t,$
$u(0, t) = E(t),\ 0 < t,$
$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u(x, t)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, երբ $x \to \infty$:

162. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ 0 < t,$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \varphi(t),\ u(\infty, t) = 0,\ 0 < t,$
$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty$:

§**2.**Ֆուրիեի ձևափոխությունը

Ամբողջ թվային առանցքի վրա տրված f ֆունկցիայի *Ֆուրիեի ձևափոխություն* սահմանվում է որպես՝

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipt} f(t)dt : \tag{1}$$

Այս ինտեգրալի գոյության համար բավարար է, որպեսզի տեղի ունենա §1.-ում նշված (1) պայմանը և զուգամիտի $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ ինտեգրալը: Ֆուրիեի ձևափոխության հակադարձը տրվում է

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} F(p) dp \tag{2}$$

բանաձևով:

Եթե f-ը զույգ ֆունկցիա է, ապա (1) և (2) ձևափոխությունները կստանան հետևյալ տեսքերը

$$F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos pt f(t) dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos pt F(p) dp,$$

որոնք կոչվում են Ֆուրիեի կոսինուս ձևափոխություններ:

Եթե f-ը կենտ է, ապա համապատասխանաբար կստանանք

$$F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin pt f(t) dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin pt F(p) dp,$$

որոնք կոչվում են Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություններ:

Շատ հաճախ օգտագործվում է նաև Ֆուրիեի բազմաչափ ձևափոխությունը: Երկչափ դեպքում այն տրվում է հետևյալ բանաձևերով

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi x + \eta y)} f(x, y) dx dy,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} F(\xi, \eta) d\xi d\eta :$$

Մյուս ինտեգրալային ձևափոխություններից նշենք *Ֆուրիե-Բեսելի* ձևափոխությունը՝ ($J_n(t)$ ֆունկցիայի մասին տես գլուխ VII,§1)

$$F_n(p) = \int_0^\infty tJ_n(pt)f(t)dt,$$

որի հակադարձը տրվում է

$$f(t) = \int_0^\infty pJ_n(pt)F_n(p)dp$$

բանաձևով:

Լուծել հետևյալ խնդիրները Ֆուրիեի ձևափոխության օգնությամբ

163. $u_{tt} = a^2u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < \infty :$

164. $u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty :$

165. $u_t = a^2u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty :$

166. $u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty :$

167. $u_t = a^2u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,\ u(0,t) = \mu(t),\ t > 0 :$

168. $u_t = a^2u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,\ u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0 :$

169. $u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,\ u(0,t) = 0,\ t > 0 :$

170. $u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < \infty,$
$u(0,t) = 0,\ t > 0 :$

171. $u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < \infty,$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0:$

172. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u(0,t) = \mu(t),\ t > 0:$

173. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0:$

174. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u(0,t) = 0,\ t > 0:$

175. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u_x(0,t) = 0,\ t > 0:$

176. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < \infty,$
$u(0,t) = 0,\ t > 0:$

177. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < \infty,$
$u_x(0,t) = 0,\ t > 0:$

178. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty,$
$u_x(0,t) = 0,\ t > 0:$

179. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ -\infty < x, y < \infty,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ -\infty < x, y < \infty:$

180. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t),\ -\infty < x, y < \infty,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = 0,\ -\infty < x, y < \infty:$

181. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = f(x,y),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,$
$u(x,0,t) = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0:$

182. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ t > 0,$

$u(x, y, 0) = 0,\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,$
$u(x, 0, t) = f(x, t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0:$

183. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ t > 0,$
$u(x, y, 0) = f(x, y),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,$
$u_y(x, 0, t) = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0:$

Լուծել հետևյալ խնդիրները Ֆուրիե-Բեսելի ձևափոխության օգնությամբ

184. $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ 0 \le r < \infty,\ t > 0,$
$u(r, 0) = f(r),\ u(r, \infty) = 0,\ 0 \le r < \infty,$
$u(\infty, t) = u_r(\infty, t) = 0,\ t > 0:$

Լուծել խնդիրը նաև մասնավոր դեպքում, երբ

$$u(r, 0) = \begin{cases} T,\ r < R \\ 0,\ r > R \end{cases} :$$

185. $b^2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)^2 u + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ 0 \le r < \infty,\ t > 0,$
$u(r, 0) = f(r),\ u_t(r, 0) = 0,\ 0 \le r < \infty:$

Լուծել խնդիրը նաև մասնավոր դեպքում, երբ

$f(r) = Ae^{-\frac{r^2}{a^2}},\ 0 \le r < \infty:$

186. $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ 0 \le r < \infty,\ t > 0,$

$$u_t(r, 0) = \begin{cases} -q/k + hu(r, 0),\ 0 \le r < R \\ hu(r, 0),\ R \le r < \infty \end{cases},$$

$u(r, \infty) = 0,\ 0 \le r < \infty,$
$u(\infty, t) = u_r(\infty, t) = 0,\ t > 0:$

Գ Լ ՈՒ Խ VII
ՀԱՏՈՒԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§1. Գլանային ֆունկցիաներ

$$x^2y^{''} + xy^{'} + (x^2 - m^2)u = 0, \ (-\infty < x < \infty) \qquad (1)$$

հավասարումը կոչվում է *Բեսելի հավասարում*: (1) հավասարման յուրաքանչյուր լուծում կոչվում է *գլանային ֆունկցիա*: Կարելի է ցույց տալ, որ

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+m+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \qquad (2)$$

ֆունկցիան հանդիսանում է (1) հավասարման լուծում: $J_m(x)$ գլանային ֆունկցիան անվանում են *առաջին սեռի m-րդ կարգի Բեսելի ֆունկցիա:* Մասնավորապես՝

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x :$$

Եթե $m > 0$, և ամբողջ չէ, ապա $J_m(x)$ և $J_{-m}(x)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, իսկ

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 J_{-m}(x)$$

կհանդիսանա (1) հավասարման ընդհանուր լուծում: Եթե m-ը ամբողջ է, ապա

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) :$$

Այս դեպքում (1) հավասարման երկրորդ գծորեն անկախ լուծում է հանդիսանում

$$Y_m(x) = \lim_{n\to m} \frac{J_n(x)\cos\pi n - J_{-n}(x)}{\sin\pi n} \tag{3}$$

ֆունկցիան: Նաև կոտորակային m-ի դեպքում $Y_m(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1) հավասարման լուծում և սահմանվում է այսպես

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x)\cos\pi m - J{-}m(x)}{\sin\pi m} : \tag{4}$$

$Y_m(x)$ ֆունկցիան անվանում են *Նեյմանի կամ Վեբերի ֆունկցիա*, երբեմն էլ, *երկրորդ սեռի m-րդ կարգի գլանային ֆունկցիա:* Քանի որ, $Y_m(x)$ և $J_m(x)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են (կամայական m-ի դեպքում)՝ (1) հավասարման ցանկացած լուծում կունենա հետևյալ տեսքը

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x) :$$

Նշենք Բեսելի ֆունկցիաների որոշ կարևոր հատկություններ:

ա. Եթե μ_1 և μ_2-ը հանդիսանում են

$$\alpha J_m(\mu) + \beta\mu J_m^{'}(\mu) = 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha+\beta > 0 \tag{5}$$

հավասարման դրական արմատներ, ապա $m > -1$-ի համար ունենք

$$\int_0^1 x J_m(\mu_1 x) J_m(\mu_2 x)dx = 0,\ \mu_1 \neq \mu_2,$$

$$\int_0^1 x J_m^2(\mu_1 x)dx = \frac{1}{2}(J_m^{'}(\mu_1))^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m^2}{\mu_1^2}\right) J_m^2(\mu_1) :$$

բ. Տեղի ունեն հետևյալ անդրադարձ բանաձևերը

$$J_m^{'}(x) = J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x),$$

$$J_m'(x) = -J_{m+1}(x) + \frac{m}{x} J_m(x),$$

$$J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x) = 0 :$$

գ. Եթե $m = 0, 1, 2, \cdots$, ապա

$$J_{m+1/2}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+1/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{\sin x}{x},$$

$$J_{-m-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+1/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{\cos x}{x} :$$

դ. $m > -1$ դեպքում, (5) հավասարման (եթե $\beta = 0$, ապա (5)-ով որոշվում են Բեսելի ֆունկցիաների զրոները) արմատները իրական են, պարզ են, բացի, գուցե 0-ից, սիմետրիկ են դասավորված 0-ի նկատմամբ և չունեն վերջավոր սահմանային կետեր:

ե. Տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} m - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \;\; x \to \infty,$$

որտեղից հետևում է $J_m(x)$ ֆունկցիայի զրոների հետևյալ մոտավոր բանաձևը (մեծ x-ի համար)

$$\mu_k^{(m)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m + \pi k :$$

զ. $J_m(\mu_k^{(m)} x), \; k = 1, 2, \cdots$ ֆունկցիաները կազմում են լրիվ համակարգ $L_2[(0,l); x]$ կշռային տարածությունում: Սա նշանակում է, որ կամայական $f \in L_2[(0,l); x]$ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m \left(\mu_k \frac{x}{l} \right), \quad m > -1 \qquad (6)$$

շարքի տեսքով, որտեղ

$$a_k = \frac{2}{l^2 J_{m+1}^2(\mu_k)} \int_0^l x f(x) J_m\left(\mu_k \frac{x}{l}\right) dx, \tag{7}$$

իսկ μ_k-ն ($k \in Z$) $J_m(x) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են՝ դասավորված աճման կարգով: Եթե (6) վերլուծությունում μ_k թվերը հանդիսանում են (5) հավասարման արմատներ և $\dfrac{\alpha}{\beta} + m > 0$, ապա

$$a_k = \frac{2}{l^2\left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 m^2}{\beta^2 \mu_k^2}\right) J_m^2(\mu_k)} \int_0^l x f(x) J_m\left(\mu_k \frac{x}{l}\right) dx, \tag{8}$$

իսկ եթե $\dfrac{\alpha}{\beta} + m = 0$, ապա (6) վերլուծությունը հարկավոր է փոխարինել հետևյալով

$$f(x) = a_0 x^m + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m\left(\mu_k \frac{x}{l}\right), \ (m > -1) \tag{9}$$

որտեղ a_k թվերը $(k = 1, 2, \cdots)$ որոշվում են (8) բանաձևով, իսկ

$$a_0 = \frac{2(m+1)}{l^{2(m+1)}} \int_0^l x^{m+1} f(x) dx : \tag{10}$$

(6) վերլուծությունը, որտեղ a_k գործակիցները որոշվում են (7) բանաձևով անվանում են *Ֆուրիե-Բեսելի* շարք, իսկ եթե (8) բանաձևով, ապա *Դինի-Բեսելի* շարք:

Կիրառություններում կարևոր նշանակություն ունեն նաև հետևյալ գլանային ֆունկցիաները

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x),$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x)$$

որոնք կոչվում են *առաջին սեռի Հանկելի ֆունկցիաներ,* կամ *երրորդ սեռի գլանային ֆունկցիաներ*: Օգտագործելով այս ֆունկցիաները՝ (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է

$$y(x) = C_1 H_n^{(1)}(x) + C_2 H_n^{(2)}(x)$$

տեսքով, իսկ օգտագործելով

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$$

կեղծ արգումենտով առաջին սեռի Բեսելի ֆունկցիաները և

$$K_m(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi m i/2} H_m^{(1)}(ix)$$

կեղծ արգումենտով երկրորդ սեռի Բեսելի ֆունկցիաները (կամ Մակդոնալդի)

$$x^2 y^{''} + x y^{'} - (x^2 + m^2) u = 0, \ (-\infty < x < \infty)$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը կգրվի

$$y(x) = C_1 I_m(x) + C_2 I_{-m}(x)$$

տեսքով, երբ m-ը ամբողջ է և

$$y(x) = C_1 I_m(x) + C_2 K_m(x)$$

տեսքով, երբ m-ը կոտորակային է:

Օգտակար են նաև հետևյալ բանաձևերը

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

$$\int_0^x x^3 J_0(x) dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x) :$$

Լուծել հետևյալ խնդիրները

187. $u_{tt}=a^2(xu_x)_x,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x):$

188. $u_{tt}=a^2(xu_x)_x+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x):$

189. $u_{tt}=a^2(xu_x)_x+A\sin\omega t,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(l,t)=u(x,0)=u_t(x,0)=0:$

190. $u_{tt}=a^2(xu_x)_x+\omega^2 u,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x):$

191. $u_{tt}=\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right),\ 0<r<R,\ t>0,$
$u(R,t)=0,\ u(r,0)=AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),\ u_t(r,0)=0:$

192. $u_{tt}=\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right),\ 0<r<R,\ t>0,$
$u(R,t)=0,\ u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=r:$

193. $u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right),\ 0<r<R,\ t>0,$
$u_r(R,t)=0,\ u(r,0)=\varphi(r),\ u_t(r,0)=\psi(r):$

194. $u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right),\ 0<r<R,\ t>0,$
$u(R,t)=0,\ u(r,0)=A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),\ u_t(r,0)=0:$

195. Համասեռ շրջանային $(0<r<R)$ թաղանթը կատարում է փոքր լայնական տատանումներ դիմադրություն չունեցող միջավայրում: Որոշել թաղանթի տատանումները, եթե նրա կետերի սկզբնական արագությունը U-է: Թաղանթի եզրը կոշտ ամրացված է:

196. $u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\right),\ 0<r<R,\ t>0,$

$$u(R,\varphi,t)=0,\ u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi),\ u_t(r,\varphi,0)=F(r,\varphi):$$

197. $u_{tt}=a^2\left(\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r-\frac{2u}{r^2}\right),\ 0<r<R,\ t>0,$
$u_r(R,t)=0,\ u(r,0)=vr,\ u_t(r,0)=0,$

198. $u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\right),$
$0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi,\ t>0,$
$u_r(R,\varphi,t)=0,\ u(r,\varphi,0)=v_0r\cos\varphi,\ u_t(r,\varphi,0)=0:$

199. Գտնել անվերջ շրջանային $(0\le r\le R)$ գլանի ջերմաստիճանը, եթե նա ունեցել է զրոյական սկզբնական ջերմաստիճան, իսկ մակերևույթը պահվում է $H_0\cos\omega t$ ջերմաստիճանում:

200. Գտնել անվերջ շրջանային $(0\le r\le R)$ գլանի ջերմաստիճանը, եթե նա ունեցել է $U_0=const$ սկզբնական ջերմաստիճան, իսկ նրա մակերևույթին դրսից հաղորդվում է q խտությամբ ջերմային հոսք:

201. Գտնել անվերջ շրջանային $(0\le r\le R)$ գլանի ջերմաստիճանը, եթե նա ունեցել է $U_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ սկզբնական ջերմաստիճան, իսկ մակերևույթը պահվում է զրոյական ջերմաստիճանում:

202. Գտնել անվերջ շրջանային $(0\le r\le R)$ գլանի ջերմաստիճանը, եթե նրա սկզբնական ջերմաստիճանը եղել է Ur^2: Դիտարկել հետևյալ դեպքերը`

ա. գլանի մակերևույթը ջերմամեկուսացված է,

բ. գլանի մակերևույթին կատարվում է ջերմափոխանակություն զրոյական ջերմաստիճան ունեցող միջավայրի հետ,

գ. գլանի մակերևույթը պահվում է T հաստատուն ջերմաստիճանում:

203. Գտնել անվերջ շրջանային $(0\le r\le R)$ գլանի ջերմաստիճանը, եթե նա ունեցել է $U_0=const$ սկզբնական ջերմաստիճան, իսկ նրա մակերևույթին կատարվում է ջերմափոխանակություն $U_1=const$ ջերմաստիճան ունեցող միջավայրի հետ: Դիտարկել նաև այն դեպքը, երբ արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանը $U_1+\alpha t$ է:

204. Գտնել համասեռ և վերջավոր $(0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < z < l)$ գլանի ջերմաստիճանը, եթե նա ունեցել է $A(R^2-r^2)z$ սկզբնական ջերմաստիճան: Դիտարկել հետևյալ դեպքերը

ա. գլանի կողմնային մակերևույթը և ստորին հիմքը պահվում են զրոյական ջերմաստիճանում, իսկ վերին հիմքը ջերմամեկուսացված է,

բ. վերին հիմքը պահվում է զրոյական ջերմաստիճանում, ստորինը՝ ջերմամեկուսացված է, իսկ կողմնային մակերևույթին կատարվում է ջերմափոխանակություն զրոյական ջերմաստիճան ունեցող միջավայրի հետ:

205. $$u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right),\ r_1 < r < r_2,\ t > 0,$$
$$u(r_1,t) = u(r,0) = 0,\ u_r(r_2,t) = \frac{q_0}{\lambda}\ :$$

206. Գտնել համասեռ և վերջավոր $(0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < z < l)$ գլանի ստացիոնար ջերմաստիճանը: Դիտարկել հետևյալ դեպքերը՝

ա. ստորին հիմքն ունի T ջերմաստիճան, մնացած մակերևույթը զրոյական ջերմաստիճան,

բ. ստորին հիմքն ունի զրոյական ջերմաստիճան, վերին հիմքը ջերմամեկուսացված է, իսկ կողմնային մակերևույթի ջերմաստիճանը $f(z)$ է,

գ. գլանում կան Q ծավալային խտությամբ ջերմային աղբյուրներ, իսկ մակերևույթն ունի զրոյական ջերմաստիճան:

207. $$\frac{1}{r}(ru_r)_r + u_{zz} = 0,\ 0 < r < R,\ 0 < z < l,$$
$$u(R,z) = T,\ u(r,0) = u(r,l) = 0\ :$$

208. $$\frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0,$$
$$0 < r < R,\ 0 < z < l,\ 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$u(R,\varphi,z) = 0,\ u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi),\ u(r,\varphi,l) = F(r,\varphi)\ :$$

209. Գտնել վերջավոր գլանում այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա, որն ընդունում է զրոյական արժեքներ գլանի հիմքերի վրա, իսկ $r = R$ մակերևույթի վրա՝ $Az\left(1 - \dfrac{z}{l}\right)$:

§2. Սֆերիկ և գնդային ֆունկցիաներ, Լեժանդրի բազմանդամներ

$S_1 \subset R^n$ միավոր սֆերայի վրա որոշված, կամայական ℓ-րդ կարգի համասեռ հարմոնիկ բազմանդամ անվանում են *ℓ-րդ կարգի սֆերիկ ֆունկցիա (սֆերիկ հարմոնիկ)* և նշանակում են $Y_\ell(s)$-ով, որտեղ $s \in S_1$:

Գտնենք բոլոր ℓ-րդ կարգի $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ սֆերիկ ֆունկցիաները շրջանագծի վրա $(n = 2)$: Դա հարմար է իրականացնել (r, φ) $(0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ բևեռային կոորդինատներում: $u_\ell(x) = r^\ell Y_\ell(\varphi)$ հարմոնիկ բազմանդամի վրա կիրառելով Լապլասի օպերատորը ստանում ենք

$$Y_\ell^{''} + \ell^2 Y_\ell = 0,$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղից

$$Y_\ell(\varphi) = a_\ell \cos \ell\varphi + b_\ell \sin \ell\varphi,\ l = 0, 1, \cdots,$$

$$u_\ell(x) = r^\ell (a_l \cos \ell\varphi + b_\ell \sin \ell\varphi) :$$

Այսպիսով շրջանագծի վրա որոշված սֆերիկ ֆունկցիաները՝ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն են:

Այժմ գտնենք բոլոր սֆերիկ ֆունկցիաները միավոր սֆերայի վրա $(n = 3)$: Դա հարմար է իրականացնել (r, θ, φ) $(0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ սֆերիկ կոորդինատներում: Կիրառելով Լապլասի օպերատորը $u_\ell(x) = r^\ell Y_\ell(\theta, \varphi)$ հարմոնիկ բազմանդամի վրա ստանում ենք

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y_\ell}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_\ell}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell + 1) Y_\ell = 0 : \qquad (1)$$

Հայտնի է հետևյալ փաստը՝ որպեսզի Y_ℓ-ը հանդիսանա ℓ-րդ կարգի սֆերիկ ֆունկցիա անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այն հանդիսանա (1) հավասարման լուծում և պատկանի $C^\infty(S_1)$ դասին:

(1) հավասարման լուծումների որոնման համար կիրառենք Ֆուրիեի մեթոդը: Y_ℓ-ը փնտրենք

$$Y_\ell(\theta,\varphi) = P(\cos\theta)\Phi(\varphi) \tag{2}$$

տեսքով: Տեղադրենք (2)-ը (1)-ի մեջ և անջատենք փոփոխականները՝ $(\nu = const)$

$$\Phi^{''} + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\cos\theta)}{d\theta}\right) + \\ + \left[\ell(\ell+1) - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right]P(\cos\theta) = 0 : \tag{4}$$

Որպեսզի (2) ֆունկցիան միարժեք լինի S_1-ի վրա, անհրաժեշտ է, որ $\Phi(\varphi)$ ֆունկցիան ունենա 2π պարբերություն: Այդպիսի լուծումներ (3) հավասարումն ունի միայն $\nu = m^2$ դեպքում $(m = 0, 1, \cdots)$ և

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} :$$

Այսպիսով (4) հավասարումը պետք է լուծել $\nu = m^2$, $m = 0, 1, \cdots$ դեպքում: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում $\mu = \cos\theta$

$$-\left((1-\mu^2)P^{'}\right)^{'} + \frac{m^2}{1-\mu^2}P = \ell(\ell+1)P : \tag{5}$$

Մեզ հարկավոր են (5) հավասարման այն լուծումները, որոնք ընդունում են վերջավոր արժեքներ ± 1 կետերում:

$m = 0$ դեպքում (5) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$\left((1-\mu^2)P^{'}\right)^{'} + \ell(\ell+1)P : \tag{6}$$

(6) հավասարման լուծում են հանդիսանում

$$P_\ell(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{d\mu^\ell}(\mu^2-1)^\ell,\ \ \ell = 0, 1, \cdots \tag{7}$$

ֆունկցիաները, որոնց անվանում են *Լեժանդրի բազմանդամներ*, իսկ (7) ներկայացումը հայտնի է որպես *Ռոդրիգեսի բանաձև:*

Լեժանդրի բազմանդամները կազմում են լրիվ օրթոգոնալ համակարգ $L_2(-1,1)$ տարածությունում և բացի այդ

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^2(\mu)d\mu = \frac{2}{2\ell+1} :$$

Այստեղից հետևում է, որ կամայական $f \in L_2(-1,1)$ ֆունկցիա վերլուծվում է շարքի ըստ Լեժանդրի բազմանդամների

$$f(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{2}(f, P_\ell)P_\ell(\mu) :$$

Բացահայտ ներկայացնենք առաջին չորս բազմանդամները՝

$$P_0(\mu) = 1,\ \ P_1(\mu) = \mu,\ \ P_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2},\ \ P_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu :$$

Նշենք Լեժանդրի բազմանդամների որոշ պարզագույն հատկությունները՝

ա. $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$:

բ. $P_{2\ell-1}(0) = 0,\ \ P_{2\ell}(0) = (-1)^\ell \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\ell-1)}{\ell!2^\ell}$:

գ. $P_\ell(1) = 1,\ \ P_\ell(-1) = (-1)^\ell$:

դ. Ճիշտ է հետևյալ անդրադարձ բանաձևը

$(2\ell+1)P_\ell(\mu) = P'_{\ell+1}(\mu) - P'_{\ell-1}(\mu),$

ե. Լեժանդրի $P_\ell(x)$ բազմանդամի բոլոր արմատները իրական են, տարբեր և ընկած են $(-1,1)$ բաց միջակայքում:

գ. $$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n, & |z|<1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{z^{n+1}}, & |z|>1 \end{cases}, -1 \le x \le 1 :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$P_\ell^m(\mu) = (1-\mu^2)P_\ell^{(m)}(\mu), \ l=0,1,\cdots; \ m=0,1,\cdots,l$$

ֆունկցիաները *(Լեժանդրի համակցված բազմանդամներ)* հանդիսանում են (5) հավասարման լուծումներ: Հայտնի է, որ կամայական $m \ge 0$-ի համար, P_ℓ^m $(\ell = m, m+1, \cdots)$ ֆունկցիաների համակարգը լրիվ է և օրթոգոնալ $L_2(-1,1)$ տարածությունում և

$$\int_{-1}^{1} (P_\ell^m)^2 \, dx = \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1} :$$

Այսպիսով, ստացանք (1) հավասարման լուծումների հետևյալ համախումբը

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} P_\ell^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \ m=0,1,\cdots,\ell \\ P_\ell^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi, \ m=-1,-2,\cdots,-\ell \end{cases},$$

$$\ell = 0,1,\cdots$$

Այս ֆունկցիաները պատկանում են $C^\infty(S_1)$ դասին և հետևաբար հանդիսանում են սֆերիկ ֆունկցիաներ: ℓ-րդ կարգի Y_ℓ^m, $m = 0, \pm 1, \cdots, \pm\ell$ սֆերիկ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են և նրանց գծային կոմբինացիան

$$Y_\ell(s) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_\ell^m Y_\ell^m(s)$$

նույնպես հանդիսանում է ℓ-րդ կարգի սֆերիկ ֆունկցիա: Հայտնի է, որ $\{Y_\ell^m\}$ համակարգը լրիվ է և օրթոգոնալ $L_2(S_1)$ տարածությունում և

$$\int_{S_1} (Y_\ell^m(s))^2 \, ds = 2\pi \frac{1+\delta_{0m}}{2\ell+1} \frac{(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!} :$$

Սա նշանակում է, որ կամայական ֆունկցիա $L_2(s)$ դասից կարելի է ներկայացնել

$$f(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_\ell^m Y_\ell^m(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} Y_\ell(s)$$

շարքի տեսքով, որտեղ

$$a_\ell^m = \frac{2\ell+1}{2\pi(1+\delta_{0m})} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \times$$

$$\times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) Y_\ell^m(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi$$

Այժմ կառուցենք Լապլասի հավասարման լուծումները (r,θ,φ) սֆերիկ կոորդինատներում: Լուծումը փնտրենք

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

տեսքով: Տեղադրելով այս լուծումը $\Delta u = 0$ հավասարման մեջ կստանանք հետևյալ հավասարումները R և Y ֆունկցիաների որոշման համար

$$(r^2 R^{'})^{'} - \mu R = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \mu Y = 0, \tag{9}$$

որտեղ μ-ն անհայտ պարամետր է, իսկ $Y \in C^\infty(S_1)$: Եթե $\mu = \ell(\ell+1)$, ապա (9) հավասարումն ունի $C^\infty(S_1)$ դասից լուծումներ, որոնք մեզ արդեն հայտնի Y_ℓ^m, $m = 0, \pm1, \cdots, \pm\ell$ սֆերիկ ֆունկցիաներն են: $\mu = \ell(\ell+1)$ դեպքում (8)-ն ունի երկու գծորեն անկախ լուծումներ r^ℓ և $r^{-\ell-1}$: Այսպիսով Լապլասի հավասարումն ունի լուծումների հետևյալ գծորեն անկախ համախումբը

$$r^\ell Y_\ell(\theta,\varphi),\ r^{-\ell-1} Y_\ell(\theta,\varphi),\ \ell = 0, 1, \cdots \tag{10}$$

որտեղ $r^{\ell}Y_{\ell}$-ը ℓ -րդ կարգի հարմոնիկ բազմանդամ է, իսկ $r^{-\ell-1}Y_{\ell}(\theta,\varphi)$-ն ℓ-րդ կարգի հարմոնիկ ֆունկցիա է $R^3 \setminus \{0\}$-ում: (10) ֆունկցիաներն անվանում են *գնդային ֆունկցիաներ:*

Լուծել հետևյալ խնդիրները

210. $u_{tt} = a^2((l^2 - x^2)u_x)_x,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),$
$|u(x,t)| < \infty:$

211. $u_{tt} = a^2((l^2 - x^2)u_x)_x + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ |u(x,t)| < \infty:$

212. Լուծել Դիրիխլեի ներքին խնդիրը a շառավղով սֆերայի համար՝ $f(\theta,\varphi)$ եզրային պայմանով: Դիտարկել հետևյալ մասնավոր դեպքերը

ա. $f(\theta,\varphi) = \cos\theta:$

բ. $f(\theta,\varphi) = \cos^2\theta:$

գ. $f(\theta,\varphi) = \cos 2\theta:$

դ. $f(\theta,\varphi) = \sin^2\theta:$

213. Լուծել Դիրիխլեի արտաքին խնդիրը a շառավղով սֆերայի համար՝ $f(\theta,\varphi)$ եզրային պայմանով:

214. Լուծել Նեյմանի ներքին խնդիրը a շառավղով սֆերայի համար՝ $f(\theta,\varphi)$ եզրային պայմանով:

215. Լուծել Նեյմանի արտաքին խնդիրը a շառավղով սֆերայի համար՝ $f(\theta,\varphi)$ եզրային պայմանով:

216. Գտնել էլեկտրաստատիկ դաշտի պոտենցիալը a շառավղով այն սֆերի ներսում և դրսում, որի վերին կեսն ունի V_1 պոտենցիալ, իսկ ստորինը՝ V_2:

217. Գտնել e կետային լիցքի ստեղծած պոտենցիալը, որը գտնվում է a շառավղով, հողակցված, իդեալական հաղորդիչ սֆերայի

ա. ներսում,

բ. դրսում:

218. Գտնել e կետային լիցքի ստեղծած պոտենցիալը, որը գտնվում է a շառավղով, մեկուսացված, իդեալական հաղորդիչ սֆերայի դրսում:

219. Q հզորությամբ կետային աղբյուրը տեղավորված է a շառավղով սֆերայի ներսում, որի մակերևույթին կատարվում է ջերմափոխանակություն զրոյական ջերմաստիճան ունեցող միջավայրի հետ: Գտնել ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխումը սֆերայի ներսում:

220. Գտնել a և b շառավիղներով համակենտրոն հողակցված սֆերաների միջև տեղադրված e կետային լիցքի ստեղծած պոտենցիալը:

221. $$u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right),$$
$$u(r_0,\theta,\varphi,t) = 0,\ u(r,\theta,\varphi,0) = f(r,\theta,\varphi):$$

222. $$u_{tt} = a^2\left(\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta\right),$$
$$0 \le r \le r_0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ t > 0,$$
$$u_r(r_0,\theta,t) = P_n(\cos\theta)f(t),\ u(r,\theta,0) = u_t(r,\theta,0) = 0:$$

223.
$$u_{tt} = a^2\left(\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right),$$
$$0 \le r \le r_0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t > 0,$$
$$u_r(r_0,\theta,\varphi,t) = f(t)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ f(0) = f'(0) = 0,$$
$$u(r,\theta,\varphi,0) = u_t(r,\theta,\varphi,0) = 0:$$

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1.

ա. Ոչ: բ. Այո: գ. Ոչ: դ. Ոչ: ե. Ոչ: զ. Ոչ:

2.

ա. Առաջին: բ. Երկրորդ: գ. Առաջին: դ. Առաջին: ե. Երկրորդ:
զ. Երկրորդ:

3.

ա. Ոչգծային: բ. Քվազիգծային: գ. Գծային, անհամասեռ: դ. Գծային, համասեռ: ե. Գծային, անհամասեռ:: զ. Ոչգծային: է. Գծային, անհամասեռ, եթե $h(x,y) \not\equiv 0$: ը. Քվազիգծային: թ. Քվազիգծային: ժ. Քվազիգծային: ի. Քվազիգծային (ավագ ածանցյալների նկատմամբ գծային է): լ. Գծային, համասեռ:

4.

ա. $z = f(x^2+y^2)$: բ. $z = f(xy+y^2)$: գ. $u = f(y/x, z/x)$:
դ. $u = f((x-y)/z, (x+y+2z)^2/z)$:
ե. $F(x^2-y^2, x-y+z) = 0$:
զ. $F\left(e^{-x}-y^{-1}, z+\dfrac{x-ln|y|}{e^{-x}-y^{-1}}\right) = 0$:
է. $F(x^2-4z, (x+y)^2/x) = 0$: ը. $F(x^2+y^2, z/x) = 0$:
թ. $F\left(\dfrac{x^2}{y}, xy-\dfrac{3z}{x}\right) = 0$: ժ. $F\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{z}\right) = 0$:
ի. $F(x^2+y^4, y(z+\sqrt{z^2+1})) = 0$:
լ. $F\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}, ln|xy|-\dfrac{z^2}{2}\right) = 0$:
խ. $F(x^2+y^2, arctg(x/y)+(z+1)e^{-x}) = 0$:
ծ. $F(z^2-y^2, x^2+(y-z)^2) = 0$:
կ. $F(\dfrac{z}{x}, 2x-4z-y^2) = 0$: հ. $F(z-ln|x|, 2x(z-1)-y^2) = 0$:
ձ. $F(tgz+ctgx, 2y+2tgzctgx+ctg^2x) = 0$:
ղ. $F((x+y+z)/(x-y)^2, (x-y)(x+y-2z)) = 0$:

ճ. $F((x-y)(z+1),(x+y)(z-1))=0$:
մ. $F(u(x-y),u(y-z),(x+y+z)/u^2))=0$:
յ. $F(x/y,xy-2u,(z+u-xy)/x))=0$:
ն. $F((x-y)/z,(2u+x+y)z,(u-x-y)/z^2))=0$:

5.
ա. $z=2xy$: բ. $z=ye^x-e^{2x}+1$: գ. $z=y^2e^{2\sqrt{x}-2}$:
դ. $u=(1-x+y)(2-2x+z)$: ե. $u=(xy-2z)(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x})$:

6.
ա. $y^2-x^2-ln\sqrt{y^2-x^2}=z-ln|y|$:
բ. $2x^2(y+1)=y^2+4z-1$: գ. $(x+2y)^2=2x(z+xy)$:
դ. $\sqrt{z/y^3}\sin x=\sin\sqrt{z/y}$: ե. $2xy+1=x+3y+z^{-1}$:
զ. $x-2y=x^2+y^2+z$: է. $2x^2-y^2-z^2=a^2$:
ը. $((y^2z-2)^2-x^2+z)y^2z=1$: թ. $x^2+z^2=5(xz-y)$:
ժ. $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$: ի. $xz(xz-y-x+2z)^2$:
լ. $(1+yz)^3=3yz(1+yz-x)+y^3$: խ. $x+y+z=0$:
ծ. $2(x^3-4z^3-3yz)^2=9(y+z^2)^3$:
կ. $(x-y)(3x+y+4z)=4z$: հ. $xz+y^2=0$:

7.

ա. Հիպերբոլական: բ. Էլիպտական: գ. Պարաբոլական: դ. Էլիպտական:
ե. Հիպերբոլական: զ. Պարաբոլական: է. Հիպերբոլական:
ը. Հիպերբոլական: թ. Պարաբոլական: ժ. Էլիպտական:
ի. Պարաբոլական, երբ $y=0$, հիպերբոլական, երբ $y<0$, էլիպտական, երբ $y>0$: լ. Պարաբոլական, երբ $x=0$, $y\neq 0$, պարաբոլական, երբ $y=0$, $x\neq 0$, հիպերբոլական, երբ $signx\neq signy$, էլիպտական, երբ $signx=signy$:

խ. $y^2(x-x_1)(x-x_2)$ արտահայտությունը հավասարման որոշիչն է, որտեղ $x_1=-\dfrac{1-\sqrt{1-4l}}{2}$, $x_2=-\dfrac{1+\sqrt{1-4l}}{2}$: Թող $l<1/4$: Այս դեպքում x_1-ը և x_2-ը իրական են և երբ $x<x_1$, կամ $x>x_2$՝

հավասարումը հիպերբոլական է, իսկ $x_1 < x < x_2$ դեպքում՝ էլիպտական: Եթե $x = x_1$, կամ $x = x_2$, ապա հավասարումը պարաբոլական է: $l = 1/4$ դեպքում էլիպտականության տիրույթն անհետանում է, քանի որ $x_1 = x_2 = -1/2$ և այս դեպքում $x = -1/2$ ուղղի վրա հավասարումը պարաբոլական է: $l > 1/4$ դեպքում հավասարումն ամենուրեք հիպերբոլական է:

ծ. Եթե $x < 0$ ապա հիպերբոլական է, $x > 0$՝ էլիպտական, $x = 0$՝ պարաբոլական:

կ. Առաջին և երրորդ քառորդներում էլիպտական է, երկրորդ և չորրորդ քառորդներում՝ հիպերբոլական:

հ. Առաջին և երկրորդ քառորդներում պարաբոլական է, երրորդ և չորրորդ քառորդներում՝ հիպերբոլական:

ձ. Առաջին և երկրորդ քառորդներում հիպերբոլական է, երրորդ և չորրորդ քառորդներում՝ էլիպտական:

ղ. Առաջին և երրորդ քառորդներում պարաբոլական է, երկրորդ և չորրորդ քառորդներում՝ հիպերբոլական:

ճ. Հիպերբոլական է ամենուրեք, բացի կոորդինատական առանցքներից, որտեղ պարաբոլական է:

մ. Պարաբոլական է ամենուրեք:

8.

ա. Ամենուրեք էլիպտական է:

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0, \xi = y, \eta = arctgx$:

բ. Ամենուրեք պարաբոլական է, բացի կոորդինատների սկզբնակետից:

$v_{\eta\eta} - \dfrac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)} + \dfrac{1}{2\eta}v_\eta = 0, \xi = y^2 - x^2, \eta = x^2$:

գ. Ամենուրեք հիպերբոլական է: $v_{\xi\eta} = 0$,

$\xi = x + arctgy, \eta = x - arctgy$:

դ. Ամենուրեք էլիպտական է: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 2v = 0$,

$\xi = ln(x + \sqrt{1+x^2}), \eta = ln(y + \sqrt{1+y^2})$:

ե. Ամենուրեք պարաբոլական է, բացի կոորդինատների սկզբնակետից:

$v_{\eta\eta} + 2\dfrac{\xi^2}{\eta^2}v_\xi + \dfrac{1}{\eta}e^\xi = 0$, $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$:

գ. Ամենուրեք պարաբոլական է, բացի $x = 0$ առանցքից:

$v_{\eta\eta} + 2\frac{\eta^2}{\xi-\eta^2}v_\xi - \frac{1}{\eta}v_\eta = 0$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x$:

է. Ամենուրեք հիպերբոլական է:

$v_{\xi\eta} = 0$, $\xi = x + y - \cos x$, $\eta = -x + y - \cos x$:

ը. Ամենուրեք պարաբոլական է:

$v_{\eta\eta} - \dfrac{\xi}{1+\xi e^\eta}v_\xi - \eta e^{-2\eta} = 0$, $\xi = e^{-\eta} - e^{-x}$, $\eta = x$:

թ. Պարաբոլական է, եթե $x = 0$ և այդ դեպքում $u_{xx} = 0$:

Հիպերբոլական է, եթե $x \neq 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\eta} - \dfrac{1}{2(\xi-\eta)}v_\xi = 0$, $\xi = x^2 + y$, $\eta = y$:

ժ. Պարաբոլական է, եթե $x = 0$ և այդ դեպքում $u_{yy} = 0$:

Հիպերբոլական է, եթե $x > 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2(\xi-\eta)}(v_\xi - v_\eta) = 0$, $\xi = y - x + 2\sqrt{x}$, $\eta = y - x - 2\sqrt{x}$:

Էլիպտական է, եթե $x < 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \dfrac{1}{\eta}v_\eta = 0$, $\xi = y - x$, $\eta = 2\sqrt{-x}$:

ի. Պարաբոլական է, եթե $y = 0$ և այդ դեպքում $u_{yy} = 0$:

Հիպերբոլական է, եթե $y < 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\eta} + \dfrac{1}{6(\xi+\eta)}(v_\xi + v_\eta) = 0$,

$\xi = \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x$, $\eta = \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x$:

Էլիպտական է, եթե $y > 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \dfrac{1}{3\xi}v_\xi = 0$, $\xi = \frac{2}{3}y^{3/2}$, $\eta = x$:

լ. Պարաբոլական է $x = 0$ և $y = 0$ առանցքների վրա և այդ դեպքում $u_{xx} = 0$: Հիպերբոլական է, եթե $x > 0$, $y < 0$ կամ $x < 0$, $y > 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\eta} - \dfrac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}((2\xi-\eta)v_\xi - (2\eta-\xi)v_\eta) = 0$,

$\xi = -2(-y)^{1/2} + \dfrac{2}{3}x^{3/2}$,

$\eta = -2(-y)^{1/2} - \dfrac{2}{3}x^{3/2}$, եթե $x > 0,\ y < 0$,

$\xi = -2y^{1/2} + \dfrac{2}{3}(-x)^{3/2}$,

$\eta = -2y^{1/2} - \dfrac{2}{3}(-x)^{3/2}$, եթե $x < 0,\ y > 0$:

Էլիպտական է, եթե $x > 0,\ y > 0$ կամ $x < 0,\ y < 0$ և այդ դեպքում

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \dfrac{1}{\xi}v_\xi + \dfrac{1}{3\eta}v_\eta$,

$\xi = 2\sqrt{y}$, $\eta = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$, եթե $x > 0,\ y > 0$,

$\xi = 2\sqrt{-y}$, $\eta = \dfrac{2}{3}(-x)^{3/2}$, եթե $x < 0,\ y < 0$:

խ. Ամենուրեք պարաբոլական է:

$27v_{\eta\eta} - 105v_\xi + 30v_\eta - 150v - 2\xi + 5\eta = 0$,

$\xi = x + 3y$, $\eta = x$:

ծ. Ամենուրեք պարաբոլական է:

$v_{\eta\eta} + 18v_\xi + 9v_\eta - 9v = 0$, $\xi = y + x$, $\eta = x$:

9.

ա. $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - \dfrac{15}{2}w = 0$, $\xi = 2x + y$, $\eta = x$,

$v(\xi,\eta) = u(\eta, \xi - 2\eta) = e^{\frac{5\xi+3\eta}{2}}w(\xi,\eta)$:

բ. $w_{\eta\eta} - w_\xi = 0$, $\xi = 3x + y$, $\eta = x$,

$v(\xi,\eta) = u(\eta, \xi - 3\eta) = e^{\frac{-\xi+2\eta}{4}}w(\xi,\eta)$:

գ. $w_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2}w + \dfrac{\eta}{2}e^{\xi/2} = 0$, $\xi = 2x + y$,

$\eta = x$, $v(\xi,\eta) = u(\eta, \xi - 2\eta) = e^{\frac{-\xi}{2}}w(\xi,\eta)$:

դ. $w_{\xi\eta} - 7w = 0$, $\xi = 2x - y$, $\eta = x$,

$v(\xi,\eta) = u(\eta, 2\eta - \xi) = e^{-\xi-6\eta}w(\xi,\eta)$:

ե. $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - \dfrac{3}{2}w = 0$, $\xi = 2y - x$, $\eta = x$,

$v(\xi,\eta) = u(\eta, \dfrac{\xi+\eta}{2}) = e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta)$:

զ. $w_{\eta\eta} - 2w_\xi = 0$, $\xi = y - x$, $\eta = x + y$,

$v(\xi,\eta)=u(\dfrac{\eta-\xi}{2},\dfrac{\xi+\eta}{2})=e^{\frac{16\xi+8\eta}{32}}w(\xi,\eta)$:

է. $w_{\xi\eta}-w=0, \xi=x-y, \eta=x+y,$

$v(\xi,\eta)=u(\dfrac{\eta+\xi}{2},\dfrac{\eta-\xi}{2})=e^{-\xi/2}w(\xi,\eta)$:

ը. $w_{\xi\eta}+9w+4(\xi-\eta)e^{\xi+\eta}=0, \xi=y-x, \eta=y,$

$v(\xi,\eta)=u(\eta-\xi,\eta)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta)$:

թ. $w_{\xi\eta}-w+\xi e^{\eta}=0, \xi=y, \eta=x-3y,$

$v(\xi,\eta)=u(\eta+3\xi,\xi)=e^{-\eta}w(\xi,\eta)$:

ժ. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-w=0, \xi=2x-y, \eta=x,$

$v(\xi,\eta)=u(\eta,2\eta-\xi)=e^{\xi+\eta}w(\xi,\eta)$:

ի. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+2w=0, \xi=y, \eta=4x-2y,$

$v(\xi,\eta)=u(\dfrac{\eta+2\xi}{2},\xi)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta)$:

լ. $w_{\xi\xi}+w_{\eta}=0, \xi=2x-y, \eta=x+y,$

$v(\xi,\eta)=u(\dfrac{\eta+\xi}{3},\dfrac{2\eta-\xi}{3})=e^{\xi-2\eta}w(\xi,\eta)$:

խ. $v_{\eta\eta}+6v_{\xi}+3v_{\eta}=0, \xi=2x+y, \eta=x:$

ծ. $4v_{\xi\eta}-v_{\xi}+u_{\eta}-v=0, \xi=3x+y, \eta=x+y:$

10.

ա. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0, \xi=x, \eta=-x+y, \zeta=2x-2y+z:$

բ. $v_{\xi\xi}-2v_{\xi}=0, \xi=x, \eta=-2x+y, \zeta=-3x+z:$

գ. $v_{\xi\xi}+2v=0, \xi=x, \eta=-2x+y, \zeta=-x+z:$

դ. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+4v=0, \xi=y+z, \eta=-y-2z, \zeta=x-z:$

ե. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+2v_{\eta}=0,$

$\xi=x+y, \eta=-x+y, \zeta=-x-y+z:$

զ. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+3v_{\xi}+\dfrac{3}{2}v_{\eta}-\dfrac{9}{2}v_{\zeta}=0,$

$\xi=x, \eta=\frac{1}{2}(x+y+z), \zeta=-\frac{1}{2}(3x+y-z):$

է. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0, \xi=x, \eta=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y, \zeta=z:$

ը. $v_{\eta\eta}+v_{\xi\xi}=0, \xi=x, \eta=-x+y, \zeta=-x+y+z:$

թ. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0, \xi=x-2y, \eta=y, \zeta=2y+z:$

11.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\ a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

որտեղ ρ-ն ձողի խտությունն է, իսկ E-ն Յունգի առաձգականության մոդուլը: Եզրային պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը:

ա. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0:$

բ. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ t > 0:$

գ. $u(0,t) = F(t),\ u(l,t) = \Psi(t),\ t > 0:$

դ. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ t > 0,$

$h = \frac{k}{ES}$, որտեղ S-ը լայնական հատույթի մակերեսն է, իսկ k-ն՝ առաձգականության գործակիցը:

ե. $u(0,t) = 0,\ ESu_x(l,t) = ku_t(l,t),\ t > 0,$

որտեղ k-ն դիմադրության գործակիցն է:

12.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g,\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = v_0,\ 0 < x < l,$$

որտեղ g-ն ազատ անկման արագացումն է:

13.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t,\ 0 < x < l,\ t > 0,\ a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

որտեղ α-ն համեմատականության գործակիցն է:

14.

ա. $$\left[r + \frac{R-r}{l}x\right]^2 u_{tt} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[r + \frac{R-r}{l}x\right]^2 u_x\right),$$

$$0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0,$$

$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<l,$

որտեղ r-ը և R-ը հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են:

բ. $\rho S u_{tt}=E\dfrac{\partial}{\partial x}\left(Su_x\right),\ 0<x<l,\ t>0,$

$S(0)Eu(0,t)-\sigma u(0,t)=0,\ Eu_x(l,t)=F(t),\ t>0,$

$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<l:$

15.

$\rho_1 u_{1tt}=E_1 u_{1xx},\ -\infty<x<0,\ t>0,$

$\rho_2 u_{2tt}=E_2 u_{2xx},\ 0<x<\infty,\ t>0,$

$u_1(0,t)=u_2(0,t)=0,\ E_1u_{1x}(0,t)=E_2u_{2x}(0,t),\ t>0,$

$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty,$

որտեղ $u(x,t)=\begin{cases} u_1(x,t),\ -\infty<x<0 \\ u_2(x,t),\ 0<x<\infty \end{cases}:$

16.

$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,$

$u(0,t)=0,\ t>0, Mu_{tt}(l,t)=-ESu_x(l,t),\ t>0,$

$u_t(l,0)=-v,$

$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ 0<x<l:$

17.

$\rho u_{tt}=Tu_{xx}+g,\ 0<x<l,\ t>0,$

$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<l,$

իսկ եզրային պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը՝

ա. $Tu_x(0,t)-\sigma_1u(0,t)=0,\ Tu_x(l,t)+\sigma_2u(l,t)=0,\ t>0,$

բ. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\ t>0,$

գ. $Tu_x(0,t)=-F(t),\ Tu_x(l,t)=\Psi(t),\ t>0:$

18.

$u_{tt}=\dfrac{T}{\rho}u_{xx}+\dfrac{F(x,t)}{\rho},\ 0<x<l,\ t>0,$

$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0,$

$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<l:$

19.

$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu^2 u_t,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$
$2\nu^2 = \frac{k}{\rho}$, որտեղ ρ-ն լարի գծային խտությունն է, իսկ k-ն՝ դիմադրության գործակիցը:

20.

v և i ֆունկցիաները որոշելու համար ստացվում է հետևյալ համակարգը
$$\begin{cases} v_x + Li_t + Ri = 0 \\ i_x + Cv_t + Gv = 0 \end{cases},$$
որտեղից
$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$v(0,t) = 0,\ v_t(l,t) = -E(t),\ t > 0,$
$$v(x,0) = F(x),\ v_t(x,0) = \frac{GF(x) - f'(x)}{C},\ 0 < x < l:$$

21.

Եթե Ox առանցքը ուղղված է գլանի առանցքով, ապա
$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\ a^2 = \dfrac{GI}{K},$
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$
որտեղ G-ն սահքի մոդուլն է, J-ն լայնական հատույթի իներցիայի բևեռային մոմենտը այն կետի նկատմամբ, որտեղ հատվում է Ox առանցքը այդ հատույթի հետ, K-ն միավոր երկարության իներցիայի մոմենտն է, իսկ եզրային պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը՝
ա. $u_x(0,t) = u_x(l,t),\ t > 0,$
բ. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0,$
գ. $u_x(0,t) - hu(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ t > 0:$

22.

ա,բ,գ,դ դեպքերում ունենք՝
$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ x, y \in D,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y),\ x, y \in D,$

իսկ եզրային պայմանները կլինեն

ա. $u(x,y,t)=0,\ x,y\in L,\ t>0,$

բ. $\dfrac{\partial}{\partial\nu}u(x,y,t)=0,\ x,y\in L,\ t>0,$
ν-ն L-ին տարված արտաքին նորմալն է,

գ. $\dfrac{\partial}{\partial\nu}u(x,y,t)=\dfrac{F(x,y,t)}{T},\ x,y\in L,\ t>0,$

դ. $T\dfrac{\partial}{\partial\nu}u(x,y,t)+\sigma u(x,y,t)=0,\ x,y\in L,\ t>0,$
որտեղ σ-ն առաձգականության գործակիցն է,

ե. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+\dfrac{F(x,y,t)}{\rho},\ x,y\in D,\ t>0,$
$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\ x,y\in D,$
$u(x,y,t)=0,\ x,y\in L,\ t>0:$

զ. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})-\alpha u,\ x,y\in D,\ t>0,\ \alpha=\dfrac{\beta}{\rho},$
$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\ x,y\in D,$
$u(x,y,t)=0,\ x,y\in L,\ t>0,$
որտեղ β-ն համեմատականության գործակիցն է, իսկ ρ-ն թաղանթի խտությունն է:

23.

ա. $3x^2+y^2:$

բ. $$\frac{1}{2}e^{(3y-5x)/2}\left(2y+\left(x+y+\frac{3}{4}\right)e^{-(x+y)^2}+\right.$$
$$\left.+\left(x-y-\frac{3}{4}\right)e^{-(x-y)^2}\right):$$

գ. $\dfrac{5}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{5x+y}{6}:$

դ. $\cos(y-x-\sin x),\ \xi=y-x-\sin x,\ \eta=y+x-\sin x:$

ե. $$\left(x-\frac{2y^3}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sin(x+2y)-\sin\left(x-\frac{2y^3}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{2y^3}{3}\right)\cos(x-\frac{2y^3}{3})-(x+2y)\cos(x+2y)\right),$$

$\xi = x - 2/3y^3,\ \eta = x + 2y$:

գ. $2(x+y)e^y,\ \xi = y,\ \eta = y + 2x$:

է. $x + \cos(x - y + \sin x),\ \xi = y - x - \sin x,\ \eta = y + x - \sin x$:

ը. $1 - \sin(y - x + \cos x) + e^{y+\cos x}\sin(x + y + \cos x),$

$\xi = -x + y + -\cos x,\ \eta = y + x + \cos x$:

թ. $x + 3(e^{-y} + y - 1) + \dfrac{1}{2}e^{-1/2(x+3y)}(2x + 2y + 3xy + 6y^2),$

$\xi = x + 3y,\ \eta = y + x$:

ժ. $2e^{(-2x-y-\sin x)/4}\sin x \sin\dfrac{y + \sin x}{2}$:

ի. $-1/3 - e^{2x} + e^y - e^{2y} + 4/3e^{3y}$:

լ. $-x^2/2 + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x,\ \xi = x,\ \eta = x + e^y$:

խ. $e^x sh\dfrac{y - \cos x}{2} + \sin x \cos\dfrac{y - \cos x}{2},$

$\xi = 2x - y + \cos x,\ \eta = 2x + y - \cos x$:

ծ. $e^{3x+2y} - e^{3(x+y)}$:

կ. $-xe^{(x-y)/2}$:

25.

ա. $x_1^3x_2^2 + (3x_1x_2^2 + x_1^3)t^2 + x_1t^4 + (x_1^2x_2^4 - 3x_1^3)t +$

$+\dfrac{1}{3}(x_2^4 - 9x_1 + 6x_1^2x_2^2)t^3 + \dfrac{1}{5}(2x_2^2 + x_1^2)t^5 + \dfrac{1}{35}t^7$:

բ. $x_1x_2x_3 + x_1^2x_2^2x_3^2t + \dfrac{1}{3}(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)t^3 +$

$$+\frac{1}{15}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)t^5 + \frac{1}{105}t^7 :$$

գ. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3t^2 + x_1x_2t$:

դ. $e^{x_1}\cos x_2 + t(x_1^2 - x_2^2)$:

ե. $x_1^2 + x_2^2 + t + 2t^2$:

զ. $e^{x_1}cht + e^{-x_1}sht$:

է. $\dfrac{x_1}{x_1^2 - t^2}$:

27.

ա. $xyz + t(xy + z) + \dfrac{axt^2}{2} + \dfrac{bt^3}{6}$:

բ. $z\cos 2t\sin\sqrt{2}(x+y)+(tarctgt-\frac{1}{2}ln(1+t^2))xe^y\cos z$:

գ. $x\sin y\cos t+y\cos z\sin t+x(\frac{t}{2}ln(1+t^2)-t+arctgt)$:

դ. $az+bxy+\frac{xy}{a^3}(at-\sin at)\sin az$:

ե. $2xy+\frac{axyz}{b^2}(bt+e^{-bt}-1)+\frac{1}{2}x\sin\sqrt{2}y\cos\sqrt{2}z\sin 2t$:

զ. $x^2yz^2+\frac{a}{b}xyzt+yt\sin\omega xe^{\omega z}+yt^2(x^2+z^2)-\frac{a}{b^2}xyz\sin bt$:

է. $ye^x\sin z+xz\sin y\sin t+$
$$+xyz\left(\frac{t^2-1}{2}ln(1+t^2)+2arctgt-\frac{3}{2}t^2\right) :$$

ը. $xe^y cht+ye^z sht+ayz\left(\frac{t^3}{6}+t-\frac{t}{2}ln(1+t^2)-arctgt\right)$:

թ. $xyt-\frac{1}{6}xyt^3$:

ժ. $\varphi(x,y,z)+t\psi(x,y,z)$:

ի. $\varphi(x,y,z)+t\psi(x,y,z)+\frac{t^2}{}f(x,y,z)$:

լ. $\varphi(x,y,z)+t\psi(x,y,z)+f(x,y,z)\int_0^t(t-\tau)g(\tau)d\tau$:

28.

ա. $at+\frac{1}{2}bx^2t^2+\frac{1}{12}bt^4+e^{-x}cht$:

բ. $x+\frac{axt^3}{6}+\sin x\sin t$:

գ. $at+a(e^{-t}-1)+b\sin x\cos t+c\cos x\sin t$:

դ. $\frac{at}{b}-\frac{a}{b^2}\sin bt+\cos(x-t)$:

ե. $x(t-\sin t)+\sin(x+t)$:

31.

ա. $\begin{cases} x^2t+\frac{a^2t^3}{3}+\sin x\cos at, \ x>0, \ t<\frac{x}{a} \\ \frac{x^3}{3a}+xat^2+\sin x\cos at, \ x>0, \ t>\frac{x}{a} \end{cases}$:

բ. $$\begin{cases} 1-e^x chat+\frac{1}{2a}ch(x+at)-\frac{1}{2a}ch(x-at), \\ \qquad x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ -e^{at}shx+\frac{1}{2a}ch(x+at)-\frac{1}{2a}ch(x-at), \\ \qquad x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

գ. $$\begin{cases} x-e^x chat+x^2t+\frac{a^2t^3}{3},\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ at--e^{at}chx+tx^2+\frac{a^2t^3}{3},\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

դ. $$\begin{cases} 1+3a^2t^2x+x^3+\frac{e^x shat}{a}(2+a^2t^2-2x+x^2)+ \\ \qquad +2e^x tchat(x-1),\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ 1+a^3t^3+3atx^2-\frac{2}{a}+\frac{2-2at+a^2t^2+x^2}{2}e^{at}chx+ \\ \qquad +2\frac{at-1}{a}xe^{at}shx,\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

ե. $$\begin{cases} \frac{chat-\cos t}{1+a^2}e^x,\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{e^{at}shx}{1+a^2}-\frac{e^x\cos t}{1+a^2}+\frac{\cos(t-\frac{x}{a})}{1+a^2},\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

զ. $$\begin{cases} \frac{\cos x(at-\sin at)}{a^3},\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{x-at+at\cos x-\cos at\sin x}{a^3},\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

է. $$\begin{cases} \frac{(a\sin t-\sin at)\sin x}{a(a^2-1)},\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{1}{a}+\frac{\sin t\sin x}{a^2-1}+\frac{\cos at\cos x}{a(a^2-1)}-\frac{a\cos(t-\frac{x}{a})}{a^2-1},\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

ը. $$\begin{cases} \frac{e^x(shat-at)}{a^3},\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ -\frac{1}{a^3}+\frac{e^{at}chx}{a^3}-\frac{e^x t}{a^2}-\frac{(x-at)^2}{2a^3},\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

թ. $$\begin{cases} \frac{chat-cht}{a^2-1}chx+\frac{chxshat}{a}+chatshx,\ x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{chtchx}{1-a^2}+\frac{shatshx}{a^2-1}+\frac{ch(t-\frac{x}{a})}{a^2-1}- \\ \qquad -\frac{a^2+1}{a(a-1)}chatshx,\ x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

ժ. $$\begin{cases} \frac{a^2t^3}{3}+x+tx^2+\frac{t\cos x}{a^2}-\frac{\cos x\sin at}{a^3}, \\ \qquad x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ -\frac{t}{a^2}+x+\frac{x}{a^3}+at^2x+\frac{x^3}{3a}+\frac{t\cos x}{a^2}-\frac{\cos at\sin x}{a^3}, \\ \qquad x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases} :$$

ի. $$\begin{cases} \frac{a^2t^3}{3}+tx^2+\frac{\sin x}{a(a^2-1)}(a\sin t-\sin at)+\cos at\cos x, \\ \qquad x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{1}{a}+\frac{a^2t^3}{3}+tx^2+\frac{a^3-a+1}{a(a^2-1)}\cos at\cos x+\frac{\sin t\sin x}{a^2-1}+ \\ \qquad +\frac{a\cos(t-\frac{x}{a})}{1-a^2}, x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases}:$$

լ. $$\begin{cases} -x+e^tx+\cos at\cos x-\frac{e^x shat}{a}, \\ \qquad x>0,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{1}{a}-a-\frac{chxe^{at}}{a}+ae^{t-x/a}-at+e^tx+\cos at\cos x, \\ \qquad x>0,\ t>\frac{x}{a} \end{cases}:$$

32.

ա. $$\begin{cases} 0,\ 0<t\le x/a \\ \mu(t-x/a),\ t\ge x/a \end{cases}:$$

բ. $u(x,t)=f(x+at)-f(x-at),\ f(u)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-2c}^{u}\varphi(z)dz,$

որտեղ

$$\varphi(z)=\begin{cases} 0,\ -\infty<z<-2c \\ v_0,\ -2c<z<-c \\ 0,\ -c<z<c \\ v_0,\ c<z<2c \\ 0,\ 2c<z<\infty \end{cases}:$$

գ. $$\begin{cases} 0,\ 0<t\le x/a \\ -a\int_0^{t-\frac{x}{a}}\nu(s)ds,\ t\ge x/a \end{cases}:$$

դ. $$\begin{cases} 0,\ 0<t\le x/a \\ -ae^{h(x-at)}\int_0^{t-\frac{x}{a}}e^{ahs}\chi(s)ds,\ t\ge x/a \end{cases}:$$

ե. $$\begin{cases} \omega t,\ 0<at<x \\ \frac{\omega(t-ht)}{1-ah},\ x<at \end{cases}:$$

զ. $$\begin{cases} f(x+at),\ 0<at<x \\ f(x+at)-f(at-x),\ x\le at \end{cases}:$$

է. $$\begin{cases} f(x+at),\ 0<at<x \\ f(x+at)+f(at-x),\ x\le at \end{cases}:$$

ը. $\begin{cases} f(x+at),\ 0<at<x \\ f(x+at)+f(at-x)+ \\ \qquad +2he^{h(x-at)}\int_0^{x-at} e^{-hs}f(-s)ds,\ x<at \end{cases}$:

թ. $\begin{cases} f(x+at),\ 0<at<x \\ f(x+at)+\frac{1+ah}{1-ah}f(at-x),\ x<at \end{cases}$:

ժ. $u(x,t)=\varphi(t-\frac{x}{a})+\psi(t+\frac{x}{a})$,

որտեղ

$$-\varphi(-z)=\psi(z)=\begin{cases} 1/2\sin\frac{\pi a z}{l},\ 0\le z\le\frac{l}{a} \\ 0,\ \frac{l}{a}\le z \end{cases},$$

$$\varphi(z)=\begin{cases} \frac{1}{\pi^2+h^2l^2}\Bigg(\frac{\pi^2-h^2l^2}{2}\sin\frac{\pi a z}{l}+ \\ \qquad +\pi hl(\cos\frac{\pi a z}{l}-e^{-ahz})\Bigg),\ 0\le z\le\frac{l}{a} \\ -\frac{\pi hl}{\pi^2+h^2l^2}(1+e^{hl})e^{-ahz},\ \frac{l}{a}\le z,\ t\ge x/a \end{cases}:$$

ի. $A\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi a t}{l},\ 0<x<l,\ t>0:$

լ. $u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2},\ 0<x<l,\ t>0,$

$$\varphi(z)=\begin{cases} Az,\ -l<z<l \\ A(2l-z),\ l<z<3l \end{cases},$$

$\varphi(z)=\varphi(z+4l),\ -\infty<z<\infty:$

խ. $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi(x-at)}{l}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi(x+at)}{l}$:

ծ. $u(x,t)=\varphi(at-x)-\varphi(at+x)$,

$\varphi(x)=0$, երբ $-l<x<l$, իսկ $(-l,l)$ միջակայքից դուրս $\varphi(x)$ ֆունկցիան շարունակվում է

$$\varphi''(x)+\frac{1}{ml}\varphi'(x)=\varphi''(x-2l)-\frac{1}{ml}\varphi'(x-2l)$$

դիֆերենցիալ հավասարման օգնությամբ:

33.

ա. $\begin{cases} \frac{e^x shat}{a}+x(1-\cos t)+\cos 2at\sin 2x,\ t<\frac{x}{a} \\ \frac{e^{at}shx}{a}+x(1-cost)+\cos 2at\sin 2x+\sin(t-\frac{x}{a}), \\ \qquad t>\frac{x}{a} \end{cases}$:

բ. $\begin{cases} \frac{t^3x}{6} + \frac{chxshat}{a} + chatshx, \ t < \frac{x}{a} \\ t - \frac{x}{a} + \frac{t^3x}{6} + \frac{1+a}{a} chatshx, \ t > \frac{x}{a} \end{cases}$:

գ. $\begin{cases} \frac{1+a}{2a}\cos(at-x) + \frac{t\cos x}{a^2} + \frac{a-1}{2a}\cos(at+x) + \\ \qquad + \frac{\cos at \sin x}{a^3}, \ t < \frac{x}{a} \\ \frac{1}{a} + a + \frac{a-1}{a}\cos at \cos x + \frac{t\cos x}{a^2} - \\ \qquad -ach(t-\frac{x}{a}) + \frac{\cos at \sin x}{a^3} \ t > \frac{x}{a} \end{cases}$:

34. $u(r,t) = \dfrac{f_1(r+t)}{r} + \dfrac{f_2(r-t)}{r}, \ r \neq 0:$

Անցնել սֆերիկ կոորդինատների և հաշվի առնել, որ $u_{\varphi\varphi}$ և $u_{\theta\theta}$ ֆունկցիաները նույնաբար զրո են:

35. $$u(r,t) = \frac{(r-at)\varphi(r-at) + (r+at)\varphi(r+at)}{2r} + \\ + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} \xi\psi(\xi)d\xi,$$

որտեղ $\varphi(\xi)$ և $\psi(\xi)$ ֆունկցիաները զույգ շարունակված են բացասական ξ-ի համար: $\lim\limits_{r\to 0} = at\varphi'(at) + \varphi(at) + t\psi(at):$

36. $u(r,t) = \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_0^t d\tau \int_{r-a(t-\tau)}^{r+a(t-\tau)} \xi f(\xi,\tau)d\xi:$

37.

ա. $\begin{cases} u_0, \ 0 \le t < \frac{r_0-r}{a} \\ u_0\frac{r-at}{2r}, \ \frac{r_0-r}{a} < t < \frac{r_0+r}{a} \\ 0, \ \frac{r_0+r}{a} < t \end{cases}$,

եթե $0 < r < r_0$ և

$\begin{cases} 0, \ 0 \le t < \frac{r-r_0}{a} \\ u_0\frac{r-at}{2r}, \ \frac{r-r_0}{a} < t < \frac{r_0+r}{a} \\ 0, \ \frac{r_0+r}{a} < t \end{cases}$,

եթե $r_0 < r$:

բ. $\begin{cases} u_0 t, \ 0 \le t < \frac{r_0 - r}{a} \\ u_0 \frac{r_0^2 - (r-at)^2}{4ar}, \ \frac{r_0 - r}{a} < t < \frac{r_0 + r}{a} \\ 0, \ \frac{r_0 + r}{a} < t \end{cases}$,

եթե $0 < r < r_0$ և

$\begin{cases} 0, \ 0 \le t < \frac{r - r_0}{a} \\ u_0 \frac{r_0^2 - (r-at)^2}{4ar}, \ \frac{r - r_0}{a} < t < \frac{r_0 + r}{a} \\ 0, \ \frac{r_0 + r}{a} < t \end{cases}$,

եթե $r_0 < r$:

38. Ռիմանի ֆունկցիան $R \equiv 1$-ն է, իսկ խնդրի լուծումը

$$\frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz :$$

39. $L(u) = u_{tt} - a^2 u_{xx} + c^2 u$ օպերատորի Ռիմանի ֆունկցիան $R = J_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 + \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)$-ն է, իսկ $L(u) = u_{tt} - a^2 u_{xx} - c^2 u$ օպերատորինը՝ $R = I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 + \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)$: Համապատասխան խնդիրների լուծումներն են

ա. $$\frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} -$$
$$-\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1\left(c\sqrt{t^2 + \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 + \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\psi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0\left(c\sqrt{t^2 + \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) f(\xi,\tau)d\xi :$$

բ. $$\frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} -$$

$$
-\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2+\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2+\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\psi(\xi)d\xi+
$$

$$
+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0\left(c\sqrt{t^2+\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) f(\xi,\tau)d\xi :
$$

40. $$\frac{1}{2}\varphi(xy)+\frac{y}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{xy}}{y}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{\varphi(z)}{z^{3/2}}dz-$$

$$
-\frac{\sqrt{xy}}{2}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{\psi(z)}{z^{3/2}}dz :
$$

41.

ա. Կոշիի խնդրի լուծումը՝

$$
\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\left(\varphi(x+t)+\varphi(t-x)+\int_{t-x}^{x+t}\left[\frac{a}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right]d\tau\right) :
$$

Գուրսայի խնդրի լուծումը՝

$$
e^{-\frac{a}{2}x}\left(e^{\frac{a}{4}(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{a}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\right) :
$$

բ. Կոշիի խնդրի լուծումը՝

$$
\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{b}{2}x}\varphi(x+t)+e^{\frac{b}{2}x}\varphi(t-x)\right]+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t}e^{\frac{b}{2}(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau :
$$

Գուրսայի խնդրի լուծումը՝

$$
e^{\frac{b}{2}t}\left[e^{-\frac{b}{4}(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{b}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\right) :
$$

գ. Կոշիի խնդրի լուծումը՝

$$
\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}t}\Bigg(e^{-\frac{b}{2}(x+t)}\varphi(x+t)+e^{\frac{b}{2}(x-t)}\varphi(t-x)+
$$

$$
+\int_{t-x}^{x+t}e^{-\frac{b}{2}\tau}\left[\frac{a}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right]d\tau\Bigg) :
$$

Գուրսայի խնդրի լուծումը՝

$$
e^{-\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}t}\Bigg[e^{\frac{(a-b)(x+t)}{4}}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+
$$

$$+e^{\frac{(a+b)(x-t)}{4}}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\Big]:$$

42.

ա. $e^{-\frac{a}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{-\frac{a}{2}t}\varphi(x-t)-e^{-\frac{a}{4}(x+t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right):$

բ. $e^{-\frac{b}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{b}{2}t}\varphi(x-t)--e^{-\frac{b}{4}(x-3t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right):$

գ.$e^{-\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}t}\Big[e^{\frac{(a-b)(x+t)}{4}}\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+$

$$+e^{\frac{a(x-t)}{2}}\varphi(x-t)-e^{\frac{(a-b)(x-t)}{4}}\psi(x-t)\Big]:$$

43.

ա. $u=\frac{1}{2}(\varphi(x+y)+\psi(x+y)+\varphi(x-y)-\psi(x-y)),$

$v=\frac{1}{2}(\varphi(x+y)+\psi(x+y)-\varphi(x-y)+\psi(x-y)):$

բ. $u=\frac{1}{2}(\varphi(\frac{x+y}{2})-\psi(\frac{x-y}{2})+\psi(0)),$

$v=\frac{1}{2}(\varphi(\frac{x+y}{2})+\psi(\frac{x-y}{2})-\varphi(0)):$

գ. $u=\frac{1}{2}(\varphi(x+y)-\psi(\frac{x+y}{2})-\psi(\frac{x-y}{2})),$

$v=\frac{1}{2}(\varphi(x+y)+\psi(\frac{x+y}{2})+\psi(\frac{x-y}{2})-\varphi(0)-\psi(0)):$

դ. $u=\frac{1}{2}(\psi(\frac{x+y}{2})+\varphi(x-y)-\psi(\frac{x-y}{2})),$

$v=\frac{1}{2}(\psi(\frac{x+y}{2})-\varphi(x-y)+\psi(\frac{x-y}{2})+\varphi(0)-\psi(0)):$

ե. $u=f_1(x+y)+f_2(x-y),$

$v=f_1(x+y)-f_2(x-y),$

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\varphi\left(\frac{z}{3^k}\right)+\psi\left(\frac{2z}{3^{k+1}}\right)\right),$$

$f_2(z)=\varphi(z)-f_1(z):$

44.

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\sqrt{a}\varphi\left(\frac{x+\sqrt{a}y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-\sqrt{a}y}{2}\right)-\psi(0)\right],$$
$$v(x,y)=-\sqrt{a}\varphi\left(\frac{x+\sqrt{a}y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-\sqrt{a}y}{2}\right)-\sqrt{a}\varphi(0):$$

45.

$Su_t=a^2(Su_x)_x,\ 0<x<l,\ t>0,\ a^2=\frac{k}{c\rho},$
$u(x,0)=\varphi(x),\ 0<x<l,$
ա. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\ t>0,$
բ. $u_x(0,t)=-\frac{1}{kS(0)}q(t),\ u_x(l,t)=\frac{1}{kS(l)}Q(t),\ t>0,$
գ. $u_x(0,t)-h_1(u(0,t)-\tau(t))=0,$
$u_x(l,t)+h_2(u(l,t)-\theta(t))=0,\ t>0,$
$h_i-\frac{\chi_i}{k},\ i=1,2,$
որտեղ χ_i-ն ջերմափոխանակության դեպքում արտաքին ջերմունակության գործակիցն է, $S(x)$ լայնական հատույթի մակերեսը, ρ -ն խտությունն է:

46.

ա. $u_t=a^2\Delta_r u-\beta u,\ 0\le r<R,\ t>0,\ a^2=\dfrac{k}{c\rho},\ \beta=\dfrac{\alpha}{c\rho},$
$u_r(R,t)=0,\ t>0,\ u(r,0)=T,\ 0\le r<R,$
$\Delta_r u=u_{rr}+\dfrac{2}{r}u_r=\dfrac{1}{r^2}(r^2u_r)_r,$
որտեղ α-ն ջերմության կլանման գործակիցն է:
բ. $u_t=a^2\Delta_r u+\dfrac{Q}{c\rho},\ 0\le r<R,\ t>0,\ a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$ku_r(R,t)+\alpha u(R,t)=0,\ t>0,\ u(r,0)=T,\ 0\le r<R,$
$\Delta_r u=u_{rr}+\dfrac{2}{r}u_r=\dfrac{1}{r^2}(r^2u_r)_r,$
որտեղ α-ն ջերմափոխանակության գործակիցն է:

47. $u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\ a^2=\dfrac{\alpha D}{c},$
$u(x,0)=\varphi(x),\ 0<x<l,$

ա. $u(0,t) = \mu(t),\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0,$

բ. $u_x(0,t) = -\dfrac{1}{\alpha SD}q(t),\ u_x(l,t) + \dfrac{d}{D}u(l,t) = 0,\ t > 0,$

α-ն հատույթի ծակոտկենության գործակիցն է՝ հատույթում անցքերի մակերեսի հարաբերությունը հատույթի մակերեսի վրա, d-ն՝ ծակոտկեն միջնորմով կատարվող արտաքին դիֆուզիայի գործակիցը:

48.

ա. $u_t = Du_{xx} - \gamma\sqrt{u} - \dfrac{\sigma d}{S}(u - v(t)),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u_x(0,t) - \frac{d}{D}(u(0,t) - v(t)) = 0,$$
$$u_x(l,t) + \frac{d}{D}(u(l,t) - v(t)) = 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x),$$

բ. $u_t = Du_{xx} + \gamma u u_t - \dfrac{\sigma d}{S}(u - v(t)),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u_x(0,t) - \frac{d}{D}(u(0,t) - v(t)) = 0,$$
$$u_x(l,t) + \frac{d}{D}(u(l,t) - v(t)) = 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x),$$

γ-ն տրոհման գործակիցն է, d-ն՝ արտաքին դիֆուզիայի գործակիցը:

49. $u_t = a^2(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r),$

$$u(R,t) = 0,\ u(r,0) = \varphi(r):$$

50. $u_t = a^2(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}),$

$$u(r,\theta,-h,t) = u(r,\theta,h,t) = u(R,\theta,z,t) = 0,$$
$$u(r,\theta,z,0) = \varphi(r,\theta,z):$$

51. $u_t = a^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r),\ t > 0,\ 0 \le r < R,$

$$u(R,t) = \psi(t),\ u(r,0) = \varphi(r):$$

52. $u_t = a^2(u_{rr} + \dfrac{2}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta + \dfrac{1}{r^2\theta^2}u_{\varphi\varphi}),$

$$u(R,\theta,\varphi,t) = 0,\ u(r,\theta,\varphi,0) = \psi(r,\theta,\varphi):$$

53. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$

$$u(0,y,t)=u(a,y,t)=u(x,0,t)=u(x,b,t)=0,$$
$$u(0,x,y)=\varphi(x,y):$$

54. $u_t=a^2u_{xx},$
$$ku_x(-R,t)+q=-ku_x(R,t)+q=u_x(0,t)=u(x,0)=0:$$

55. $T_{rr}+\frac{1}{r}T_r+\frac{1}{r^2}T_{\varphi\varphi}=\frac{1}{k}T_t,$
$$T(a,\varphi,t)=T(b,\varphi,t)=0,$$
$$T(r,\varphi,0)=f(r,\varphi):$$

59.

ա. $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi:$

$\varphi(x)$ ֆունկցիան կենտ ձևով շարունակել $-\infty<x<0$ կիսաառանցքի վրա:

բ. $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi:$

$\varphi(x)$ ֆունկցիան զույգ ձևով շարունակել $-\infty<x<0$ կիսաառանցքի վրա:

գ. $\dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi:$

որոնելի ֆունկցիան փնտրել $e^{-ht}v(x,t)$ տեսքով:

դ. $\dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi:$

որոնելի ֆունկցիան փնտրել $e^{-ht}v(x,t)$ տեսքով:

ե. $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]f(\xi,\tau)d\xi d\tau:$

Շարունակել $f(x,t)$ ֆունկցիան կենտ ձևով ըստ x-ի II-րդ քառորդի վրա:

զ. $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]f(\xi,\tau)d\xi d\tau:$

Շարունակել $f(x,t)$ ֆունկցիան զույգ ձևով ըստ x-ի II-րդ քառորդի վրա:

է. $$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$
$$\times f(\xi,\tau)d\xi d\tau :$$

Որոնելի ֆունկցիան ֆունկցիան փնտրել $e^{-ht}v(x,t)$ տեսքով:

ը. $$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$
$$\times f(\xi,\tau)d\xi d\tau :$$

Որոնելի ֆունկցիան ֆունկցիան փնտրել $e^{-ht}v(x,t)$ տեսքով:

թ. $$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$
$$\times f(\xi,\tau)d\xi d\tau :$$

ժ. $$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$
$$\times f(\xi,\tau)d\xi d\tau :$$

61.

ա. $1 - x^2 - y^2 - 4t$:

բ. $1 - (x^2+y^2)^2 - 16(x^2+y^2)t - 32t^2$:

գ. $x^2 + y^2 + 4t$:

դ. e^{x+y+2t} :

ե. $32t^2 + 16t(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2$:

զ. $384t^3 + 288t^2(x^2+y^2) + 36t(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)^3$:

64.

ա. $e^{-l^2t}\sin lx_1$:

բ. $e^{-l^2t}\cos lx_1$:

գ. $e^{l^2t}chlx_1$ ։
դ. $e^{l^2t}shlx_1$ ։
ե. $e^{-(l_1^2+l_2^2)t}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2$ ։
զ. $e^{-(l_1^2+l_2^2)t}\sin l_1x_1 \cos l_2x_2$ ։
է. $e^{-(l_1^2+l_2^2)t}\cos l_1x_1 \cos l_nx_n$ ։
ը. $e^{-(l_1^2+l_2^2)t}\cos l_1x_1 \sin l_2x_2$ ։
թ. $e^{t\sum_{i=1}^n l_i^2}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2 \cdots \sin l_nx_n$ ։
ժ. $e^{-l_1^2t}\sin l_1x_1 + e^{-l_n^2t}\cos l_nx_n$ ։
ի. $e^{l_1x_1}e^{-l_1^2t}$ ։
լ. $e^{l_1x_1}\cdots e^{-l_nx_n}e^{-t\sum_{i=1}^n l_i^2}$ ։
խ. $2t(x+y)+xy(1+x+y)$ ։
ծ. $240t^2(x+y)+40t(x+y)^2+(x+y)^5$ ։
կ. $60t^2+20t(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2+z^2)^2$ ։
հ. $(2t+x^2)(2t+y^2)(2t+z^2)$ ։
ձ. $x(6t+x^2)y(6t+y^2)z(6t+z^2)$ ։
ղ. $12t^2+y^2z^2+x^2(y^2+z^2)+4t(x^2+y^2+z^2)$ ։
ճ. $x^3+y^3+z^3+6t(x+y+z)$ ։

66.

ա. $e^{l^4t}\sin lx_1$ ։
բ. $e^{l^4t}\cos lx_1$ ։
գ. $e^{l^4t}chlx_1$ ։
դ. $e^{l^4t}shlx_1$ ։
ե. $e^{(l_1^2+l_2^2)^2t}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2$ ։
զ. $e^{(l_1^2+l_2^2)^2t}\sin l_1x_1 \cos l_2x_2$ ։
է. $e^{(l_1^2+l_2^2)^2t}\cos l_1x_1 \cos l_nx_n$ ։
ը. $e^{(l_1^2+l_2^2)^2t}\cos l_1x_1 \sin l_2x_2$ ։
թ. $e^{t\left(\sum_{i=1}^n l_i^2\right)^2}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2 \cdots \sin l_nx_n$ ։
ժ. $e^{l_1^4t}\sin l_1x_1 + e^{l_n^4t}\cos l_nx_n$ ։
ի. $e^{l_1^4t}e^{l_1x_1}$ ։
լ. $e^{l_1x_1}\cdots e^{l_nx_n}e^{t\left(\sum_{i=1}^n l_i^2\right)^2}$ ։

խ. $xy + x^2y + xy^2$:
ծ. $480t(x+y) + (x+y)^5$:
կ. $120t + (x^2+y^2+z^2)^2$:
հ. $(xyz)^2 + 8t(x^2+y^2+z^2)$:
ձ. $xyz(x^2y^2z^2 + 72t(x^2+y^2+z^2))$:
ղ. $24t + y^2z^2 + x^2(y^2+z^2)$:
ճ. $x^3 + y^3 + z^3$:

67.

ա. $\sin x_1 cht + \cos x_1 sht$:
բ. $tx^2y^2z^2 + 4/3t^3(x^2+y^2+z^2) + (x^3+y^3+z^3)^2+$
$+36t^2(5x^2+5y^2+2yz+5z^2+2x(y+z))$:
գ. $t(xyz)^3 + (x+y+z)^3 + 12t^3xyz(x^2+y^2+z^2)$:
դ. $chlx_1chl^2t + shmx_1shm^2t$:
ե. $e^{ax_1}cha^2t + e^{bx_1}shb^2t$:

70.

ա. $u|_S = 0,\ S$-ը հաղորդչի մակերևույթն է,
բ. $\dfrac{\partial u}{\partial n}|_S = 0,\ S$-ը դիէլեկտրիկի և հաղորդչի սահմանային մակերևույթն է:

71.

ա. Գտնել այնպիսի φ ֆունկցիա, որը բավարարի $\Delta\varphi = 0$ հավասարմանը՝ հաղորդիչների համակարգից դուրս գտնվող կետերում, զրո դառնա անվերջությունում և ընդունի φ_i տրված արժեքները i-երորդ հաղորդչի մակերևույթին:

բ. Նախորդ խնդրի պայմաններին ավելանում է $\displaystyle\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma = -4\pi e_i$ պայմանը, որտեղ e_i-ին i-երորդ հաղորդչի լրիվ լիցքն է, իսկ S_i-ն՝ նրա մակերևույթը:

72. $\Delta u = 0$, որտեղ $u(x,y,z)$-ը կոնցենտրացիան է:

73. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = 0$, որտեղ S-ը պինդ մարմնի մակերևույթն է:

74.

ա. $\Delta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ ։

բ. $\Delta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ ։

գ. $\Delta = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) +$

$+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ ։

75.

ա. A ։բ. $\dfrac{A}{a}x = \dfrac{A}{a}\rho\cos\varphi$ ։ գ. $A + By = A + B\rho\sin\varphi$ ։

դ. $Axy = \dfrac{A}{2}\rho^2\sin 2\varphi$ ։ ե. $A + \dfrac{B}{a}y = A + \dfrac{B}{a}\rho\sin\varphi$ ։

զ. $\dfrac{A+B}{2} + \dfrac{B-A}{2a^2}(x^2-y^2)$ ։

76.

ա. $u = const$, եթե $A = 0$ և խնդիրը ճիշտ չէ դրված, եթե $A \neq 0$ ։

բ. $Aax + const$ ։

գ. $\dfrac{A}{2}a(x^2-y^2) + const$ ։

դ. $\dfrac{A}{a}x + const$, եթե $B = 0$ և խնդիրը ճիշտ չէ դրված, եթե $B \neq 0$ ։

ե. $(A + 0.75B)y - \dfrac{0.25B}{3a^2}(3(x^2+y^2)y - 4y^3) + const$ ։

77.

ա. A ։ բ. $\dfrac{Aa}{\rho}\cos\varphi$ ։ գ. $A + \dfrac{Ba^2}{\rho}\sin\varphi$ ։ դ. $\dfrac{1}{2}A\dfrac{a^4}{\rho^2}\sin 2\varphi$ ։

ե. $A + B\dfrac{a}{\rho}\sin\varphi$ ։ զ. $\dfrac{A+B}{2} - \dfrac{A-B}{2}\dfrac{a^2}{\rho^2}\cos 2\varphi$ ։

78.

ա. Լուծում չունի։ բ. $-\dfrac{Aa^3}{\rho}\cos\varphi + const$ ։

գ. $-\dfrac{Aa^5}{2\rho^2}\cos 2\varphi + const$: դ. Լուծում չունի:

ե. $-(A+0.75B)\dfrac{a^2}{\rho}\sin\varphi + 0.25B\dfrac{a^4}{3\rho^3}\sin 3\varphi + const$:

79. $u(\rho) = u_1 + (u_2 - u_1)\dfrac{ln\frac{\rho}{a}}{ln\frac{b}{a}}$:

80. $\dfrac{u_0}{\alpha}\varphi = \dfrac{u_0}{\alpha}arctg\dfrac{y}{x}$:

81. $\varphi_1 + \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}arctg\dfrac{y}{x}$:

82.
ա. $u = u_0$: բ . $u(\rho) = \dfrac{a}{\rho}u_0$:

83. $u(z) = u_1 + (u_2 - u_1)\dfrac{z}{h}$:

84. $u_1 + (u_2 - u_1)\dfrac{y}{b}$:

85. $\dfrac{1}{4}(\rho^2 - a^2)$:

86. $B = \dfrac{aA}{2}, u(\rho) = \dfrac{A\rho^2}{4} + const$:

87.
ա. $u_2 + \dfrac{A}{4}(\rho^2 - b^2) + \dfrac{u_1 - u_2 + \frac{A}{4}(b^2 - a^2)}{ln\frac{b}{a}}ln\dfrac{b}{\rho}$:
բ. $u_1 + \dfrac{A}{4}(\rho^2 - a^2) + b(C - \dfrac{Ab}{2})ln\dfrac{\rho}{a}$:
գ. $\dfrac{A\rho^2}{4} - a(\dfrac{aA}{2} - B)ln\rho + const, C = \dfrac{A(b^2 - a^2) + 2ab}{2b}$:

88.
ա. $u(\rho) = \dfrac{1}{6}(\rho^2 - a^2);$
բ. $\dfrac{A}{12}(r^3 - a^3) + \dfrac{B}{6}(r^2 - a^2)$:

89.

ա. $u(\rho) = \frac{1}{6}(r^2 - a^2) - \frac{1}{6}ab(a+b)(\frac{1}{a} - \frac{1}{r})$:

բ . $\frac{A}{6}(r^2 - a^2) + \frac{B}{2}(r-a) - ab(\frac{A}{6}(b+a) + \frac{B}{2})(\frac{1}{a} - \frac{1}{r})$:

90. $u(\rho) = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b})$:

91.

ա. Այո: բ. Այո: գ. Այո: դ. Այո: ե. Ոչ: զ. Այո: է. Ոչ: ը. Այո: թ. Այո: ժ. Ոչ:

92.

ա. $k = -3$: բ. $k = -2$: գ. $k = \pm 2i$: դ. $k = \pm 3$: ե. $k = 0$, եթե $n = 2$ և $k = n - 2$, եթե $n > 2$:

99.

ա. $x + 2y + z(2x - y^2) + \frac{z^3}{3}$: բ. $xe^y \cos z$: գ. $x(x+y) + z(y - z) + e^x \sin z$: դ. $x \sin ychz + shz \cos y$:

ե. $x^3 + z(2x^2 - y) - 3xz^2 - \frac{2}{3}z^3 + 2$:

զ. $xz + \cos 2xch2z - \sin 2ych2z$:

100.

ա. $u(a) = \frac{T_0 ln\frac{b}{a} - T ln\frac{c}{a}}{ln\frac{b}{c}}$:

բ. $u(a) = T - bUln\frac{c}{a}$:

գ. $u(a) = \frac{T(1 + bhln\frac{b}{a}) - bWln\frac{c}{a}}{1 + bhln\frac{b}{c}}$:

դ. $T - cUln\frac{b}{a}$:

101.

ա. $u(a) = \frac{T_0 ln\frac{a}{d} - T_1 ln\frac{a}{c}}{ln\frac{c}{d}}$:

$$u(b) = \frac{T_0 ln\frac{b}{d} - T_1 ln\frac{b}{c}}{ln\frac{c}{d}} :$$

բ. $u(a) = T + cUln\dfrac{a}{d}$, $u(b) = T + cUln\dfrac{b}{d}$:

102.

ա. $u(b) = \dfrac{T_0 ln\frac{b}{a} - Tln\frac{b}{c}}{ln\frac{c}{a}}$:

բ. $u(b) = T - aUln\dfrac{x}{a}$:

գ. $u(b) = \dfrac{T(1 + ahln\frac{b}{a}) - aWln\frac{c}{b}}{1 + ahln\frac{c}{a}}$:

դ. $T + cUln\dfrac{b}{a}$:

105.

ա. $z^3 + iC$: բ. $-ie^z + i(1 + C)$: գ. $\sin z + iC$:

106.

ա. $\frac{1}{4}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + C$: բ. $e^y \cos x + C$: գ. $-chx \cos y + C$: դ. $shx \sin y + C$: ե. $chx \sin y + C$: զ. $-shx \cos y + C$:

107.

ա. $x^3y - xy^3 + Cy + C_0$: բ. $e^x \sin y + Cx + C_0$: գ. $e^x \sin y + Cy + C_0$: դ. $x^2y - 1/3y^3 + xy + 1/2(y^2 - x^2) + Cx + C_0$: ե. $1/2x^2y - xy^2 + 1/3x^3 - 1/6y^3 + Cy + C_0$:

109.

$$G(M, P) = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1},$$
$$r_0 = MP = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r_0 = MP = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2} :$$

110. $u = e\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r_1}\right)$, r_0-ն և r_1-ը որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում:

$$\sigma = -e\frac{\zeta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2\right]^{3/2}},$$
$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zf(\xi,\eta)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}d\xi d\eta,$$

Ինդուկցված մակերևույթային լիցքերի խտությունը հաշվվում է

$$\sigma = -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S$$

բանաձևով, որտեղ ε-ը այն միջավայրի դիէլեկտրիկ հաստատունն է, որտեղ տեղադրված է S մակերևույթը, իսկ n-ը S-ին տարված արտաքին նորմալն է:

111.

$$G(M,P)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right),$$
$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-(2nl+\zeta))^2},$$
$$r_n' = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-(2nl-\zeta))^2},$$
$$M = M(x,y,z),\ P = P(\xi,\eta,\zeta):$$

Այս շարքը և մյուս շարքերը, որոնք ստացվում են երկու անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցելով՝ $0 < z < l$ շերտում հավասարաչափ և բացարձակ զուգամետ են:

112.

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}-\frac{1}{\overline{r_n}}+\frac{1}{\overline{r_n'}}\right),$$
$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-(2nl+\zeta))^2},$$
$$r_n' = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-(2nl-\zeta))^2},$$
$$\overline{r_n} = \sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-(2nl+\zeta))^2},$$
$$r_n' = \sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-(2nl-\zeta))^2},$$

Այս շարքը և մյուս շարքերը, որոնք ստացվում են երկու անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցելով՝ $0 < z < l$ շերտում, հավասարաչափ և բացարձակ զուգամետ են:

113.

$$G(M,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{r_k}-\frac{1}{r_k^{'}}\right),$$
$$r_k=\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-(\psi+2\alpha k))+(z-\zeta)^2},$$
$$r_k^{'}=\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-(2\alpha k-\psi))+(z-\zeta)^2},$$
$$M=M(r,\varphi,z),\ P=P(s,\psi,\zeta):$$

114.

$$G(x,y;\xi,\eta)=ln\frac{r_0^{'}}{r_0},$$
$$r_0=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$
$$r_0^{'}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2},$$
$$u(x,y)=V(1-\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{x}):$$

115.

$$G(r,\varphi;s,\psi)=\sum_{k=0}^{n-1}ln\frac{r_k^{'}}{r_k},$$
$$r_k=\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-(\psi+2\alpha k))},$$
$$r_k=^{'}\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-(2\alpha k-\psi))}:$$

116.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho_0 r_1},$$
$$r_0=MM_0,\ \rho_0=OM_0,\ r_1=MM_1,$$
M_1-ը գտնվում է OM_0-ի շարունակության վրա և $OM_1\cdot OM_0=R^2$:

117.

$$u=e\left(\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho_0 r_1}\right),\ \sigma=-e\frac{R^2-\rho_0^2}{Rr_0^3},$$
$$u=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{R^2-\rho_0^2}{Rr_0^3}fdS:$$

Այստեղ պահպանված են նախորդ խնդրի նշանակումները:

118.

ա. $G(M,M_0)=ln\dfrac{1}{r_0}-ln\dfrac{R}{\rho_0 r_1}$,

բ. $G(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)=G^*(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)-G^*(\rho,\varphi;\rho_0,2\pi-\varphi_0)$,
որտեղ $0\le\varphi\le\pi,\ G^*=G(M,M_0):$

գ. $G(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)=G^*(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)-G^*(\rho,\varphi;\rho_0,2\pi-\varphi_0)-$
$-G^*(\rho,\varphi;\rho_0,\pi-\varphi_0)+G^*(\rho,\varphi;\rho_0,\pi+\varphi_0)$,
որտեղ $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ G^*=G(M,M_0):$

դ. $G(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)=$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(G^*(\rho,\varphi;\rho_0,2k\alpha+\varphi_0)-G^*(\rho,\varphi;\rho_0,2k\alpha-\varphi_0)\right),$$
որտեղ $\rho\le R,\ 0\le\varphi\le\alpha=\dfrac{\pi}{n},\ G^*=G(M,M_0):$

ե. $G=G(M,M_0)-G(M,M_0^{'})$,
$$G(M,M_0)=\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho_0 r_1},$$
որտեղ $M_0^{'}$ կետը սիմետրիկ է M_0 կետին $z=0$ հարթության նկատմամբ:
Այստեղ պահպանված են **116** խնդրի նշանակումները:

զ. $G=G(M,M_0)-G(M,M_0^{'})+G(M,M_0^{''})-G(M,M_0^{'''}):$
Այստեղ ենթադրվում է, որ քառորդ սֆերան սահմանափակված է $z=0$ և $x=0$ հարթություններով: $M_0,\ M_0^{'},\ M_0^{''},\ M_0^{'''}$ կետերում գտնվում են լիցքը և իր արտացոլումները:
Այստեղ պահպանված են նախորդ խնդրի նշանակումները:

119. $G(M,M_0)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e_n}{r_n}-\frac{e_n^{'}}{r_n^{'}}\right)$,
$$M=M(\rho,\theta,\varphi),\ M_0=M_0(\rho_0,\theta_0,\varphi_0),\ r_n=MM_n,$$
$$r_n^{'}=MM_n^{'},\ M_n=M(\rho_n,\theta_0,\varphi_0),\ M_n^{'}=M(\rho_n^{'},\theta_0,\varphi_0),$$
$$e_n=\begin{cases}\left(\frac{a}{b}\right)^k,\ n=2k\\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1},\ n=2k+1\end{cases},\ e_n^{'}=\begin{cases}\left(\frac{a}{b}\right)^k\frac{a}{\rho_0},\ n=2k\\ \left(\frac{b}{a}\right)^k\frac{b}{\rho_0},\ n=2k+1\end{cases},$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k, \ n = 2k \\ \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{k+1} \rho_0, \ n = 2k+1 \end{cases},$$

$$\rho_n^{'} = \begin{cases} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k \frac{a^2}{\rho_0}, \ n = 2k \\ \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \frac{b^2}{\rho_0}, \ n = 2k+1 \end{cases},$$

Այս շարքը և մյուս շարքերը, որոնք ստացվում են երկու անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցելով՝ հավասարաչափ և բացարձակ զուգամետ են:

120.

$$G(M, M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} ln \frac{e_n r_n^{'}}{r_n e_n^{'}},$$

$$M = M(\rho, \varphi), \ M_0 = M_0(\rho_0, \varphi_0), \ r_n = MM_n,$$

$$r_n^{'} = MM_n^{'}, \ M_n = M(\rho_n, \varphi_0), \ M_n^{'} = M(\rho_n^{'}, \varphi_0) :$$

Մյուս մեծությունները որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում: Այս շարքը և մյուս շարքերը, որոնք ստացվում են երկու անգամ անդամ-առ-անդամ ածանցելով՝ հավասարաչափ և բացարձակ զուգամետ են:

121.

$$\frac{1}{4\pi} \int_S f(y) \left[\frac{2}{|y-x|} - \frac{1}{R} ln(R - |x| \cos\gamma + |y-x|) \right] d\sigma + C,$$

որտեղ γ-ն x և $y - x$ վեկտորիների կազմած անկյունն է:

122.

ա. $G(z, \xi) = ln \left| \dfrac{z - \overline{\xi}}{z - \xi} \right|,$

բ. $G(z, \xi) = ln \left| \dfrac{(z - \xi^*)(z - \overline{\xi})}{(z - \xi)(z - \overline{\xi^*})} \right|,$

որտեղ ξ^*-ը ξ կետի սիմետրիկ կետն է $|z| = R$ շրջանագծի նկատմամբ,

գ. $G(z, \xi) = ln \left| \dfrac{z^2 - \overline{\xi^2}}{z^2 - \xi^2} \right|,$

դ. $G(z, \xi) = ln \left| \dfrac{e^{z - \overline{\xi}} - 1}{e^{z - \xi} - 1} \right| :$

123. $u(r) = \begin{cases} 2\pi\mu_0(a^2 - \frac{r^2}{3}), \ r \le a \\ \frac{4\pi}{3}\mu_0\frac{a^3}{r}, \ r \ge a \end{cases}$:

Պոտենցիալն օժտված է սֆերիկ սիմետրիայով:

124. Տես նախորդ խնդրի պատասխանը:

$$2\pi\mu_0\int_0^a\int_0^\pi \frac{\xi^2\sin\theta d\xi d\theta}{R}, \ R^2 = \xi^2 + r^2 - 2\xi r\cos\theta :$$

125. $\begin{cases} 2\pi\mu_0(b^2 - a^2), \ r < a \\ 2\pi\mu_0 b^2 - \frac{2\pi\mu_0}{3}(r^2 + \frac{2a^3}{r}), \ a < r < b \\ \frac{4\pi\mu_0}{3}(b^3 - a^3)\frac{1}{r}, \ r > b \end{cases}$:

126. $\begin{cases} 2\pi(\mu_1(a^2 - \frac{r^2}{3}) + \mu_2(c^2 - b^2)), \ r < a \\ 2\pi\mu_2(c^2 - b^2) + \frac{4\pi}{3}\mu_1 a^3\frac{1}{r}, \ a < r < b \\ \frac{4\pi(\mu_2(c^3 - b^3) + a^3\mu_1)}{3r}, \ r > c \end{cases}$:

127. $\begin{cases} \frac{M(c)}{r}, \ r > c \\ \frac{M(r)}{r} + 4\pi\int_r^c \xi\mu(\xi)d\xi, \ r < c \end{cases}$, $M(r) = 4\pi\displaystyle\int_0^r \mu(\xi)\xi^2 d\xi$:

128. $\begin{cases} 4\pi a\mu_0, \ r \le a \\ \frac{4\pi a^2\mu_0}{r}, \ r > a \end{cases}$,

a-ն սֆերայի շառավիղն է:

129. Տես նախորդ խնդրի պատասխանը:

130. Եթե a շառավղով գնդի կենտրոնը տեղադրված է $x = 0$, $y = 0$, $z = b$ կետում, ապա էլեկտրաստատիկ դաշտի պոտենցիալն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 2\pi\mu_0(a^2 - \frac{r^2}{3}) - \frac{4\pi}{3}\mu_0\frac{a^3}{r_1}, \ r < a \\ \frac{4\pi}{3}\mu_0 a^3(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}), \ r > a \end{cases},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}, \ r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+b)^2} :$$

Օգտվել հայելային արտացոլման եղանակից:

131. $\begin{cases} \mu_0\pi a^2(\frac{1}{2} - lna - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}), \ r < a \\ \pi a^2\mu_0 ln\frac{1}{r}, \ r > a \end{cases},$
որտեղ a-ն շրջանի շառավիղն է:

132. Տես նախորդ խնդրի պատասխանը: Օգտվել
$$ln\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\varphi}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos n\varphi \quad (|r|<1)$$
վերլուծությունից:

133. $2a - y\,arctg\dfrac{2ay}{y^2+x^2-a^2}-$
$$-\frac{a-x}{2}ln(y^2+(a-x)^2) - \frac{a+x}{2}ln(y^2+(a+x)^2):$$

134. $\mu_0\left[arctg\dfrac{x+a}{y} - arctg\dfrac{x-a}{y}\right]:$

135. (ρ,φ) կոորդինատներում լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)f(\psi)d\psi}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}:$$

136. (ρ,φ) կոորդինատներում լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\rho^2-a^2)f(\psi)d\psi}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}:$$

137. Լուծումը հարկավոր է փնտրել
$$a\int_0^{2\pi}ln\frac{1}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}}\mu(\psi)d\psi + const$$
տեսքով: Համապատասխան ինտեգրալային հավասարումից կստանանք՝ $\mu(\varphi) = \dfrac{1}{\pi}f(\varphi):$

138. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը $z > 0$ կիսատարածությունում տրվում է
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zf(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}$$

$\left(\mu(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}f(x,y)\right)$ բանաձևով:

Նեյմանի խնդրի լուծումը $z>0$ կիսատարածությունում տրվում է

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}+const$$

$\left(\mu(x,y)=\frac{1}{2\pi}f(x,y)\right)$ բանաձևով:

139. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը $y>0$ կիսահարթության համար ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\quad\left(\mu(x)=\frac{1}{\pi}f(x)\right):$$

140.

(համասեռ եզրային պայմաններ)

ա. $\dfrac{l}{2\pi a}\sin\dfrac{2\pi at}{l}\sin\dfrac{2\pi x}{l}$:

բ. $\dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi t}{2l}\sin\dfrac{\pi x}{2l}+\cos\dfrac{5a\pi t}{2l}\sin\dfrac{5\pi x}{2l}$:

գ. $$\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l}+$$
$$+\frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi a(2k+1)}{2l}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{\pi 2l}:$$

դ. $$\cos\frac{a\pi t}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l}+$$
$$+\frac{2l}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi t}{2l}\cos\frac{5\pi x}{2l}:$$

ե. $$\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{\pi kc}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}\cos\frac{\pi kat}{l}:$$

զ. $$\frac{8hl^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}\cos\frac{\pi a(2k+1)t}{l}:$$

է. $\dfrac{8hl^3}{\pi^4 a}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^4}\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}\sin\dfrac{\pi a(2k+1)t}{l}$:

ը. $\cos\dfrac{\pi at}{l}\cos\dfrac{\pi x}{l}+\dfrac{l}{5a\pi}\sin\dfrac{5a\pi t}{l}\cos\dfrac{5\pi x}{l}$:

թ. $\dfrac{4hv_0}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\dfrac{\sin\frac{\pi kc}{l}\cos\frac{\pi kh}{2l}}{1-\left(\frac{kh}{l}\right)^2}\sin\dfrac{\pi kx}{l}\cos\dfrac{\pi kat}{l}$:

ժ. $\dfrac{8lr}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{\pi(2k+1)at}{2l}\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{2l}$:

ի. $\dfrac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{\pi kc}{l}\sin\dfrac{\pi k\delta}{l}\sin\dfrac{\pi kat}{l}\sin\dfrac{\pi kx}{l}$:

լ. $\dfrac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{2l}\cos\dfrac{\pi(2k+1)at}{2l}$:

խ. $t+\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2+1)k^2}\cos\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}\cos\dfrac{\pi(2k+1)at}{l}$:

ծ. $\dfrac{2h}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2(l(h^2+\lambda_k^2)+h)}\sin a\lambda_k t\cos\lambda_k x,$ որտեղ λ_k-ըր $\lambda tg\lambda l=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

կ. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{4h}{\lambda_k l(h^2+\lambda_k^2)+2h\lambda_k}\cos a\lambda_k t(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x),$ որտեղ λ_k-ըր $ctg\lambda l=\frac{\lambda-h^2}{2h\lambda}$ հավասարման դրական արմատներն են:

հ. $\dfrac{2h}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2(l(h^2+\lambda_k^2)+h)}\sin a\lambda_k t\cos\lambda_k x,$ որտեղ λ_k-ըր $\lambda tg\lambda l=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

ձ. $-\dfrac{2}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k+lh)\dfrac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2}\sin a\lambda_k t\sin\lambda_k x,$ որտեղ λ_k-ըր $htg\lambda l=-h$ հավասարման դրական արմատներն են:

ղ. $\dfrac{1}{l}\int_0^l(\varphi(x)+t\psi(x))dx+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+b_k\sin\frac{ak\pi t}{l})\cos\frac{\pi kx}{l},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\ b_k=\frac{2}{a\pi k}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx:$$

ճ. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x),$

$$a_k=\frac{1}{||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)\varphi(x)dx,$$

$$b_k=\frac{1}{a\lambda_k||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)\psi(x)dx,$$

$$||\Psi_k(x)||^2=\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)^2dx=\frac{l(h^2+\lambda_k^2)+h}{2},$$

որտեղ λ_k-րը $hctg\lambda l=\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

մ. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)\cos\lambda_k x,$

$$a_k=\frac{1}{||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l\cos\lambda_k x\varphi(x)dx,$$

$$b_k=\frac{1}{a\lambda_k||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l\cos\lambda_k x\psi(x)dx,$$

$$||\Psi_k(x)||^2=\int_0^l\cos^2\lambda_k xdx=\frac{l}{2}\left(1+\frac{h}{l(h^2+\lambda_k^2)}\right),$$

որտեղ λ_k-րը $\lambda tg\lambda l=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

յ.Տես հաջորդ խնդրի պատասխանը, որտեղ պետք է տեղադրել $h_1=h_2$:

ն. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)\sin(\lambda_k x+\varphi_n),$

$$\varphi_n=arctg\frac{\lambda_n}{h_1},\ a_k=\frac{1}{||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l\sin(\lambda_k x+\varphi_n)\varphi(x)dx,$$

$$b_k=\frac{1}{a\lambda_k||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l\sin(\lambda_k x+\varphi_n)\psi(x)dx,$$

$$||\Psi_k(x)||^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_k x + \varphi_n)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(l + \frac{(\lambda_k^2 + h_1h_2)(h_1+h_2)}{(\lambda_k^2+h_1^2)(\lambda_k^2+h_2^2)}\right),$$

որտեղ λ_k-րը $ctg\lambda l = \dfrac{\lambda^2 - h_1h_2}{\lambda(h_1+h_2)}$ հավասարման դրական արմատներն են:

շ. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t)\sin \lambda_k x,$

$$a_k = \frac{1}{||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l \sin\lambda_k x\varphi(x)dx,$$
$$b_k = \frac{1}{a\lambda_k||\Psi_k(x)||^2}\int_0^l \sin\lambda_k x\psi(x)dx,$$
$$||\Psi_k(x)||^2 = \int_0^l \sin^2\lambda_k xdx = \frac{l(h^2+\lambda_k^2)+h}{2(h^2+\lambda_k^2)},$$

որտեղ λ_k-րը $htg\lambda l = -\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

(անհամասեռ եզրային պայմաններ)

ո. $\dfrac{Hx - 8hl}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{2l}\cos\dfrac{\pi a(2k+1)t}{2l}$:

չ. Լուծումը փնտրել $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ տեսքով, որտող $w(x,t)$ ֆունկցիան բավարարում է անհամասեռ եզրային պայմաններին:

պ. եթե $\omega \neq \omega_n = \dfrac{\pi na}{l}$, $n = 1, 2, \cdots$, ապա

$$\frac{2A\omega}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\omega_k}\sin\omega_k t\sin\frac{\pi kx}{l} + \frac{Ax}{l}\sin\omega t +$$
$$+\frac{2A\omega^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)}(\omega_k\sin\omega t - \omega\sin\omega_k t)\sin\frac{\pi kx}{l},$$

եթե $\omega = \omega_{n_0} = \dfrac{\pi n_0 a}{l}$, ապա

$$\frac{2A\omega}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\omega_k}\sin\omega_k t\sin\frac{\pi kx}{l} + \frac{Ax}{l}\sin\omega t +$$

$$+\frac{2A\omega^2}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n_0}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)}(\omega_n\sin\omega t-\omega\sin\omega_k t)\sin\frac{\pi kx}{l}+$$

$$+\frac{A}{\pi n_0}(-1)^{n_0}(\omega t\cos\omega t-\sin\omega t)\sin\frac{\pi n_0 x}{l}:$$

ջ. $\dfrac{Aa}{sh\frac{l}{a}}e^{-t}ch\dfrac{x}{a}$: Լուծումը փնտրել $u(x,t)=v(x,t)+e^{-t}f(x)$ տեսքով:

ռ. Լուծումը փնտրել $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ տեսքով, որտեղ

$$w(x,t)=\frac{(g(x-l)-1)\mu(t)+(1+hx)\nu(t)}{g+h(1+lg)}:$$

ս. Լուծումը փնտրել $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ տեսքով, որտեղ

$$w(x,t)=(x-l)\mu(t)+\nu(t):$$

վ. $Axt^m+\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(t)\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{2l}$,

$$u_k(t)=\frac{\alpha_k}{\omega_k}\int_0^t\tau^{m-2}\sin\omega_k(t-\tau)d\tau,\ \omega_k=\frac{\pi(2k+1)a}{l},$$

$$\alpha_k=-\frac{2A}{(m-1)(m-2)l}\int_0^l x\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2l}dx:$$

տ. Լուծումը փնտրել $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ տեսքով, որտեղ

$$w(x,t)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu(t)+\frac{x}{l}\nu(t):$$

141.

ա. $\dfrac{2l^2he^{-\nu t}}{\pi^2x_0(l-x_0)}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{\pi kx_0}{l}\sin\dfrac{\pi kx}{l}\theta_k(t)$, որտեղ

$\theta_k(t)=ch\omega_k t+\dfrac{\nu}{\omega_k t}sh\omega_k t,\ \omega_k=\sqrt{\nu^2-\dfrac{a^2k^2\pi^2}{l^2}}$, եթե $\dfrac{k\pi a}{l}<\nu$,

$\theta_k(t)=1+\nu t$, եթե $\dfrac{k\pi a}{l}=\nu$,

$\theta_k(t)=\cos\omega_k t+\dfrac{\nu}{\omega_k t}\sin\omega_k t,\ \omega_k=\sqrt{\dfrac{a^2k^2\pi^2}{l^2-\nu^2}}$, եթե $\dfrac{k\pi a}{l}>\nu$:

բ. $\dfrac{8kle^{-\nu t}}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{\pi(2n+1)x}{2l}\theta_n(t),$

որտեղ $\theta_n(t)$ ֆունկցիան որոշվում է ինչպես նախորդ խնդրում:

գ. $a_0+b_0e^{-2\nu t}+e^{-\nu t}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(t)\cos\dfrac{\pi kx}{l}$, որտեղ

$\theta_k(t)=a_k ch\omega_k t+b_k sh\omega_k t,\ \omega_k=\sqrt{\nu^2-\dfrac{a^2k^2\pi^2}{l^2}}$, եթե $\dfrac{k\pi a}{l}<\nu,$

$\theta_k(t)=a_k+b_k t,$ եթե $\dfrac{k\pi a}{l}=\nu,$

$\theta_k(t)=a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t,\ \omega_k=\sqrt{\dfrac{a^2k^2\pi^2}{l^2-\nu^2}}$, եթե $\dfrac{k\pi a}{l}>\nu,$

$a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\dfrac{\pi kx}{l}dx,\ k=1,2,...,$

$b_k\omega_k-\nu a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l\psi\cos\dfrac{\pi kx}{l}dx,\ k=1,2,...,$

$b_0=\dfrac{1}{2\nu l}\int_0^l\psi(x)dx,\ a_0=\dfrac{1}{l}\int_0^l\phi(x)dx+\dfrac{1}{2\nu l}\int_0^l\psi(x)dx:$

դ. $e^{-\nu t}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(t)\cos\lambda_k x$, որտեղ

$\theta_k(t)=a_k ch\omega_k t+b_k sh\omega_k t,\ \omega_k=\sqrt{\nu^2-\lambda_k^2a^2}$, եթե $a\lambda_k<\nu,$
$\theta_k(t)=a_k+b_k t,$ եթե $a\lambda_k=\nu,$

$\theta_k(t)=a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t,\ \omega_k=\sqrt{a^2\lambda_k^2-\nu^2}$, եթե $a\lambda_k>\nu,$

$a_k=\dfrac{2}{l(1+\frac{h}{l(\lambda_k^2+h^2)})}\int_0^l\varphi(x)\cos\lambda_k xdx,$

$b_k\omega_k-\nu a_k=\dfrac{2}{l(1+\frac{h}{l(\lambda_k^2+h^2)})}\int_0^l\psi\cos\lambda_k xdx,$

իսկ λ_k-րը $\lambda tg\lambda l=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

ե. $e^{-\nu t}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(t)\sin(\lambda_k x+\varphi_n)\quad(\varphi_n=arctg\dfrac{\lambda_k}{h_1}),$

որտեղ $\theta_k(t)$-ն և ω_k-ն որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում: λ_k-րը $ctg\lambda l = \dfrac{\lambda^2 - h_1h_2}{\lambda(h_1+h_2)}$ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ

$$a_k = \frac{2}{\left(l + \frac{(\lambda_k^2+h_1h_2)(h_1+h_2)}{(\lambda_k^2+h_1^2)(\lambda_k^2+h_2^2)}\right)} \int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_k x + \varphi_k)dx,$$

$$b_k\omega_k - \nu a_k = \frac{2}{\left(l + \frac{(\lambda_k^2+h_1h_2)(h_1+h_2)}{(\lambda_k^2+h_1^2)(\lambda_k^2+h_2^2)}\right)} \int_0^l \psi(x)\sin(\lambda_k x + \varphi_k)dx,$$

$k = 1, 2, 3, \cdots :$

գ. $e^{-\nu t}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos q_k t + b_k \sin q_k t)\sin\dfrac{\pi k x}{l},\ q_k = \sqrt{\dfrac{k^2\pi^2a^2}{l^2} - \nu^2},$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx,\ b_k = \frac{h}{q_k} + \frac{2}{lq_k}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx :$$

ե. $w(x,t) + e^{-\nu t}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{\pi(2n+1)at}{2l} +$

$$+ b_n \sin\frac{\pi(2n+1)at}{2l})\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l},$$

$$a_n = -\frac{2}{l}\int_0^l w(x,0)\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}dx,$$

$$b_n = -\frac{4\nu}{(2n+1)\pi a l}\int_0^l w_t(x,0)\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}dx,$$

$$w(x,t) = Im\left(\frac{A(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}\frac{e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{-(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha+\beta i)l} - e^{-(\alpha+\beta i)l}}e^{i\omega t}\right),$$

$$\alpha + \beta i = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\omega\nu i}}{a} :$$

142.

ա. $\dfrac{gx}{a^2}(l - \dfrac{x}{2}) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{gl^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\dfrac{(2n+1)\pi a t}{2l} +\right.$

$$\left. + \frac{2v_0 l^2}{(2n+1)^2\pi^2 a}\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} :$$

բ. $$\frac{1}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\xi)\sin\frac{ka\pi(t-\xi)}{l}d\xi\right]\cos\frac{\pi kx}{l}+$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau,\ f_0(\xi)=\frac{1}{l}\int_0^l f(x,\xi)dx,$$
$$f_k(\xi)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\xi)\cos\frac{\pi kx}{l}dx:$$

գ. $$\frac{2l}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left[\int_0^t \tau_k(\xi)\sin\frac{(2k+1)a\pi(t-\xi)}{2l}d\xi\right]\times$$
$$\times\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}:$$

դ. $$\frac{1}{a^2l}\left[l\int_0^x d\xi\int_0^\xi\Phi(z)dz-x\int_0^l d\xi\int_0^\xi\Phi(z)dz\right]t+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nat}{l},$$
$$b_n=-\frac{2}{\pi na^3l}\int_0^l\left[l\int_0^x d\xi\int_0^\xi\Phi(z)dz-\right.$$
$$\left.-x\int_0^l d\xi\int_0^\xi\Phi(z)dz\right]\sin\frac{\pi nx}{l}dx:$$

ե. $$\frac{1}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\frac{\pi at}{l}+\frac{l}{a\pi}\sin\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}:$$

զ. $$\frac{4l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\left(1+\left(\frac{\pi ak}{l}\right)^2\right)}\left(e^{-t}-\cos\frac{\pi kat}{l}+\frac{l}{ka\pi}\sin\frac{\pi akt}{l}\right)\times$$
$$\times\sin\frac{\pi kx}{l}:$$

է. $$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)\left(\left(\frac{a\pi(2k+1)}{2l}\right)^2-1\right)}\times$$
$$\times\left(\sin t-\frac{2l}{a\pi(2k+1)}\sin\frac{a\pi(2k+1)}{2l}\right):$$

ը. $(e^{-t}-\cos t+\sin t)\cos\dfrac{x}{2}$ ։

թ. $u(x,t)=v(x)+w(x,t)+z(x,t)$,

$$v(x)=\frac{k\sin kx}{\cos kl}\int_0^l \xi\cos k(l-\xi)d\xi-k\int_0^x \xi\sin k(x-\xi)d\xi,$$

$$w(x,t)=X(x)\sin\omega t=\frac{g}{2\omega^2}\left[\frac{\cos\frac{\omega(l-x)\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\omega l\sqrt{2}}{a}}-1\right]\sin\omega t,$$

$$z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l},$$

$$A_n=-\frac{2}{l}\int_0^l v(\xi)\sin\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}d\xi,$$

$$B_n=-\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l X(\xi)\sin\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}d\xi,$$

$$\omega_n=-\sqrt{\omega^2-\frac{(2n+1)\pi^2a^2}{4l^2}}\ ։$$

ժ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\ u_n(t)=\frac{\alpha_n}{\omega_n}\int_0^t \tau^m\sin\omega_n(t-\tau)d\tau,$

$$\omega_n=\frac{\pi na}{l},\ \alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\ ։$$

ի. Հաջորդ խնդրի պատասխանում Φ_n-ը փոխարինել $2\frac{1-(-1)^n}{\pi n}$-ով։

լ. Եթե $\omega\neq\omega_n=\dfrac{\pi na}{l},\ n=1,2,\cdots,$ ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n}{\omega_n^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_n t)\sin\frac{\pi nx}{l}\ ։$$

Եթե $\omega\neq\omega_{n_0}=\dfrac{\pi n_0 a}{l},\ n=1,2,\cdots,$ ապա

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Phi_n}{\omega_n^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_n t)\sin\frac{\pi nx}{l}+$$

$$+\frac{\Phi_{n_0}t\sin\omega t}{2\omega}\sin\frac{\pi n_0x}{l},\ \Phi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\ ։$$

խ. Եթե $\omega \neq \omega_n = \dfrac{\pi n a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}(\omega_n \sin\omega t - \omega \sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l} :$$

Եթե $\omega = \omega_{n_0} = \dfrac{\pi n_0 l}{a}$, ապա

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\Phi_n}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}(\omega_n \sin\omega t - \omega \sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l} +$$

$$+\frac{\Phi_{n_0}}{2\omega_{n_0}^2}(\sin\omega_{n_0} t - \omega_{n_0} t\cos\omega_{n_0} t)\sin\frac{\pi n_0 x}{l},$$

$$\Phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(t)\sin\frac{\pi n t}{l}dt :$$

ծ. Նախորդ խնդրի պատասխանում Φ_n-ը փոխարինել $2\dfrac{1-(-1)^n}{\pi n}\Phi_0$-ով:

կ. $$-\frac{g}{2a^2}(x^2 - lx) + \frac{2l^2}{\pi^2}e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h}{n^2 x_0(l - x_0)}\sin\frac{\pi n x_0}{l} +\right.$$

$$\left.+\frac{g}{\pi n^3 a^2}(-1 + (-1)^n)\right)\left(\cos\omega_n t + \frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{\pi n x}{l} :$$

հ. $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},\ u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n}\int_0^t \tau e^{-\nu(t-\tau)}\sin\omega_n^*(t-\tau)d\tau,$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(z)\sin\frac{\pi n z}{l}dz,\ \omega_n = \frac{\pi n a}{l},\ \omega_n^* = \sqrt{\omega_n^2 - \nu^2},$$

այստեղ ենթադրվում է, որ $\omega_n > \nu$, հակառակ դեպքում լուծումը կպարունակի $sh\omega_n^*$ տեսքով անդամներ:

ձ. $$u(x,t) = U(x,t) + e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n\sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{\pi n x}{l},\quad a_n = -\frac{2}{l}\int_0^l U(z,0)\sin\frac{\pi n z}{l}dz,$$

$$b_n = \frac{\nu l}{n\pi a}a_n - \frac{2}{\pi n a}\int_0^l U_t(z,0)\sin\frac{\pi n z}{l}dz,$$

$$U(x,t)=Im\Bigg(\frac{\alpha-i\beta}{(\alpha^2+\beta^2)a^2}\Bigg(\frac{X(x)}{X(l)}\int_0^l\Phi(\xi)X(l-\xi)d\xi-$$
$$-e^{i\omega t}\int_0^x\Phi(\xi)X(x-\xi)d\xi\Bigg)\Bigg),$$
$$X(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{-(\alpha+i\beta)x},\ \alpha+i\beta=\frac{\sqrt{\omega^2-2\omega\nu i}}{a}:$$

Մասնակի լուծումը փնտրել $X(x)e^{i\omega t}$ տեսքով և այնուհետև վերցնել կեղծ մասը:

դ. $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$,

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{ka\pi}{l}\sin\frac{\pi kx}{l},$$
$$a_k=-\frac{2}{l}\int_0^l w(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx,$$
$$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^y f(\xi)d\xi dy+$$
$$+\frac{x}{la^2}\int_0^l\int_0^y f(\xi)d\xi dy+\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha:$$

ծ. $\dfrac{\beta-\alpha}{2l}x^2+\alpha x+\Phi_0+\psi_0 t+\dfrac{F_0}{2}t^2+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\Big(\frac{i}{ak\pi}\Big)^2F_k+\Bigg(\Phi_k-\Big(\frac{l}{ak\pi}\Big)^2F_k\Bigg)\cos\frac{ak\pi t}{l}+$$
$$+\frac{l\psi_k}{ak\pi}\Bigg)\cos\frac{\pi kx}{l},$$
$$F_k=\frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^l\left[f(x)-\frac{(\beta-\alpha)x^2}{2l}\right]\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$
$$\Phi_k=\frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^l\left[\varphi(x)-\frac{(\beta-\alpha)x^2}{2l}-\alpha x\right]\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$
$$\psi_k=\frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$
$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_k=2,\ k=1,2,\cdots.$$

մ. $w(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x),$

$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^y f(\xi)dy+$

$+\left(\beta-\alpha l+\frac{1}{a^2}\int_0^l\int_0^y f(\xi)d\xi dy\right)\frac{1+hx}{1+hl}+\alpha x$

$a_k=\frac{2}{h+l(h^2+\lambda_k^2)}\int_0^l(\varphi(x)-w(x))\times$

$\times(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)dx,$

$b_k=\frac{2}{a\lambda_k(h+l(h^2+\lambda_k^2))}\int_0^l\psi(x)(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)dx,$

որտեղ λ_k-րը $htg\lambda l=-\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

յ. $w(x)-2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{h^2+\lambda_k^2}{h+l(h^2+\lambda_k^2)}\int_0^l w(\xi)\cos\lambda_k\xi d\xi\right]\times$

$\times\cos a\lambda_k t\cos\lambda_k x,$

$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^y f(\xi)d\xi dy+\frac{\beta-\alpha}{h}-\alpha(l-x)+$

$+\frac{1}{a^2}\int_0^l\int_0^y f(\xi)d\xi dy+\frac{1}{a^2h}\int_0^l f(\xi)d\xi,$

որտեղ λ_k-րը $\lambda tg\lambda l=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

ն. Լուծումը փնտրել $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ տեսքով և $v(x,t)$ ֆունկցիայի համար ստանալ համասեռ եզրային պայմաններով խառը խնդիր:

$w(x,t)=\left(1-\frac{hx}{1+lh}\right)\mu(t)+\frac{x}{1+lh}\nu(t):$

շ. Լուծումը փնտրել $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ տեսքով և $v(x,t)$ ֆունկցիայի համար ստանալ համասեռ եզրային պայմաններով խառը խնդիր:

$w(x,t)=-\frac{1}{h}\mu(t)+(x+\frac{1}{h})\nu(t):$

ո. $\frac{t}{2}-\left(\frac{1}{4}+\cos\frac{2}{a}\right)x\sin 2t:$

Լուծումը փնտրել $u(x,t) = v(x,t) + f(x)\sin 2t$ տեսքով:

չ. $2xt + (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t})\cos x$:

պ. $xt + (2e^t - e^{2t})e^{-x}\sin x$:

143.

ա. $$\frac{16Al_1^2l_2^2}{\pi^6}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l_1}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l_1}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}\times$$
$$\times\cos\pi at\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1}+\frac{(2n+1)^2}{l_2}} :$$

բ. $$\frac{16Al_1^2l_2^2}{\pi^7 a}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l_1}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l_1}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}\times$$
$$\times\frac{\sin\pi at\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1}+\frac{(2n+1)^2}{l_2}}}{\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1}+\frac{(2n+1)^2}{l_2}}} :$$

գ.$\cos\dfrac{\sqrt{s^2+p^2}a\pi t}{sp}\sin\dfrac{\pi x}{s}\sin\dfrac{\pi y}{p}$:

դ. $$\frac{64Asp}{\pi^4}\sum_{k,n=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2s}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2p}}{(2k+1)^2(2n+1)^2}\times$$
$$\times\cos\pi at\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4s^2}+\frac{(2n+1)^2}{4p^2}} :$$

ե. $3\cos\sqrt{5}t\sin x\sin 2y + \sin 5t\sin 3x\sin 4y$:

զ. $$\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{mn}(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2},$$
$$A_{mn} = \frac{4}{l_1l_2(\omega_{mn}^2-\omega^2)}\int_0^{l_1}dx\int_0^{l_2}A(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}dy,$$
$$\omega_{mn} = \pi a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}} :$$

է. $\sin\dfrac{2\pi y}{p}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(e^{-t}-\cos a\pi\omega_k t+\dfrac{1}{a\pi\omega_k}\sin a\pi\omega_k t)\sin\dfrac{\pi kx}{s}$,

$$a_k=\frac{(-1)^{k+1}2s}{\pi\rho k(1+a^2\pi^2\omega_k)},\ \omega_k=\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}:$$

ը. $$u(r,t)=\left(\frac{2a\varepsilon\left(\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}r_2-\frac{1}{r_2}\sin\frac{\omega}{a}r_2\right)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos\frac{\omega}{a}(r_1-r_2)}\frac{\cos\frac{\omega}{a}r}{r}+\right.$$
$$\left.+\frac{2a\varepsilon\left(\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega}{a}r_2+\frac{1}{r_2}\cos\frac{\omega}{a}r_2\right)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos\frac{\omega}{a}(r_1-r_2)}\frac{\sin\frac{\omega}{a}r}{r}\right)\cos\omega t:$$

Լուծումը փնտրել $R(r)\cos\omega t$ տեսքով:

թ. $$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\cos\lambda_n r+\gamma_n\sin\lambda_n r}{r}\sin a\lambda_n t,$$

$$\lambda_n=(2n+1)\frac{\pi}{2(r_2-r_1)},\ \gamma_n=\frac{\lambda_n\sin\lambda_n r_2+\frac{1}{r_2}\cos\lambda_n r_2}{\lambda_n\cos\lambda+nr_2-\frac{1}{r_2}\sin\lambda_n r_2},$$

$$A_n=-\frac{a^2}{\rho_0}\int_{r1}^{r_2}rf(r)(\cos\lambda_n r+\gamma_n\sin\lambda_n r)dr:$$

Լուծումը փնտրել $rv(r,t)$ տեսքով:

144.

ա. $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\dfrac{\pi nx}{l},\ a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)sin\dfrac{\pi nx}{l}dx:$

բ. $\dfrac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}:$

գ. $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\cos\dfrac{\pi nx}{l},\ a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\dfrac{\pi nx}{l}dx:$

դ. $u(x,t)=w(x)+v(x,t)$,

$$w(x)=H\frac{u_2-u_1}{2+lH}x+\frac{u_2+(1+lH)u_1}{2+lH,}$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\left(\cos\lambda_n x+\frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right),$$

$$a_n=\frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2+H^2)l+2H}\int_0^l(\varphi(x)-w(x))\times$$
$$\times\left(\cos\lambda_n x+\frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right)dx,$$

$\lambda_n=\dfrac{z_n}{l}$, որտեղ z_n-ըը $ctgz=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{lH}-\dfrac{lH}{z}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են:

ե. $\dfrac{16l^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$:

զ. $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((u_0-u_1)(1-(-1)^n)+(-1)^{n+1}(u_1-u_2))\times$:

$$\times e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}+u_1+(u_2-u_1)\frac{x}{l}:$$

է. $Q_0x+U_0+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n-\frac{4}{\pi^2}\frac{(2n+1)\pi U_0+lQ_0}{(2n+1)^2}\right]\times$

$$\times e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(z)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}dz:$$

ը. $u_0-\dfrac{4u_0}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$,

թ. $Q\left[\dfrac{a^2t}{l}+\dfrac{3x^2-l^2}{6l}+\dfrac{2l}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos\frac{\pi kx}{l}}{k^2}e^{-\frac{k^2\pi^2a^2t}{l^2}}\right]$:

ժ. $\dfrac{A}{l}xt+\dfrac{Ax}{6a^2l}(x^2-l^2)+v(x,t)$,

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = -\frac{A}{3a^2l^2}\int_0^l x(x^2-l^2)\sin\frac{\pi nx}{l}dx :$$

ի. $qx + \dfrac{(A-q)l}{2} - \dfrac{4l(A-q)}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\times$

$$\times\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l} :$$

լ. $\dfrac{aA}{\cos\frac{l}{a}}e^{-t}\sin\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{l}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{T}{\omega_k} + \frac{(-1)^kAa^2}{1-a^2\omega_k^2}\right]\times$

$$\times e^{-a^2\omega_k^2t}\sin\omega_kx, \omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l},\ \omega_k \neq \frac{1}{a},\ k = 0, 1, \cdots.$$

Լուծումը փնտրել $u(x,t) = f(x)e^{-t} + v(x,t)$ տեսքով:

խ. $\dfrac{Ax}{l}\cos\omega t + \dfrac{2A\omega}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\frac{(-1)^{n+1}}{n(\omega^2+\omega_n^2)}\times$

$$\times(\omega_n\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\omega_nt}) + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}e^{-\omega_nt},$$

$$\omega_n = \frac{\pi^2n^2a^2}{l^2},\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l(\varphi(x) - \frac{Ax}{l})\sin\frac{\pi nx}{l}dx :$$

ծ. $\dfrac{Ax^2}{2l}\cos\omega t + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}e^{-\omega t}+$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}w_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l\left(\varphi(x) - \frac{Ax^2}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx,$$

$$W_n(t) = \frac{4a^2A}{\pi l(2n+1)(\omega^2+\omega_n^2)}(\omega_n\cos\omega t + \omega\sin\omega t)+$$

$$\left(\frac{8Al(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{16Al}{\pi^3(2n+1)^3}\right)\frac{\omega_n\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{\omega_n^2+\omega^2}+$$

$$+C_ne^{-\omega_nt},\ C_n = \frac{\omega}{\omega^2+\omega_n^2}\left(\frac{8Al(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{16Al}{\pi^3(2n+1)^3}\right)-$$

$$-\frac{4a^2A\omega_n}{\pi l(2n+1)(\omega^2+\omega_n^2)},\ \omega_n=\frac{a^2\pi^2(2n+1)^2}{4l^2}:$$

կ. $-\dfrac{a^2A}{2l}t^2-\left(\dfrac{A}{2l}x^2-Ax+\dfrac{Al}{3}-\dfrac{a^2T}{l}\right)t+\dfrac{T}{2l}x^2-$

$$-\frac{lt}{6}+\frac{2l}{a^2\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\Bigg[Al^2-(Al^2+(-1)^kT(ak\pi)^2)\times$$

$$\times e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\Bigg]\cos\frac{\pi kx}{l}:$$

145.

ա. $\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right]d\xi+$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\tau)\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2(t-\tau)}{l^2}}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right]d\xi:$$

բ. $\displaystyle\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^t\Phi(\tau)e^{-\frac{\pi^2a^2(t-\tau)}{l^2}}d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{\pi nx}{l},$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx:$$

գ. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$

$$w(x,t)=(\alpha_1x+\beta_1)\psi_1(t)+(\alpha_2x+\beta_2)\psi_2(t),$$

$$\alpha_1=\frac{1}{2+hl},\ \beta_1=\frac{1+hl}{(2+hl)h},\ \alpha_2=\frac{1}{2+hl},\ \beta_2=\frac{1}{h(2+hl)},$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)X_n(x),\ X_n(x)=\cos\lambda_nx+\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_nx,$$

$\lambda_n=\frac{z_n}{l}$, որտեղ z_n-ըը $ctgz=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{lh}-\frac{lh}{z}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են,

$$v_n(t)=\int_0^t e^{a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\theta_n(\tau)d\tau+a_ne^{-a^2\lambda_n^2t},$$

$$\theta_n(t)=\frac{1}{||X_n||^2}\int_0^l f^*(z,t)X_n(z)dz,$$

$$a_n = \frac{1}{||X_n||^2}\int_0^l \varphi^*(z)X_n(z)dz,$$
$$f^*(x,t) = f(x,t) - (\alpha_1 x + \beta_1)\psi_1'(t) - (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2'(t),$$
$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - (\alpha_1 x + \beta_1)\psi_1(0) - (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2(0),$$
$$||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n(x)^2 dx = \frac{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h}{2\lambda_n^2} :$$

դ. $w(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2 \pi^2 t}{4l^2}} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l (\varphi(x) - w(x))\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx,$$
$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x}{a^2}\int_0^l f(\xi)d\xi + qx :$$

146.

ա. $\sin\frac{\pi x}{2l}e^{\left(\frac{a^2\pi^2}{4l^2}+\beta\right)t}$:

բ. $u(x,t) = u_0 + w(x) + v(x,t),$

$$w(x) = -u_0\frac{sh\frac{\sqrt{h}(l-x)}{a} + sh\frac{\sqrt{h}x}{a}}{sh\frac{\sqrt{h}l}{a}},$$
$$v(x,t) = -\frac{4hl^2u_0}{\pi a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}e^{\left[\frac{(2k-1)^2\pi^2a^2}{l^2}+h\right]t}}{(2k-1)[(2k-1)^2\pi^2a^2 + hl^2]} :$$

գ. $u(x,t) = w(x) + v(x,t),$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(a^2\lambda_n^2+h)t}\left(\cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right),$$
$$w(x) = H\frac{\left[u_2\frac{\sqrt{h}}{a} - u_1\left(H sh\frac{\sqrt{h}l}{a} - \frac{\sqrt{h}}{a}ch\frac{\sqrt{h}l}{a}\right)\right]ch\frac{\sqrt{h}x}{a}}{\left(H^2+\frac{h}{a^2}\right)sh\frac{\sqrt{h}l}{a}} +$$
$$+H\frac{\left[u_2 H + u_1\left(H ch\frac{\sqrt{h}l}{a} + \frac{\sqrt{h}}{a}sh\frac{\sqrt{h}l}{a}\right)\right]sh\frac{\sqrt{h}x}{a}}{\left(H^2+\frac{h}{a^2}\right)sh\frac{\sqrt{h}l}{a}},$$

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2+H^2)l+2H}\int_0^l (\varphi(x)-w(x))\times$$
$$\times\left(\cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right)dx,$$

$\lambda_n = \dfrac{z_n}{l}$, որտեղ z_n-ը $ctgz = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{lH} - \dfrac{lH}{z}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են:

դ. $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\left(\frac{\pi^2(2k+1)^2}{l^2}+1\right)t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$:

ե. $-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2 t}\sin(2k+1)x$:

զ. $\dfrac{1}{2}(1-e^{-2t})\sin x$:

է. $e^{-\frac{3}{4}t}\sin\dfrac{x}{2}$:

ը. $u(x,t) = u_0 + w(x) + v(x,t)$,

$$w(x) = \frac{(u_1-u_0)sh\frac{\sqrt{h}(l-x)}{a} + (u_2-u_0)sh\frac{\sqrt{h}x}{a}}{sh\frac{\sqrt{h}l}{a}},$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+h\right)t}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l(\varphi(x)-w(x)-u_0)\sin\frac{\pi n x}{l}dx :$$

թ. $u(x,t) = w(x) + v(x,t)$,

$$\frac{a}{\sqrt{h}}Q_1 sh\frac{\sqrt{h}x}{a} + \frac{Q_2 - Q_1 ch\frac{\sqrt{h}l}{a}}{\frac{\sqrt{h}}{a}sh\frac{\sqrt{h}l}{a}}ch\frac{\sqrt{h}x}{a},$$

$$v(x,t) = \frac{a_0}{2}e^{-ht} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+h\right)t}\cos\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l(\varphi(x)-w(x))\cos\frac{\pi n x}{l}dx :$$

ժ. $u(x,t) = u_0 + e^{-ht}v(x,t)$,

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)e^{-n^2a^2t},$$
$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi(x)-u_0)dx,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-u_0)\cos nxdx,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-u_0)\sin nxdx:$$

ի. $u_0+e^{-ht}(u_1-u_0):$

լ. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$

$$w(x,t)=(\alpha_1x+\beta_1)\psi_1(t)+(\alpha_2x+\beta_2)\psi_2(t),$$
$$\alpha_1=\frac{1}{2+hl},\ \beta_1=\frac{1+hl}{(2+hl)h},\ \alpha_2=\frac{1}{2+hl},\ \beta_2=\frac{1}{h(2+hl)},$$
$$v(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l f^*(z,\tau)G(x,z,t-\tau)dz+$$
$$+\int_0^l\varphi^*(z)G(x,z,t)dz,$$
$$G(x,z,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(a^2\lambda_n^2+h)(t-\tau)}\frac{X_n(x)X_n(z)}{||X_n||^2},$$

$\lambda_n=\frac{z_n}{l}$, որտեղ z_n-ըը $ctgz=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{lh}-\frac{lh}{z}\right)$ հավասարման դրական արմատներն են,

$$||X_n(x)||^2=\int_0^l X_n(x)^2dx=\frac{(\lambda_n^2+h^2)l+2h}{2\lambda_n^2},$$
$$f^*(x,t)=f(x,t)-hw(x,t)-\varphi_t(x,t),$$
$$\varphi^*(x)=\varphi(x)-w(x,0):$$

խ. $xt+\sin(\pi x)e^{x-t-\pi^2t}:$

ծ. $x+t\sin x+\frac{1}{8}(1-e^{-8t})\sin 3x:$

147.

ա. $\dfrac{16u_0}{\pi^2}\displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l}}{(2m+1)(2n+1)}\times$

$$\times e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}((2m+1)^2+(2n+1)^2)t} \ :$$

բ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2p}\sin\frac{\pi n y}{s},$

$$T_{kn}(t)=\frac{4}{ps}\int_0^t e^{-a^2\omega_{kn}^2(t-\tau)}\int_0^p\int_0^s f(\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\sin\frac{(2k+1)\pi\xi}{2p}\sin\frac{\pi n\eta}{s}d\xi d\eta d\tau,$$
$$\omega_{kn}^2=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4p^2}+\frac{\pi^2n^2}{s^2} \ :$$

գ. $\displaystyle Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}+$

$$+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\left(1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right)\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s} \ :$$

դ. $\displaystyle\frac{A}{a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)-1}\left(e^{-t}-e^{-a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)t}\right)\times$

$$\times\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s} \ :$$

ե. $\displaystyle\sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2 t}\sin\frac{\pi k x}{p}\sin\frac{\pi n y}{s},$

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s\varphi(x,y)\sin\frac{\pi k x}{p}\sin\frac{\pi n y}{s}dxdy,$$
$$\omega_{kn}^2=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{s^2} \ :$$

զ. $\displaystyle\sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2 t}\sin\frac{\pi k y}{s}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2p},$

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s\varphi(x,y)\sin\frac{\pi k y}{s}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2p}dxdy,$$
$$\omega_{kn}^2=\frac{\pi^2k^2}{s^2}+\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4p^2} \ :$$

է. $u(r,t)=\dfrac{2}{Rr}\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k(t)\sin\dfrac{\pi kr}{R},$

$$C_k(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{R}\right)^2(t-\tau)}\int_0^R \xi f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k\xi}{R}d\xi d\tau :$$

ը. $U+\dfrac{Q}{6k}(R^2-r^2)+\dfrac{2R}{\pi r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\left(U-T-\dfrac{QR^2}{kn^2\pi^2}\right)\times$

$$\times e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2t}\sin\frac{\pi nr}{R},\ a^2=\frac{k}{x\rho} :$$

թ. $u(r,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2t}\dfrac{\sin\lambda_n r}{r},$

$$A_n=\frac{2}{r_0}\frac{r_0^2\lambda_n^2+(r_0h-1)^2}{r_0^2\lambda_n^2+(r_0h-1)r_0h}\int_0^{r_0}rf(r)\sin\lambda_n r dr,$$

որտեղ λ_n-ը $tg\lambda_n r_0=\dfrac{\lambda_n r_0}{1-r_0h}$ հավասարման դրական արմատներն են:

ժ. $u(r,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{r_0^2}}\dfrac{\sin\frac{\pi nr}{r_0}}{r},$

$$A_n=\frac{2}{r_0}\int_0^{r_0}rf(r)\sin\frac{\pi nr}{r_0}dr :$$

ի. $u_1+2\dfrac{r_0}{\pi}(u_0-u_1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{r_0^2}}\dfrac{\sin\frac{\pi nr}{r_0}}{r} :$

լ. $u_0+\dfrac{qr_0}{\lambda}\Bigg(\dfrac{3a^2t}{r_0^2}-\dfrac{3r_0^2-5r^2}{10r_0^2}-$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2r_0}{r\mu_n^2\cos\mu_n}\sin\frac{\mu_n r}{r_0}e^{-\frac{a^2\mu_n^2t}{r_0^2}}\Bigg),$$

որտեղ μ_n-ը $tg\mu=\mu$ հավասարման դրական արմատներն են:

148.

ա. $u(\rho,\varphi)=\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\ \rho<a,$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi \ (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \ (n = 1, 2, \cdots),$$

Այստեղից կարելի է ստանալ Պուասոնի բանաձևը՝

$$u(\rho,\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-psi)} f(\psi)d\psi :$$

բ. $A\dfrac{\rho}{a}\sin\varphi$:

գ. $B + \dfrac{3A}{a}\rho\sin\varphi - 4A\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^3\sin 3\varphi$:

դ. $A\dfrac{\rho}{a}\sin\varphi - \dfrac{8A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{2k}\dfrac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$:

ե. $\dfrac{1}{2}(1+\rho^2\cos 2\varphi)$:

զ. $\dfrac{\rho}{4}(3\sin\varphi - \rho^2\sin^3\varphi)$:

է. $\dfrac{3}{8} + \dfrac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{\rho^4}{8}\cos 4\varphi$:

ը. $\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\rho^4\cos 4\varphi$:

թ. $-1 - \dfrac{\rho}{2a}\cos\varphi + \dfrac{\pi\rho}{a}\sin\varphi + 2\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k^2-1}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^k\cos k\varphi$:

ժ. $C + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k(A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi),$

$$A_k = \frac{1}{\pi k a^{k-1}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,\ k = 1, 2, \cdots,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi k a^{k-1}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi,\ k = 1, 2, \cdots,$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = 0,$ C-ն կամայական հաստատուն է:

ի. $A\rho\cos\varphi + C$:

լ. $\dfrac{A}{2a}\rho^2\cos 2\varphi + C$:

խ. $\dfrac{1}{4}(3\rho\sin\varphi - \dfrac{\rho^3}{3a^2}\sin 3\varphi) + C$:

ծ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{a^{n-1}(n-ah)}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) - \frac{A_0}{2h}$,

A_n-ը և B_n-ը $f(\varphi)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են:

կ. $\dfrac{T}{h} + \dfrac{Q\rho}{1+ah}\sin\varphi + \dfrac{U\rho^3}{a^2(3+ah)}\cos 3\varphi$:

149.

ա. $u(\rho,\varphi) = \dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),\ \rho < a,$

A_n-ը և B_n-ը որոշվում են ինչպես **1. ա** խնդրում:

բ. $A\dfrac{a}{\rho}\sin\varphi$:

գ. $B + \dfrac{3Aa}{\rho}\sin\varphi - 4A\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^3\sin 3\varphi$:

դ. $A\dfrac{a}{\rho}\sin\varphi - \dfrac{8A}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$:

ե. $\dfrac{2T}{\pi} + \dfrac{4T}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\left(\frac{a}{\rho}\right)^k\cos k\varphi$:

զ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{n\rho^n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) + C$,

որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է, իսկ A_n-ը և B_n-ը $f(\varphi)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են:

է. $C + \dfrac{4a^2}{3\rho}\cos\varphi + \dfrac{a^3}{4\rho^2}\cos 2\varphi - \dfrac{\pi a^3}{\rho^2}\sin 2\varphi +$

$+4a\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4-k^2}\left(\frac{a}{\rho}\right)^k\cos k\varphi$:

ը. $-\dfrac{A_0}{2\pi h}-\dfrac{a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+ha}\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^k(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$

$$A_n=\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi :$$

թ. $\pi U-\dfrac{aU}{\rho}\sin\varphi+2U\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{2k^2-1}{k(1-k^2)}\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^k\sin k\varphi :$

150.

ա. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n+\dfrac{B_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n\rho^n+\dfrac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi\right]+$

$+B_0 ln\rho+A_0,$

$$A_n=\frac{b^nF_n^{(1)}-a^nf_n^{(1)}}{b^{2n}-a^{2n}},\ B_n=a^nb^n\frac{b^nf_n^{(1)}-a^nF_n^{(1)}}{b^{2n}-a^{2n}},$$

$$C_n=\frac{b^nF_n^{(2)}-a^nf_n^{(2)}}{b^{2n}-a^{2n}},\ D_n=a^nb^n\frac{b^nf_n^{(2)}-a^nF_n^{(2)}}{b^{2n}-a^{2n}},$$

$$A_0=\frac{f_0^{(1)}-F_0^{(1)}}{ln\frac{a}{b}},\ B_0=\frac{F_0^{(1)}lna-f_0^{(1)}lnb}{ln\frac{a}{b}},$$

որտեղ $f_n^{(1)},\ f_n^{(2)},\ F_n^{(1)},\ F_n^{(2)}$ թվերը $f(\varphi)$ և $F(\varphi)$ ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցներն են:

բ. $\dfrac{b}{b^2-a^2}\left(\rho-\dfrac{a^2}{\rho}\right)\cos\varphi :$

գ. $A\dfrac{ln\frac{\rho}{b}}{ln\frac{a}{b}}+\dfrac{Bb^2}{b^4-a^4}\left(\rho^2-\dfrac{a^4}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi :$

դ. $Q+\dfrac{a^2q}{a^2+b^2}\left(\rho-\dfrac{b^2}{\rho}\right)\cos\varphi+$

$$+\frac{b^2T}{a^4+b^4}\left(\rho^2+\frac{a^4}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi :$$

ե. $T\dfrac{1+hbln\frac{b}{\rho}}{1+hbln\frac{b}{a}}+abU\dfrac{(1-hb)\frac{\rho}{b}+(1+hb)\frac{b}{\rho}}{b^2+a^2+hb(b^2-a^2)}\cos\varphi :$

գ. $u_1 + \dfrac{u_2 - u_1}{ln2} ln\rho$:

ե. $\left(\dfrac{2}{3\rho^2} - \dfrac{\rho^2}{6}\right)\cos 2\varphi + \dfrac{3}{2} - \dfrac{ln\rho}{ln2}$:

151.

ա. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\varphi,\ f_n = \dfrac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\varphi d\varphi$:

բ. $\dfrac{2A\alpha}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{\pi k}{\alpha}}\sin\dfrac{\pi k\varphi}{\alpha}$:

գ. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}} \cos\dfrac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha},$

$$a_k = \frac{2}{\alpha} a^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \int_0^{\alpha} f(\varphi)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi d\varphi :$$

դ. $\dfrac{\alpha U}{2} - \dfrac{4\alpha U}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{\pi k}{\alpha}}\cos\dfrac{\pi k\varphi}{\alpha}$:

ե. $\dfrac{4\alpha Q a}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{\pi k}{\alpha}}\sin\dfrac{\pi k\varphi}{\alpha}$:

զ. $2aQ\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(h^2+\lambda_k^2)(1-\cos\alpha\lambda_k)}{\lambda_k(\gamma a + \lambda_k)(1+\alpha(h^2+\lambda_k^2))}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\lambda_k}\sin\lambda_k\varphi,$

որտեղ λ_k-ը $htg\lambda\alpha = -\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

152. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n\rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\varphi,$

$$A_n = \frac{b^{\frac{\pi n}{\alpha}}F_n - a^{\frac{\pi n}{\alpha}}f_n}{b^{\frac{2\pi n}{\alpha}} - a^{\frac{2\pi n}{\alpha}}},\ B_n = a^{\frac{\pi n}{\alpha}} b^{\frac{\pi n}{\alpha}}\frac{b^{\frac{\pi n}{\alpha}}f_n - a^{\frac{\pi n}{\alpha}}F_n}{b^{\frac{2\pi n}{\alpha}} - a^{\frac{2\pi n}{\alpha}}},$$

$$f_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}d\varphi,\ F_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}F(\varphi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}d\varphi :$$

153.

ա. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\overline{F}_n\frac{sh\frac{\pi ny}{a}}{sh\frac{\pi nb}{a}}+\overline{f}_n\frac{sh\frac{\pi n(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi nb}{a}}\right)\sin\frac{\pi nx}{a}+\right.$$
$$\left.+\left(\overline{\Phi}_n\frac{sh\frac{\pi nx}{b}}{sh\frac{\pi na}{b}}+\overline{\varphi}_n\frac{sh\frac{\pi n(a-x)}{b}}{sh\frac{\pi na}{b}}\right)\sin\frac{\pi ny}{b}\right]+u_0(x,y),$$
$$\overline{F}(x)=F(x)-u_0(x,b),\ \overline{f}(x)=f(x)-u_0(x,0),$$
$$\overline{\varphi}(y)=\varphi(y)-u_0(0,y),\ \overline{\Phi}(y)=\Phi(y)-u_0(a,y),$$
$$\overline{f}_n=\frac{2}{a}\int_0^a\overline{f}(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx,\ \overline{F}_n=\frac{2}{a}\int_0^a\overline{F}(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx,$$
$$\overline{\varphi}_n=\frac{2}{b}\int_0^b\overline{\varphi}(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy,\ \overline{\Phi}_n=\frac{2}{b}\int_0^b\overline{\Phi}(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy,$$
$$u_0(x,y)=A+Bx+Cy+Dxy,\ A=f(0),$$
$$B=\frac{f(a)-f(0)}{a},\ C=\frac{\varphi(b)-\varphi(0)}{b},$$
$$D=\frac{F(a)-F(0)-f(a)+f(0)}{ab}:$$

բ. $$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}sh\frac{(2k+1)\pi y}{2a},$$
$$a_k=\frac{2}{a}sh^{-1}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}\int_0^a F(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}dx:$$

գ. $$\frac{(pa-2A)y}{2b}+A-\frac{4aB}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2sh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\times$$
$$\times\cos\frac{(2k+1)\pi x}{a}sh\frac{(2k+1)\pi y}{a}:$$

դ. $$\frac{8Ba^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)^2-2}{(2k+1)^3ch\frac{(2k+1)\pi s}{2a}}sh\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2a}:$$

ե. $$U+\frac{2a}{\pi}\left(Tsh\frac{\pi y}{2a}-ch^{-1}\frac{\pi b}{2a}\left(\frac{2U}{a}+Tsh\frac{\pi b}{2a}\right)ch\frac{\pi y}{2a}\right)\sin\frac{\pi x}{2a}-$$
$$-\frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ch^{-1}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}{2k+1}ch\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}:$$

գ. $\frac{4qb}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos^{-1}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}{(2k+1)^2}sh\frac{(2k+1)\pi x}{b}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}+$

$+\frac{4U}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{sh^{-1}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}{2k+1}sh\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}$:

ե. $\frac{2bT}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{sh\frac{\pi ky}{a}}{sh\frac{\pi kb}{a}}\sin\frac{\pi kx}{a}+\frac{sh\frac{\pi kx}{b}}{sh\frac{\pi ka}{b}}\sin\frac{\pi ky}{b}\right)$:

ը. $A\frac{sh\frac{\pi(a-x)}{b}}{sh\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}+B\frac{sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$:

թ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi nx}{a}}{sh\frac{\pi nb}{a}}\left(f_n sh\frac{\pi n(b-y)}{a}+\varphi_n sh\frac{\pi ny}{a}\right)+\right.$

$\left.+\frac{b\sin\frac{\pi ny}{b}}{\pi n sh\frac{\pi na}{b}}\left(\chi_n ch\frac{\pi nx}{b}-\psi_n ch\frac{\pi n(a-x)}{b}\right)\right)$:

որտեղ f_n, φ_n, ψ_n և χ_n թվերը համապատասխան ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցներն են:

ժ. $\frac{4V_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2m+1)x}{a}}{2m+1}\frac{sh\frac{\pi(2m+1)y}{a}}{sh\frac{\pi(2m+1)b}{a}}+$

$+\frac{4V}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2m+1)y}{b}}{2m+1}\frac{sh\frac{\pi(2m+1)(a-x)}{b}}{sh\frac{\pi(2m+1)a}{b}}$:

154.

ա. $\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\frac{\pi x(2k+1)}{2l}}\sin\frac{\pi y(2k+1)}{2l}$,

$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2l}dy$:

բ. $\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\lambda_k x}\cos\lambda_k y,\ a_k=\frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\int_0^l f(z)\cos\lambda_k z dz$,

իսկ λ_k-րը $\lambda tg\lambda l=h$ հավասարման դրական արմատներն են:

գ. $\frac{8l}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{\pi x(2k+1)}{l}}\sin\frac{\pi y(2k+1)}{l}$:

դ. $2(1+hl)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k(h+l(h^2+\lambda_k^2))}Y_k(y),$

$Y_k(y)=\lambda_k\cos\lambda_k y+h\sin\lambda_k y,$

որտեղ λ_k-ըը $htg\lambda l=-\lambda$ հավասարման դրական արմատներն են:

155. $-\frac{1}{a}\int_0^x f(x-\xi)\sin a\xi d\xi$: **156.** $Ae^{-3y}\cos 2x-\frac{B}{2}x\sin x$:

157.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi(\frac{2nl+x}{a},t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2nl+x)e^{-\frac{(2nl+x)^2}{4a^2t}} :$$

158. $\frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$: **159.** $\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\mu(\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}d\tau$:

160. $\begin{cases}0, & t<\frac{x}{a}\\ E(t-\frac{x}{a}), & t>\frac{x}{a}\end{cases}$: **161.** $\begin{cases}0, & t<ax\\ e^{-amx}E(t-ax), & t>ax\end{cases}$,

$m=\frac{b}{a^2}$: **162.** $\begin{cases}0, & t<\frac{x}{a}\\ -ae^{h(x-at)}\int_0^{t-\frac{x}{a}}e^{ah\tau}\varphi(\tau)d\tau, & t>\frac{x}{a}\end{cases}$:

163. $\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$:

164. $\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\eta,\tau)d\eta$:

165. $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta$:

166. $\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\eta$:

167. Կիրառել Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություն:

$\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$:

168. Կիրառել Ֆուրիեի կոսինուս ձևափոխություն:

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau :$$

169.

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right] f(\xi,\tau)d\xi :$$

170.Կիրառել Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություն:

$$\frac{\varphi(x+at)+\varphi(|x-at|)sgn(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{|x-at|}^{x+at}\psi(z)dz :$$

171. Կիրառել Ֆուրիեի կոսինուս ձևափոխություն:

$$\frac{\varphi(x+at)+\varphi(|x-at|)}{2}+$$

$$\frac{1}{2a}\left\{\int_0^{x+at}\psi(z)dz - sgn(x-at)\int_0^{|x-at|}\psi(z)dz\right\} :$$

172. Կիրառել Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություն:

$$\begin{cases} 0, \ 0 < t < \frac{x}{a} \\ \mu(t-\frac{x}{a}), \ t > \frac{x}{a} \end{cases} :$$

173. Կիրառել Ֆուրիեի կոսինուս ձևափոխություն: $-a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}\nu(\xi)d\xi :$

174.Կիրառել Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություն:

$$\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi :$$

175.Կիրառել Ֆուրիեի կոսինուս ձևափոխություն:

$$\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\Bigg(\int_0^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds-$$

$$-sgn(x-a(t-\tau))\int_0^{|x-a(t-\tau)|} f(s,\tau)ds\Bigg) :$$

176. Կիրառել Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություն:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi :$$

177. Կիրառել Ֆուրիեի կոսինուս ձևափոխություն:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi :$$

178. $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi :$

179. $\dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta :$

180. $\dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2}\displaystyle\int_0^t\frac{d\tau}{|t-\tau|}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$
$\times f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta :$

181. Կիրառել Ֆուրիեի ձևափոխություն $(-\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty)$
$K(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-ix\xi}\sin y\eta$ կորիզով:

$$\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^\infty d\xi\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\times$$
$\times f(\xi,\eta)d\eta :$

182.Տես նախորդ խնդրի ցուցումը:

$$\frac{y}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi :$$

183. Կիրառել Ֆուրիեի ձևափոխություն $(-\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty)$
$K(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-ix\xi}\cos y\eta$ կորիզով:

$$\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^\infty d\xi\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\times$$
$\times f(\xi,\eta)d\eta :$

184. $\displaystyle\int_0^\infty pJ_0(pr)e^{-pt}\left(\int_0^\infty\lambda J_0(p\lambda)f(\lambda)d\lambda\right)dp :$

Մասնավոր դեպքում՝ $TR\displaystyle\int_0^\infty J_0(pr)J_1(pR)e^{-pt}dp :$

185. $\dfrac{1}{2bt}\displaystyle\int_0^\infty pf(p)J_0(\frac{pr}{2bt})\sin(\frac{p^2+r^2}{4bt})dp :$ Մասնավոր դեպքում՝

$$\frac{Ae^{-\frac{R^2}{1+\tau^2}}}{1+\tau^2}\left(\cos\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}+\tau\sin\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}\right),\ \tau=\frac{4bt}{a^2},\ R=\frac{r}{a} :$$

186. $\dfrac{qR}{k}\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda+h}J_0(\lambda r)J_1(\lambda R)d\lambda :$

187. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}+B_k\sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$

$$A_k=\frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)}\int_0^l\varphi(x)\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$$
$$B_k=\frac{2}{a\sqrt{l}\mu_kJ_1^2(\mu_k)}\int_0^l\psi(x)\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$$

որտեղ μ_k-ը $J_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

188. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}+B_k\sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

A_k-ն և B_k-ն որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում,

$$T_k(t)=\frac{1}{l\omega_kJ_1^2(\mu_k)}\times$$
$$\times\int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\tau)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{\xi}{l}}\right)\sin\omega_k(t-\tau)d\xi,$$

$\omega_k=\dfrac{\mu_k a}{2\sqrt{l}}$, իսկ μ_k-ը $J_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

189. Լուծումը փնտրել $X(x)\sin\omega t$ տեսքով:

$$\frac{A}{\omega^2}\left[\frac{J_0\left(2\omega\frac{\sqrt{x}}{a}\right)}{J_0\left(2\omega\frac{\sqrt{l}}{a}\right)}-1\right]\sin\omega t-$$
$$-4A\omega\frac{\sqrt{l}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k^2J_1(\mu_k)},$$

որտեղ μ_k-ը $J_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

190. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos a\lambda_k t+B_k\sin a\lambda_k t\right)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$

$$A_k = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)} \int_0^l \varphi(x) \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$
$$B_k = \frac{2}{a\lambda_k l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l \psi(x) \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$
որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ $\lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$:

191. $A \cos \frac{\mu_k t}{R} J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$:

192. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\mu_k}{R} t J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$,

$$b_k = \frac{2}{\mu_k R J_1^2(\mu_k)} \int_0^R r^2 J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$
որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

193. $a_0 + b_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{a\mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a\mu_k t}{R}\right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$,

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \int_0^R r\varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$
$$b_k = \frac{2}{aR\mu_k J_0^2(\mu_k)} \int_0^R r\psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$
$$a_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\varphi(r) dr, \ b_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\psi(r) dr,$$
որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

194. $8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{a\mu_n t}{R}$,

որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

195. $\frac{2RU}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k}{R} t$,

որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

196. $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(A_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+B_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\cos n\varphi+\right.$$
$$\left.+\left(C_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+D_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\sin n\varphi\right]J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right),$$
որտեղ $\mu_m^{(n)}$-րը $J_n(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$ թվերը համապատասխան ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցները:

197. $$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{J_{3/2}\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\sqrt{r}}\cos\frac{a\mu_k t}{R},$$
$$A_k=v\int_0^R r^{5/2}J_{3/2}\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr\left[\frac{R^2}{2}J_{3/2}^2(\mu_k)\left(1-\frac{2}{\mu_k^2}\right)\right]^{-1},$$
իսկ μ_k-րը $\mu J_{3/2}'(\mu)-\frac{1}{2}J_{3/2}(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

198. $$v_0\cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\cos\frac{a\mu_n t}{R},$$
$$A_n=2\mu_n^2\int_0^R r^2J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\left[R(\mu_n^2-1)J_1^2(\mu_n)\right]^{-1},$$
որտեղ μ_k-րը $J_1'(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

199. $H_0\cos\omega t$-ն հարկավոր է փոխարինել $H_0e^{i\omega t}$-ով և այնուհետև վերցնել լուծման իրական մասը, իսկ ստացված եզրային խնդրի լուծումը փնտրել $R(r)e^{i\omega t}+w(r,t)$ տեսքով:
$$R(r)=H_0\frac{I_0(r\omega'\sqrt{i})}{I_0(R\omega'\sqrt{i})},\ \omega'=\frac{\sqrt{\omega}}{a},$$
$$w(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$
$$A_n=\int_0^R rR(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\left[\frac{R^2}{2}(J_1^2(\mu_n)\right]^{-1}=$$

$$= 2H_0 \frac{{\mu_n}^3 - \mu_n {\omega'}^2 i}{({\mu_n}^4 + {\omega'}^4 R^4) J_1(\mu_n)},$$

որտեղ μ_k-ըը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

200. $$U_0 + \frac{qR}{\lambda}\left[2\frac{a^2 t}{R^2} - \frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{r^2}{R^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\right],$$

որտեղ μ_k-ըը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ եզրային պայմանն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial r} = q \text{ երբ } r = R:$$

201. $$8U_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)},$$

որտեղ μ_k-ըը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

202. ա. եզրային պայմանը կլինի $u_r(R,t) = 0$, իսկ

$$u(r,t) = -4UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) J_2(\mu_k)}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)} e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t},$$

որտեղ μ_k-ըը $J_0'(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

բ. եզրային պայմանը կլինի $u_r(R,t) + hu(R,t) = 0$, իսկ

$$u(r,t) = 2UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+hR)\mu_k^2 - 4hR}{\mu_k^2(\mu_k^2 + h^2R^2) J_0(\mu_k)} e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

որտեղ μ_k-ըը $\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

գ. եզրային պայմանը կլինի $u(R,t) = 0$, իսկ

$$u(r,t) = T + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(UR^2 - T)\mu_k^2 - 4UR^2}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

որտեղ μ_k-ըը $J_0(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

203. եզրային պայմանը կլինի $u_r(R,t)+hu(R,t)=hU_1$, երբ $r=R$, իսկ

$$u(r,t)=U_1+2(U_1-U_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n(J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n))}e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t},$$

որտեղ μ_k-ըը $\mu J_0^{'}(\mu)+hRJ_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են: Եթե արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանը $U_1+\alpha t$ է, ապա

$$u(r,t)=U_0+\alpha\left[t+\frac{r^2-R^2-2\frac{R}{h}}{4a^2}\right]+$$
$$+\frac{2hR^3\alpha}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)(\mu_n^2+h^2R^2)}e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t},$$

204.ա. եզրային պայմանները կլինեն $u(R,z,t)=u(r,0,t)=u_z(r,l,t)=0$, իսկ

$$u(r,z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn}e^{-a^2(\lambda_k^2+\eta_n^2)t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\sin\frac{2n+1\pi z}{2l},$$

$$a_{kn}=\frac{32AlR^2(-1)^nJ_2(\mu_k)}{(2n+1)^2\pi^2\mu_k^2J_1^2(\mu_k)},\lambda_k=\frac{\mu_k}{R},\eta_n=\frac{(2n+1)\pi}{2l},$$

որտեղ μ_k-ըը $J_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

բ. եզրային պայմանները կլինեն $u_r(R,z,t)+hu(R,z,t)=u_z(r,0,t)=u_z(r,l,t)=0$, իսկ

$$u(r,z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn}e^{-a^2(\lambda_k^2+\eta_n^2)t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\frac{2n+1\pi z}{2l},$$

$$a_{kn}=\frac{16AlR^2((-1)^n(2n+1)\pi-2)J_2(\mu_k)}{(2n+1)^2\pi^2(\mu_k^2+l^2R^2)J_0^2(\mu_k)},$$

$$\lambda_k=\frac{\mu_k}{R},\ \eta_n=\frac{(2n+1)\pi}{2l},$$

որտեղ μ_k-ըը $\mu J_0^{'}(\mu)+hRJ_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

205. $U(r)+\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-a^2\lambda_k^2t}Z_k(r),\ U(r)=\dfrac{q_0r_2}{\lambda}ln\dfrac{r}{r_1},$

$$A_k=\frac{\pi^2\lambda_n^2}{2}\frac{J_1^2(\lambda_k r_2)}{J_0^2(\lambda_k r_1)-J_1^2(\lambda_k r_2)}\int_{r_1}^{r_2} rU(r)Z_k(r)dr,$$
$$Z_k(r)=J_0(\lambda_k r_1)N_0(\lambda_k r)-N_0(\lambda_k r_1)J_0(\lambda_k r),$$
որտեղ λ_k-րը $J_0(\lambda r_1)N_0'(\lambda r_2)-N_0(\lambda r_1)J_0'(\lambda r_2)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

206. ա. Եզրային պայմանները կլինեն $u(R,z)=u(r,l)=0, u(r,0)=T$, իսկ
$$u(r,z)=2T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)}\left(ch\frac{\mu_k}{R}z-cth\frac{\mu_k}{R}lsh\frac{\mu_k}{R}z\right),$$
որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

բ. Եզրային պայմանները կլինեն $u(r,0)=u_z(r,l)=0, u(R,z)=f(z)$, իսկ
$$u(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}r\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}R\right]}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2l},$$
$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx:$$

գ. Յարկավոր է լուծել հետևյալ խնդիրը
$$\Delta u=-\frac{Q}{k},\ u(r,0)=u(r,l)=u(R,z)=0:$$
$$u(r,z)=\frac{Q}{4k}(R^2-r^2)+\frac{QR^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)sh\frac{\mu_n}{R}l}\times$$
$$\times\left(\left(ch\frac{\mu_n}{R}l-1\right)sh\frac{\mu_n}{R}z-sh\frac{\mu_n}{R}lch\frac{\mu_n}{R}z\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$
որտեղ μ_k-րը $J_0(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են:

207. $$u(r,z)=\frac{4T}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{K_0\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}r\right]}{K_0\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}R\right]}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l}:$$

208. $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{mn}\cos n\varphi+B_{mn}\sin n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)\times$$

$$\times\frac{sh\frac{\mu_m^{(n)}}{R}(l-z)}{sh\frac{\mu_m^{(n)}}{R}l}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(C_{mn}\cos n\varphi+D_{mn}\sin n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)\frac{sh\frac{\mu_m^{(n)}}{R}z}{sh\frac{\mu_m^{(n)}}{R}},$$

$$A_{mn}=\frac{2}{R^2\pi\varepsilon_n(J_n'(\mu_m^{(n)}))^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\varphi)\cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)rdrd\varphi,$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2,\ n=0\\1, n\neq 0\end{cases},\ B_{mn}=\frac{2}{R^2\pi(J_n'(\mu_m^{(n)}))^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\varphi)\sin n\varphi J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)rdrd\varphi,$$

որտեղ $\mu_m^{(n)}$-րը $J_n(\mu)=0$ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ C_{mn}, D_{mn} թվերը որոշելու համար հարկավոր է $f(r,\varphi)$ ֆունկցիան փոխարինել $F(r,\varphi)$-ով:

209. $u(r,z)=\dfrac{8Al}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_0\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}r\right]}{I_0\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}R\right]}\frac{\sin\frac{\pi(2k+1)z}{l}}{(2k+1)^3}$:

210.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos at\sqrt{2k(2k-1)}+b_k\sin at\sqrt{2k(2k-1)})P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

$$a_k=\frac{4k-1}{l}\int_0^l\varphi(x)P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx,$$

$$b_k=\frac{4k-1}{al\sqrt{2k(2k-1)}}\int_0^l\psi(x)P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx:$$

211. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right),\ T_k(t)=\frac{4k-1}{al\sqrt{2k(2k-1)}}\times$

$$\times \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi,\tau)\sin\omega_k(t-\tau)P_{2k-1}\left(\frac{\xi}{l}\right)d\xi,$$
$$\omega_k = a\sqrt{2k(2k-1)}:$$

212. $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\varphi),$

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty}(A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi)P_n^k(\cos\theta),$$
$$A_{00} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi,$$
$$A_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi\sin\theta d\theta d\varphi,\ n>0,$$
$$B_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!}\int_0^{2\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi\sin\theta d\theta d\varphi:$$

Մասնավոր դեպքերում՝

ա. $\frac{r}{a}\cos\theta:$

բ. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)+\frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta:$

գ. $\frac{4}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)-\frac{1}{3}:$

դ. $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta):$

213. $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi),$

Y_n, A_{nk}, B_{nk}-ը որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում:

214. $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{na^{n-1}}Y_n(\theta,\varphi)+const,$

Y_n, A_{nk}, B_{nk}-ը որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում:

215.

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n=2}}{(n+1)r^{n+1}}Y_n(\theta,\varphi),$$

Y_n, A_{nk}, B_{nk}-ը որոշվում են ինչպես նախորդ խնդրում:

216.

$$V_2+\frac{V_1-V_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{2n+1}{n+1}P_{n-1}(0)P_n(\cos\theta),\ r<a:$$

$$V_2+\frac{V_1-V_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\frac{2n+1}{n+1}P_{n-1}(0)P_n(\cos\theta),\ r>a:$$

217. Լիցքը գտնվում է $r=r_0,\ \theta=0$ կետում, որտեղ (r,θ)-ն սֆերիկ կոորդինատներն են, իսկ սկզբնակետը գտնվում է $r=0$ կետում:

ա. $$u(r,\theta)=\begin{cases} e\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r^n}{r_0^{n+1}}-\frac{r_0^nr^n}{a^{2n+1}}\right)P_n(\cos\theta),\ r<r_0 \\ e\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}}-\frac{r_0^nr^n}{a^{2n+1}}\right)P_n(\cos\theta),\ r>r_0\end{cases}:$$

բ. $$u(r,\theta)=\begin{cases} e\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r^n}{r_0^{n+1}}-\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}r_0^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),\ r<r_0 \\ e\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}}-\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}r_0^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),\ r>r_0\end{cases}:$$

Օգտվել

$$\frac{1}{R}=\begin{cases}\frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^nP_n(\cos\theta),\ r<r_0 \\ \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^nP_n(\cos\theta),\ r>r_0\end{cases}$$

վերլուծություններից, որտեղ R-ը (r,θ) կետի հեռավորությունն է $(r_0,0)$ լիցքից:

218. $$\frac{e}{R}+\frac{aV_0}{r}-e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta),$$

որտեղ V_0-ն սֆերայի պոտենցիալն է:

219. $$u(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi kR}+\frac{Q}{4\pi k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)-ah}{n+ah}\frac{r_0^nr^n}{a^{2n+1}}P_n(\cos\theta),$$

որտեղ h-ը ջերմափոխանակության գործակիցն է, իսկ աղբյուրը տեղադրված է $(r_0, 0)$ կետում: Եթե $r = a$, ապա $\frac{k\partial u}{\partial n} + hu = 0$: Լուծումը հարկավոր է փնտրել

$$\frac{Q_0}{4\pi kR} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

տեսքով:

220. $$\frac{e}{R} - e\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{r_0^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}\frac{r^n}{r_0^{n+1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{b^{2n+1} - r_0^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}}\right] P_n(\cos\theta) :$$

221. $$\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}\frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} P_n^k(\cos\theta)\times$$
$$\times(A_{mnk}\cos k\varphi + B_{mnk}\sin k\varphi),$$

որտեղ $\mu_m^{(n)}$-րը $J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են, իսկ

$$A_{mnk} = \int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right)\times$$
$$\times\sin\theta P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi dr d\theta d\varphi /$$
$$\varepsilon_k\frac{\pi r_0^2 (n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+1/2}(\mu_m^{(n)})\right]^2,$$

որտեղ $\varepsilon_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ 1, & k \neq 0 \end{cases}$,

իսկ B_{mnk}-ն ստանալու համար հարկավոր է A_{mnk} -ի արտահայտության մեջ $\cos k\varphi$-ն փոխարինել $\sin k\varphi$-ով և չգրել ε_k-ն:

222. $$\left(\frac{r^n f(t)}{n r_0^{n-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)\frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right) P_n(\cos\theta),$$

$$\psi_k(t) = \frac{r_0 A_k}{a\mu_k^{(n)}} \int_0^t f^{''}(\tau) \sin \frac{a\mu_k^{(n)}}{r_0}(t-\tau)d\tau,$$

$$A_k = -\frac{1}{nr_0^{n-1}} \frac{\int_0^{r_0} r^{n+3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J_{n+1/2}^2(\mu_k^{(n)})(1 - \frac{n(n+1)}{(\mu_k^{(n)})^2})}$$

որտեղ $\mu_k^{(n)}$-րը $\mu J_{n+1/2}^{'}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0$ հավասարման դրական արմատներն են:

223.

$$\left(\frac{r^n f(t)}{nr_0^{n-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi,$$

իսկ գործակիցները նույնն են ինչ նախորդ խնդրի պատասխանում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. М.М.Смирнов, Задачи по уравнениям математической физики, "Наука", 1968.

2. В.С.Владимиров и др., Сборник задач по уравнениям математической физики, "Наука", 1964.

3. Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов, Сборник задач по математической физики, "Наука", 1972.

4. А.В.Бицадзе, Д.Ф.Калиниченко, Сборник задач по уравениям математической физики, М.,1977.

5. А.Ф.Филиппов, Сборник задач по дифференциальным уравнениям, "Наука",1973.

6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.

7. В.С.Владимиров, Уравнения математической физики,"Наука",1971.

8. Н.С. Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов, Уравнения в частных производных математической физики, "Высшая школа", 1970.

9. М.М.Смирнов, Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, "Наука", 1964.

10. В.Я.Арсенин, Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции, "Наука", 1966.

11. Բ.Գ.Արարքցյան, Ա.Հ. Հովհաննիսյան, Ռ.Լ. Շահբաղյան, Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ, Երևանի Պետական Համալսարանի հրատարակչություն, 1988:

12. Ս.Ղ. Աֆյան, Ֆուրիեի մեթոդը մաթեմատիկական ֆիզիկայում (ուսումնամեթոդական ձեռնարկ), Երևանի Պետական Համալսարանի հրատարակչություն, 1985:

13. Ս.Ղ.Աֆյան, Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ, Երևանի Պետական Համալսարանի հրատարակչություն, 2000.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ