

**СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ
ФУНКЦИЯМ И АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ
ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ**

А. А. ПАХЛЕВАНЯН

Институт математики НАН Армении¹

E-mail: *apahlevanyan@instmath.sci.am*

Аннотация. Доказывается равномерная сходимость разложения абсолютно непрерывной функции по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(0) = 0$, $y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$, $\beta \in (0, \pi)$ с суммируемым потенциалом $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$. Этот результат используется для получения новых, более точных асимптотических формул для собственных значений и нормировочных постоянных этой задачи.

MSC2010 number: 34B24, 34L05, 34L10, 34L20

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля; разложение по собственным функциям; асимптотика собственных значений и нормировочных постоянных.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $L(q, \alpha, \beta)$ следующую краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$(1.1) \quad -y'' + q(x)y = \mu y \equiv \lambda^2 y, \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in \mathbb{C},$$

$$(1.2) \quad y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi],$$

$$(1.3) \quad y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \quad \beta \in [0, \pi),$$

где q вещественная, суммируемая на $[0, \pi]$ функция (мы пишем $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$). Через $L(q, \alpha, \beta)$ будем обозначать также самосопряженный оператор, порожденный задачей (1.1)–(1.3) в гильбертовом пространстве $L^2[0, \pi]$ (см. [1, 2]). Хорошо известно, что спектр оператора $L(q, \alpha, \beta)$ чисто дискретен и состоит из простых, действительных собственных значений (см. [1]–[3]), которые мы обозначаем через $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, подчеркивая зависимость от q , α и β . Предполагается, что собственные значения μ_n пронумерованы в порядке возрастания:

$$\mu_0(q, \alpha, \beta) < \mu_1(q, \alpha, \beta) < \dots < \mu_n(q, \alpha, \beta) < \dots$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта No. 16YR-1A017.

Обозначим через $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu, \beta)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned}\varphi(0, \mu, \alpha) &= \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \mu, \alpha) = -\cos \alpha, \\ \psi(\pi, \mu, \beta) &= \sin \beta, \quad \psi'(\pi, \mu, \beta) = -\cos \beta.\end{aligned}$$

Хорошо известно ([1, 2, 4]), что для фиксированного x , φ , φ' , ψ , ψ' являются целыми функциями от μ . Обозначим через $W_{\alpha, \beta}(x, \mu)$ вронскиан решений $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu, \beta)$:

$$(1.4) \quad W_{\alpha, \beta}(x, \mu) := \varphi(x, \mu, \alpha) \psi'(x, \mu, \beta) - \varphi'(x, \mu, \alpha) \psi(x, \mu, \beta).$$

Из формулы Лиувилля для вронскиана следует (см. например, [5]) что $W_{\alpha, \beta}(x, \mu)$ не зависит от x . Легко видеть что функции $\varphi_n(x) := \varphi(x, \mu_n, \alpha)$ и $\psi_n(x) := \psi(x, \mu_n, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются собственными функциями, соответствующими собственному значению μ_n . Так как собственные значения простые, то существуют числа $\beta_n = \beta_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, такие что

$$(1.5) \quad \psi_n(x) = \beta_n \varphi_n(x), \beta_n \neq 0.$$

Квадраты L^2 -норм этих собственных функций:

$$(1.6) \quad a_n = a_n(q, \alpha, \beta) = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx, \quad b_n = b_n(q, \alpha, \beta) = \int_0^\pi \psi_n^2(x) dx,$$

называются нормировочными постоянными.

Одна из основных теорем спектральной теории дифференциальных операторов (см. [1]) гласит:

Теорема 1.1. ([1, стр. 90]) *Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Этот результат не может быть применен для функций, не принадлежащих области определения самосопряженного дифференциального оператора. В случае оператора Штурма-Лиувилля доказано (см. например, [6]), что при условии $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ (т.е. $\alpha, \beta \in (0, \pi)$) равномерная сходимость разложения имеет место для любой абсолютно непрерывной функции, а именно имеет место (см. также [5, 2, 7])

Теорема 1.2. ([6]) *Пусть $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_0^\pi f(t) \varphi_n(t) dt,$$

где $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \mu_n(q, \alpha, \beta), \alpha)$.

Первой целью данной работы является доказательство того, что аналогичные результаты имеют место также для задач $L(q, \pi, \beta)$, $\beta \in (0, \pi)$ и $L(q, \alpha, 0)$, $\alpha \in (0, \pi)$, причем при более общем условии $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$:

Теорема 1.3. Пусть $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда для любого $a \in (0, \pi)$

$$(1.7) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, \pi]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

где $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \mu_n(q, \pi, \beta), \pi) \equiv \varphi(x, \mu_n, \pi)$.

Теорема 1.4. Пусть $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta = 0$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда для любого $b \in (0, \pi)$

$$(1.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, b]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

где $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \mu_n(q, \alpha, 0), \alpha)$.

Замечание 1.1. Легко видеть, что улучшить результаты Теорем 1.3 и 1.4 (получить равномерную сходимость рядов в (1.7) и (1.8) на всем отрезке $[0, \pi]$ без дополнительных условий) невозможно. Действительно, для абсолютно непрерывной функции $f \equiv \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$, имеет место тождество (см. например, [8, формула 37 на стр. 578])

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{n + \frac{1}{2}}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

т.е. Теорема 1.3 для нее верна, но если заменить $\max_{x \in [a, \pi]} |\dots|$ на $\max_{x \in [0, \pi]} |\dots|$, то теорема перестает быть верной. С другой стороны, если в Теореме 1.3 взять $f(0) = 0$, тогда ряд в (1.7) сходится равномерно на всем отрезке $[0, \pi]$. Аналогичное утверждение верно для Теоремы 1.4, если взять $f(\pi) = 0$.

Второй целью нашей работы является получение асимптотической формулы для собственных значений задачи $L(q, \pi, \beta)$ при $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ и $\beta \in (0, \pi)$ (т.е. $\sin \beta \neq 0$). Прежде чем сформулировать результат, заметим, что в работе [9] Т. Н. Арутюнян ввел понятие функции $\delta_n(\alpha, \beta)$, которая определяется формулой

$$\delta_n(\alpha, \beta) := \sqrt{\mu_n(0, \alpha, \beta)} - n = \lambda_n(0, \alpha, \beta) - \lambda_n\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 2,$$

и доказал что $-1 \leq \delta_n(\alpha, \beta) \leq 1$ и $\delta_n(\alpha, \beta)$ является решением следующего трансцендентного уравнения:

$$(1.9) \quad \delta_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n + \delta_n(\alpha, \beta))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos \beta}{\sqrt{(n + \delta_n(\alpha, \beta))^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta}}.$$

Теорема 1.5. Пусть $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ и пусть $\lambda_n^2(q, \alpha, \beta) = \mu_n(q, \alpha, \beta)$. Тогда

(а) имеет место асимптотическое соотношение ($n \rightarrow \infty$)

$$(1.10) \quad \lambda_n(q, \alpha, \beta) = n + \delta_n(\alpha, \beta) + \frac{[q]}{2(n + \delta_n(\alpha, \beta))} + l_n(q, \alpha, \beta) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{где } [q] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt,$$

$$l_n(q, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi(n + \delta_n(\alpha, \beta))} \int_0^\pi q(x) \cos 2(n + \delta_n(\alpha, \beta)) x dx, \quad \alpha \in (0, \pi),$$

$$(1.11) \quad l_n = l_n(q, \pi, \beta) = -\frac{1}{2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta))} \int_0^\pi q(x) \cos 2(n + \delta_n(\pi, \beta)) x dx.$$

Оценка остатка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ в (1.10) равномерна по всем $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и q из ограниченных подмножеств $L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ (мы будем писать $q \in BL^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$).

(б) Функция l , определенная формулой

$$(1.12) \quad l(x) = \sum_{n=2}^{\infty} l_n(q, \alpha, \beta) \sin(n + \delta_n(\alpha, \beta)) x,$$

абсолютно непрерывна на произвольном отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, т.е. $l \in AC(0, 2\pi)$.

В работе [10] утверждение (б) теоремы 1.5 было доказано при условии $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ и в случае $\alpha = \pi, \beta = 0$. Мы докажем, что это утверждение верно также при $\alpha = \pi, \beta \in (0, \pi)$. Этому посвящен раздел 3. Третьей целью нашей работы является получение асимптотических формул для нормировочных постоянных a_n и b_n (см. (1.6)).

Теорема 1.6. Для нормировочных постоянных a_n и b_n

(а) имеют место следующие асимптотические соотношения ($n \rightarrow \infty$):

$$a_n(q, \alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{2s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi[n + \delta(\alpha, \beta)]} + r_n \right] \sin^2 \alpha +$$

$$+ \frac{\pi}{2[n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2} \left[1 + \frac{2s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi[n + \delta(\alpha, \beta)]} + \tilde{r}_n \right] \cos^2 \alpha,$$

$$b_n(q, \alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{2s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi[n + \delta(\alpha, \beta)]} + p_n \right] \sin^2 \beta + \\ + \frac{\pi}{2[n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2} \left[1 + \frac{2s_n(q, \alpha, \beta)}{\pi[n + \delta(\alpha, \beta)]} + \tilde{p}_n \right] \cos^2 \beta,$$

где

$$s_n = s_n(q, \alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - t) q(t) \sin 2[n + \delta_n(\alpha, \beta)] t dt,$$

$r_n = r_n(q, \alpha, \beta) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и $\tilde{r}_n = \tilde{r}_n(q, \alpha, \beta) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (та же оценка верна для p_n и $\tilde{p}_n$), когда $n \rightarrow \infty$, равномерна по всем $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и $q \in BL_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$.

(b) Функция s , определенная формулой

$$s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s_n}{n + \delta_n(\alpha, \beta)} \cos[n + \delta_n(\alpha, \beta)] x$$

абсолютно непрерывна на произвольном отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, т.е. $s \in AC(0, 2\pi)$.

В работе [11] утверждение (b) теоремы 1.6 было доказано при условии $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ и в случае $\alpha = \pi, \beta = 0$. Методами, примененными при доказательстве теоремы 1.5 можно доказать, что утверждение верно также при $\alpha = \pi, \beta \in (0, \pi)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.3 И 1.4

Мы приведем доказательство для Теоремы 1.3. Теорема 1.4 может быть доказана аналогично.

Доказательство. Для $|\lambda| \rightarrow \infty$, имеют место следующие асимптотические формулы ([1, 4, 10])

$$(2.1) \quad \varphi(x, \mu, \pi) := \varphi_\pi(x, \mu) \equiv \varphi_\pi(x, \lambda^2) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|Im \lambda| x}}{|\lambda|^2}\right),$$

$$(2.2) \quad \varphi'(x, \mu, \pi) := \varphi'_\pi(x, \mu) \equiv \varphi'_\pi(x, \lambda^2) = \cos \lambda x + O\left(\frac{e^{|Im \lambda| x}}{|\lambda|}\right),$$

$$\psi(x, \mu, \beta) := \psi_\beta(x, \mu) \equiv \psi_\beta(x, \lambda^2) = \cos \lambda (\pi - x) \sin \beta + \frac{\sin \lambda (\pi - x)}{\lambda} \cos \beta + \\ + O\left(\frac{e^{|Im \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|Im \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|^2}\right) \cos \beta,$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \psi'(x, \mu, \beta) &:= \psi'_\beta(x, \mu) \equiv \psi'_\beta(x, \lambda^2) = \left(\lambda \sin \lambda (\pi - x) + O\left(e^{|Im \lambda|(\pi - x)}\right) \right) \sin \beta - \\ &- \left(\cos \lambda (\pi - x) + O\left(\frac{e^{|Im \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \right) \cos \beta. \end{aligned}$$

Из (1.4) и (2.3) следует, что для вронскиана $W_{\pi, \beta}(\mu)$ мы имеем следующую оценку

$$(2.5) \quad \begin{aligned} W_{\pi, \beta}(\mu) \equiv W_{\pi, \beta}(\lambda^2) &= -\psi_\beta(0, \mu) = -\cos \lambda \pi \sin \beta - \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \cos \beta + \\ &+ O\left(\frac{e^{|Im \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|Im \lambda| \pi}}{|\lambda|^2}\right) \cos \beta. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathbb{Z}_{1/6}$ следующую область комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}_{1/6} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{1}{6}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Следующая лемма доказана в [12], методами которые использовались в [13].

Лемма 2.1. ([12]) *Если $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$, тогда*

$$(2.6) \quad |\sin \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|Im \lambda| \pi}, \quad |\cos \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|Im \lambda| \pi}.$$

Из (2.5) и (2.6) следует что для достаточно большого $\lambda^* > 0$, существует константа $C_1 > 0$ такая что

$$(2.7) \quad |W_{\pi, \beta}(\lambda^2)| \geq C_1 e^{|Im \lambda| \pi} \sin \beta, \quad \text{при } \lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}, \quad |\lambda| > \lambda^*.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$(2.8) \quad -y'' + q(x)y = \mu y - f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad f \in L^1[0, \pi],$$

$$(2.9) \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \quad \beta \in (0, \pi).$$

Хорошо известно, что решение $y(x, \mu, f)$ краевой задачи (2.8)–(2.9) можно записать в следующей форме (см. например, [1, 7])

$$(2.10) \quad \begin{aligned} y(x, \mu, f) &= \frac{1}{W_{\pi, \beta}(\mu)} \psi_\beta(x, \mu) \int_0^x f(t) \varphi_\pi(t, \mu) dt + \\ &+ \frac{1}{W_{\pi, \beta}(\mu)} \varphi_\pi(x, \mu) \int_x^\pi f(t) \psi_\beta(t, \mu) dt. \end{aligned}$$

Так как φ , ψ и $W_{\pi, \beta}$ являются целыми функциями от μ , то $y(x, \mu, f)$ является мероморфной функцией от μ , с полюсами в нулях функции $W_{\pi, \beta}$ или, что то же самое, в собственных значениях $\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $\dot{W}_{\pi, \beta}(\mu_n) \equiv \frac{d}{d\mu} W_{\pi, \beta}(\mu_n) = \beta_n a_n$ (см. [6, Лемма 1.1.1]), то используя (1.5), мы получаем вычет

$$(2.11) \quad \text{Res}_{\mu=\mu_n} y(x, \mu, f) = \frac{1}{a_n} \varphi_\pi(x, \mu_n) \int_0^\pi f(t) \varphi_\pi(t, \mu_n) dt.$$

Из (2.1), (2.3), (2.7) и (2.10) следует, что существуют положительные числа C , C_2 , C_3 , C_4 такие что при $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$, $|\lambda| > \lambda^*$ имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad |y(x, \lambda^2, f)| &\leq \frac{|\psi_\beta(x, \lambda^2)| \max_{t \in [0, x]} |\varphi_\pi(t, \lambda^2)| \int_0^x |f(t)| dt}{C_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi \sin \beta}} + \\
 &+ \frac{|\varphi_\pi(x, \lambda^2)| \max_{t \in [x, \pi]} |\psi_\beta(t, \lambda^2)| \int_x^\pi |f(t)| dt}{C_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi \sin \beta}} \leq \\
 &\leq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)} \left(\sin \beta + \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|} + C_3 \frac{\sin \beta}{|\lambda|} + C_4 \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|^2} \right)}{C_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi \sin \beta}} \times \\
 &\times e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \left(\frac{1}{|\lambda|} + C_2 \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \int_0^\pi |f(t)| dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{C_1} \int_0^\pi |f(t)| dt \left(\frac{1}{|\lambda|} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \right) \leq \frac{C}{|\lambda|}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию $f \in AC[0, \pi]$. Используя тот факт, что $\varphi_\pi(x, \mu)$ и $\psi_\beta(x, \mu)$ являются решениями (1.1), мы можем переписать представление (2.10) для $y(x, \mu, f)$ в следующем виде (сравните с [6]):

$$(2.13) \quad y(x, \mu, f) = \frac{f(x)}{\mu} + f(0) \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} + \frac{Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f')}{\mu} + \frac{Z_2(x, \mu, \pi, \beta)}{\mu},$$

где

$$(2.14) \quad Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f') = \frac{\psi_\beta(x, \mu) \int_0^x f'(t) \varphi'_\pi(t, \mu) dt + \varphi_\pi(x, \mu) \int_x^\pi f'(t) \psi'_\beta(t, \mu) dt}{W_{\pi, \beta}(\mu)},$$

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad Z_2(x, \mu, \pi, \beta) &= -f(\pi) \psi'_\beta(\pi, \mu) \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} + y(x, \mu, qf) = \\
 &= f(\pi) \cos \beta \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} + y(x, \mu, qf).
 \end{aligned}$$

Покажем, что

$$(2.16) \quad \lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}}} \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f')| = 0.$$

Сначала предположим, что f' абсолютно непрерывная функция на $[0, \pi]$. Тогда существует $f'' \in L^1[0, \pi]$ и (2.14) можно записать в следующем виде

$$Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f') = \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} f'(\pi) \sin \beta - \frac{\psi_\beta(x, \mu) \int_0^x f''(t) \varphi_\pi(t, \mu) dt + \varphi_\pi(x, \mu) \int_x^\pi f''(t) \psi_\beta(t, \mu) dt}{W_{\pi, \beta}(\mu)}.$$

В силу (2.1)–(2.4) и (2.7) мы получаем, что существует число $C > 0$, такое что

$$\max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, f')| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \text{ при } \lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}, |\lambda| > \lambda^*.$$

Отсюда следует (2.16) в случае $f' \in AC[0, \pi]$.

Теперь обратимся к общему случаю $g := f' \in L^1[0, \pi]$. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию g_ϵ , так что

$$\int_0^\pi |g(t) - g_\epsilon(t)| dt < \frac{C_1 \sin \beta}{16} \epsilon.$$

Тогда, согласно (2.1)–(2.4), (2.7) и (2.14) для $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$, $|\lambda| > \lambda^*$, мы имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, g)| &\leq \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, g_\epsilon)| + \max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta, g - g_\epsilon)| \leq \\ &\leq \frac{C(\epsilon)}{|\lambda|} + \frac{C_1 \sin \beta}{16} \epsilon \max_{x \in [0, \pi]} \left(\frac{|\psi_\beta(x, \mu)| \max_{t \in [0, x]} |\varphi'_\pi(t, \mu)| + |\varphi_\pi(x, \mu)| \max_{t \in [0, x]} |\psi'_\beta(t, \mu)|}{C_1 e^{|Im \lambda| \pi} \sin \beta} \right) \leq \\ &\leq \frac{C(\epsilon)}{|\lambda|} + \frac{C_1 \sin \beta}{16} \epsilon \max_{x \in [0, \pi]} \left(\frac{8e^{|Im \lambda| \pi}}{C_1 e^{|Im \lambda| \pi} \sin \beta} \right) \leq \frac{C(\epsilon)}{|\lambda|} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что если мы выберем $\lambda_\epsilon^* = \frac{2C(\epsilon)}{\epsilon}$, тогда для $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$ и $|\lambda| > \lambda_\epsilon^*$ мы имеем $\max_{x \in [0, \pi]} |Z_1(x, \mu, \pi, \beta)| \leq \epsilon$. В силу произвольности $\epsilon > 0$, мы приходим к (2.16). Теперь оценим $Z_2(x, \mu, \pi, \beta)$ (см. (2.15)). Поскольку $qf \in L^1[0, \pi]$, то оценки в (2.12) верны также для $y(x, \mu, qf)$. Используя (2.1), (2.7), (2.12) и тот факт, что $\sin \beta \neq 0$ мы получаем следующие оценки (при $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$, $|\lambda| > \lambda^*$):

$$\begin{aligned} (2.17) \quad \max_{x \in [0, \pi]} |Z_2(x, \mu, \pi, \beta)| &\leq \max_{x \in [0, \pi]} \left| f(\pi) \cos \beta \frac{\varphi_\pi(x, \mu)}{W_{\pi, \beta}(\mu)} \right| + \max_{x \in [0, \pi]} |y(x, \mu, qf)| \leq \\ &\leq \left| f(\pi) \cos \beta \frac{C_5 e^{|Im \lambda| \pi}}{|\lambda| C_1 e^{|Im \lambda| \pi} \sin \beta} \right| + \frac{C_6}{|\lambda|} \leq \frac{C_5}{C_1} \frac{|f(\pi) \cot \beta|}{|\lambda|} + \frac{C_6}{|\lambda|} \leq \frac{C_7}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

где $C_5 - C_7$ положительные числа. Рассмотрим следующий контурный интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} y(x, \mu, f) d\mu,$$

где $\Gamma_N = \left\{ \mu : |\mu| = \left(N + \frac{3}{4} \right)^2 \right\}$ (с обходом против часовой стрелки). С одной стороны, используя теорему Коши о вычетах (см. [14]), из (2.11) мы получаем

$$(2.18) \quad I_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{a_n} \int_0^\pi f(t) \varphi_\pi(t, \mu_n) dt \varphi_\pi(x, \mu_n).$$

С другой стороны, из (2.13), (2.16) и (2.17) имеем, что

$$(2.19) \quad I_N(x) = f(x) + f(0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} d\mu + \epsilon_N(x),$$

где $\epsilon_N(x)$, согласно (2.16) и (2.17), равномерно сходится к 0 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} |\epsilon_N(x)| = 0.$$

Без потери общности, будем считать что $\mu = 0$ не является собственным значением задачи $L(q, \pi, \beta)$. В самом деле, из чистой дискретности спектра следует, что существует число c такое, что числа $\mu_n + c \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются собственными значениями задачи $L(q + c, \pi, \beta)$ с теми же собственными функциями φ_n и нормировочными постоянными a_n , что и у задачи $L(q, \pi, \beta)$. Тогда функция $\frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)}$ имеет полюсы только первого порядка и используя теорему Коши о вычетах мы можем легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \phi_N(x) &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} d\mu = \operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} + \sum_{n=0}^N \operatorname{Res}_{\mu=\mu_n} \frac{\psi_\beta(x, \mu)}{\mu W_{\pi, \beta}(\mu)} = \\ &= \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \sum_{n=0}^N \frac{\psi_\beta(x, \mu_n)}{\mu_n \dot{W}_{\pi, \beta}(\mu_n)} = \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n \varphi_\pi(x, \mu_n)}{\mu_n \beta_n a_n} = \\ (2.20) \quad &= \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{\mu_n a_n} \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что последовательность $\phi_N(x)$ сходится к 0 (при $N \rightarrow \infty$) равномерно на сегменте $[a, \pi]$, для произвольного $a \in (0, \pi)$.

Так как $\varphi_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ равномерно на $[0, \pi]$ (см. (2.1)), $\mu_n = \mu_n(q, \pi, \beta) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + O(1)$ (см. [9, Теорема 1 на стр. 286 и асимптотические оценки для $\delta_n(\pi, \beta)$ на стр. 292]) и $a_n = a_n(q, \pi, \beta) = \frac{\pi}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (см. [11, Теорема 1.1], стр. 9-10), тогда $\phi_N(x)$ (см. (2.20)) можно записать в

следующем виде:

$$\phi_N(x) = \frac{\psi_\beta(x, 0)}{W_{\pi, \beta}(0)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{n + \frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^N q_n(x),$$

где $q_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ равномерно на $[0, \pi]$.

Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{n + \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 2\pi$ (см. например, [8, формула (37) на стр. 578]), тогда последовательность $\phi_N(x)$ сходится к непрерывной функции $\phi(x)$ (при $N \rightarrow \infty$) равномерно на сегменте $[a, \pi]$, для произвольного $a \in (0, \pi)$.

Теперь, чтобы доказать, что $\phi(x) \equiv 0$, $x \in (0, \pi]$, достаточно показать, что $\phi = 0$ п.в.

Сделав некоторые вычисления, получим:

$$(2.21) \quad \int_0^\pi \phi(x) \varphi_m(x) dx = \frac{1}{W_{\pi, \beta}(0)} \int_0^\pi \psi_\beta(x, 0) \varphi_m(x) dx + \frac{1}{\mu_m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \mu_m \int_0^\pi \psi_\beta(x, 0) \varphi_m(x) dx &= \int_0^\pi (\varphi_m(x) \psi_\beta''(x, 0) - \varphi_m''(x) \psi_\beta(x, 0)) dx = \\ &= (\varphi_m(x) \psi_\beta'(x, 0) - \varphi_m'(x) \psi_\beta(x, 0)) \Big|_0^\pi = \psi_\beta(0, 0) = -W_{\pi, \beta}(0). \end{aligned}$$

Из (2.21) и (2.22) следует

$$\int_0^\pi \phi(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку система собственных функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^\infty$ краевой задачи $L(q, \pi, \beta)$ является полной и ортогональной в $L^2(0, \pi)$, то $\phi = 0$ п.в. Сравнивая этот результат с (2.18), (2.19) и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в (2.19), мы приходим к (1.7). Теорема 1.3 доказана. $\square$

Замечание 2.1. Хорошо известно, что одно из доказательств теоремы 1.2 основывается на так называемой теореме о равномерной равносходимости, которая утверждает, что разложение по собственным функциям задачи $L(q, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ эквивалентно разложению по собственным функциям задачи $L\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т.е., $\{\cos nx\}_{n \geq 0}$ (см. [5, 2, 7]). Далее можно применить теорему Дирихле-Жордана (см. [15, стр. 121–122]) и Теорема 1.2 будет доказана. Тот же подход не может быть применен в нашем случае, а именно: нетрудно установить что разложение по собственным функциям задачи $L(q, \pi, \beta)$,

$\beta \in (0, \pi)$ будет эквивалентно разложению по $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е., по собственным функциям задачи $L\left(0, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$ (см. [5, замечание на стр. 304] и [2, замечание на стр. 71]). С другой стороны, насколько нам известно, нет аналога теоремы Дирихле-Жордана для разложения по системе функций $\left\{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right\}_{n \geq 0}$ (по этому поводу см. [16, Теорема 2.6]).

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Стоит заметить что приведенное в работе [10] доказательство утверждения (b) теоремы 1.5 для случая $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ не проходит для случая $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$. Ниже, используя теоремы 1.3 и 1.4, мы разберем этот случай. Обозначим $\sigma(x) = \int_0^x q(t) dt$ и запишем $l_n(q, \pi, \beta)$ (см. (1.11)) в следующей форме:

$$l_n(q, \pi, \beta) = -\frac{\sigma(\pi) \cos 2\pi\delta_n(\pi, \beta)}{2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta))} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_1(x) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x dx,$$

где $\sigma_1(x) \equiv \sigma\left(\frac{x}{2}\right)$ абсолютно непрерывная функция на $[0, 2\pi]$.

Заметим что единственность решения $\delta_n(\alpha, \beta)$ уравнения (1.9) при $\alpha = \pi$ и $\beta \in [0, \pi)$ можно доказать исходя из того, что $\arccos$ является убывающей функцией.

Из (1.9) легко видеть (подробности см. [9]), что для $\beta \in (0, \pi)$ мы имеем

$$(3.1) \quad \delta_n(\pi, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{\cot \beta}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \cot \beta = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и следовательно,

$$(3.2) \quad \cos 2\pi\delta_n(\pi, \beta) = -1 + d_n, \quad \sin 2\pi\delta_n(\pi, \beta) = e_n,$$

где $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Поэтому, $l(x, \beta)$ (см. (1.12)) можно представить в виде суммы трех функций

$$l(x, \beta) = l_1(x, \beta) + l_2(x, \beta) + l_3(x, \beta),$$

где

$$(3.3) \quad \begin{aligned} l_1(x, \beta) &= \frac{\sigma(\pi)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x}{(n + \delta_n(\pi, \beta))}, \\ l_2(x, \beta) &= -\frac{\sigma(\pi)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} d_n \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x}{(n + \delta_n(\pi, \beta))}, \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad l_3(x, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} f_n \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x,$$

$$\text{и } f_n = \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt.$$

Поскольку $f_n = \int_0^\pi \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt + \int_\pi^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt$ и

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt &= \int_{-\pi}^{-\pi} -\sigma_1(-t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt = \\ &= \int_0^\pi -\sigma_1(2\pi - t) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) (t - 2\pi) dt = \\ &= \int_0^\pi \sigma_1(2\pi - t) ((1 - d_n) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t + e_n \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t) dt = \\ &= \int_0^\pi \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) ((1 - d_n) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t + e_n \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t) dt, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (3.5) \quad f_n &= \int_0^\pi \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt - \\ &- d_n \int_0^\pi \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt + e_n \int_0^\pi \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt. \end{aligned}$$

Следует отметить, что $\delta_n(\alpha, \beta)$ определена только для $n \geq 2$, поэтому мы запишем $\lambda_0(0, \pi, \beta)$, $\lambda_1(0, \pi, \beta)$ и $\lambda_n(0, \pi, \beta) = n + \delta_n(\pi, \beta)$ для всех $n \geq 2$. Учитывая, что система функций

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{\sin \lambda_n(0, \pi, \beta) x}{\lambda_n(0, \pi, \beta)} \right\}_{n=0}^1 \cup \left\{ \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x}{n + \delta_n(\pi, \beta)} \right\}_{n=2}^\infty$$

является системой собственных функций задачи $L(0, \pi, \beta)$ и применяя Теорему 1.3, получаем

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \sigma\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{x}{2}\right) &= \sigma_2(x) + \\ &+ \sum_{n=2}^\infty \frac{\int_0^\pi \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt}{\int_0^\pi \sin^2(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt} \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x \end{aligned}$$

где ряд сходится равномерно на произвольном отрезке $[a, \pi] \subset (0, \pi]$ и

$$\sigma_2(x) := \sum_{n=0}^1 \frac{\int_0^\pi \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin \lambda_n(0, \pi, \beta) t dt}{\int_0^\pi \sin^2 \lambda_n(0, \pi, \beta) t dt} \sin \lambda_n(0, \pi, \beta) x$$

Используя (3.1) и (3.2), мы вычисляем

$$(3.7) \quad \int_0^\pi \sin^2(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt = \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta))}{4(n + \delta_n(\pi, \beta))} = \frac{\pi}{2} - \frac{e_n}{4(n + \delta_n(\pi, \beta))}.$$

Из (3.7), легко видеть, что

$$\frac{1}{\int_0^\pi \sin^2(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt} = \frac{2}{\pi} + g_n, \quad \text{где} \quad g_n = \frac{2e_n}{\pi(2\pi(n + \delta_n(\pi, \beta)) - e_n)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теперь мы можем записать (3.6) в форме

$$(3.8) \quad \sum_{n=2}^\infty \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x = \\ = - \sum_{n=2}^\infty g_n \int_0^\pi \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x + \\ + \sigma\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{x}{2}\right) - \sigma_2(x),$$

где ряды сходятся равномерно на произвольном отрезке $[a, \pi] \subset (0, \pi]$.

Из (3.4), (3.5), (3.8) следует что для произвольного $x \in (0, \pi]$

$$(3.9) \quad l_3(x, \beta) = \frac{1}{4} \left(-\sigma\left(\frac{x}{2}\right) - \sigma\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + \sigma_2(x) \right) + \\ + \sum_{n=2}^\infty \frac{g_n}{4} \int_0^\pi \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^\infty d_n \int_0^\pi \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^\infty e_n \int_0^\pi \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x.$$

Поскольку $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $e_n \int_0^\pi \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) t dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $g_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, тогда $l_3 \in AC(0, \pi]$. С другой стороны, так как (см. (3.4) и (3.2))

$$l_3(2\pi - x, \beta) = l_3(x, \beta) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^\infty d_n f_n \sin(n + \delta_n(\pi, \beta)) x - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^\infty e_n f_n \cos(n + \delta_n(\pi, \beta)) x,$$

то $l_3 \in AC[\pi, 2\pi]$ и следовательно $l_3 \in AC(0, 2\pi)$. Поскольку $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta))x}{(n + \delta_n(\pi, \beta))}$ абсолютно непрерывная функция на $(0, 2\pi)$ (см. [12, 10]), тогда $l_1 \in AC(0, 2\pi)$. Поскольку $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то ряд в (3.3) и его первая производная сходятся абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$ и, следовательно $l_2 \in AC[0, 2\pi]$. Утверждение (b) теоремы 1.5 при $\alpha = \pi, \beta \in (0, \pi)$ доказано. $\square$

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Т. Н. Арутюняну за постановку задачи и внимание к работе.

Abstract. Uniform convergence of the expansion of an absolutely continuous function for eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(0) = 0$, $y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$, $\beta \in (0, \pi)$ with summable potential $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ is proved. This result is used to obtain more precise asymptotic formulae for eigenvalues and norming constants of this problem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк, Линейные Дифференциальные Операторы, Наука, Москва (1969).
- [2] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию, Наука, Москва (1970).
- [3] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и Их Приложения, Наукова Думка, Киев (1977).
- [4] Т. Н. Арутюнян, М. С. Овсепян, “О решениях уравнения Штурма-Лиувилля”, Математика в Высшей Школе, **1**, no. 3, 59–74 (2005).
- [5] E. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw Hill Book Company, New York (1955).
- [6] В. А. Юрко, Введение в Теорию Обратных Спектральных Задач, Физматлит, Москва (2007).
- [7] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Наука, Москва (1988).
- [8] I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev, Handbook of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1998).
- [9] T. N. Harutyunyan, “The dependence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on boundary conditions”, Matematicki Vesnik, **60**, no. 4, 285 – 294 (2008).
- [10] Т. Н. Арутюнян, “Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля”, Известия НАН Армении, Математика, **51**, no. 4, 3 – 16 (2016).
- [11] T. N. Harutyunyan, A. A. Pahlevanyan, “On the norming constants of the Sturm-Liouville problem”, Вестник Казанского государственного энергетического университета, no. 3(31), 7 – 26 (2016).
- [12] Т. Н. Арутюнян, Функция Собственных Значений Семейства Операторов Штурма-Лиувилля и Дирака, Докторская диссертация, Ереван (2010).
- [13] J. Pöschel, E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Academic Press, Inc., Boston, MA (1987).
- [14] Б. В. Шабат, Введение в Комплексный Анализ, Наука, Москва (1985).
- [15] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва (1961).
- [16] A. Iserles, S. P. Nørsett, “From high oscillation to rapid approximation I: Modified Fourier expansions”, IMA Journal of Numerical analysis, **28**, no. 4, 862 – 887 (2008).

Поступила 10 сентября 2017