ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН РА

На правах рукописи
УДК 519.214

ХАЧАТРЯН ЛИНДА АЛЬБЕРТОВНА

МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Специальность А.01.05
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Нахапетян Б.С.

Ереван – 2014

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Мартингальный метод является одним из самых востребованных в теории случайных процессов, особенно в вопросах сходимости последовательностей случайных величин и в предельных теоремах для сумм случайных слагаемых (см., например, [13, 21, 44, 52]). В то же время, данный метод, прекрасно зарекомендовавший себя в одномерных задачах, в применении к многомерным системам (случайные поля) пока еще не столь продуктивен.

Стандартное объяснение этому состоит в том, что обычное определение мартингала существеннейшим образом опирается на свойство абсолютной упорядоченности действительной прямой, тогда как пространственные структуры этим свойством не обладают. По этой причине, например, один из основных способов построения одномерных мартингалов как суммы случайных величин, центрированных условными математическими ожиданиями, в применении к случайным полям приводит к весьма искусственным конструкциям, полезность которых не совсем очевидна. Отсюда ясно, что для использования мартингального метода в многомерном случае принципиально важно иметь такое определение мартингала, в рамках которого возможно построение достаточно интересных классов случайных объектов, обладающих указанным мартингальным свойством.

Существуют различные подходы к определению многомерных мартингалов (см., например, [3, 4, 7, 22–24, 27, 36, 37, 39]), в которых, как правило, используются монотонные последовательности подмножеств некоторого множества. Различия в выборе таких последовательностей приводят к различным способам определения многомерных мартингалов.

Первоначально при построении многомерных мартингалов рассматривались семейства случайных величин, параметризованные элементами возрастающей последовательности некоторого направленного множества (см., например, работы Крикеберга [27], Хелмса [22] и Чоу [4]). Далее, Кароли и Уолш ([3]) для случая размерности 2 предложили рассматривать стохастические семейства случайных величин, параметризованные возрастающей последовательностью прямоугольников в первой четверти вещественной плоскости. Этот же подход применялся и в больших размерностях (см., например, работы Тджостейма [39], Иванова, Мерцбаха [24] и Иллига, Траун-Вана [23]).

В указанных работах основной целью являлось установление различных теорем сходимости для многомерных мартингалов, тогда как вопрос справедливости классических предельных теорем, верных для сумм независимых случайных величин, для таких мартингалов практически не рассматривался.

Ситуация изменилась с публикацией работ [36, 37]. В этих работах рассматривались многомерные мартингалы относительно возрастающих подмножеств d-мерной ($d \geq 1$) целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$ и был введен класс случайных полей, суммы компонент которых, взятые по возрастающим подмножествам решетки, образуют мартингал в указанном смысле. Случайные поля из введенного класса были названы мартингал–разностными. В этих же работах были приведены различные способы построения мартингал–разностных случайных полей (в том числе такие, которые не имеют аналогов в классической теории) и были установлены многомерные варианты некоторых известных предельных теорем теории одномерных мартингалов.

Работы [36, 37] послужили основой для последующих исследований в области предельных теорем для многомерных мартингалов (см., например, [1, 5, 7, 14, 16–18, 38]).

Мартингал–разностные случайные поля интересны со многих точек зрения. В силу того, что эти поля обладают рядом полезных свойств (максимальные неравенства для вероятностей сумм компонент, асимптотически точные оценки моментов и т.д.), для них оказываются справедливыми основные предельные теоремы, верные для последовательностей независимых случайных величин, а именно, центральная предельная теорема (ЦПТ), локальная предельная теорема (ЛПТ), закон повторного логарифма, принцип инвариантности (функциональная предельная теорема) и т.д. (см. [25, 33, 36–38, 46, 50]). Кроме того, эти поля интересны также с точки зрения некоторых задач статистической физики (см., например, [34]).

В настоящей диссертации главное внимание уделяется способам построения мартингал–разностных случайных полей, установлению предельных теорем для них, применению полученных результатов к гиббсовским случайным полям.

В первой главе диссертации приводится способ построения достаточно широкого класса мартингал–разностных случайных полей, являющийся развитием подхода, предложенного в [37]. Указываются условия на переходные вероятности, при которых марковские случайные поля принадлежат построенному классу. Кроме того, и это является принципиальным для нас, показывается, что при определенных условиях на потенциал и гиббсовские случайные поля принадлежат тому же классу.

Во второй главе диссертации рассматриваются вопросы, относящиеся к предельным теоремам для мартингал–разностных случайных полей. Найдена точная асимптотика всех моментов сумм компонент мартингал–разностных случайных полей, взятых по возрастающим подмножествам. Это, в свою очередь, позволяет доказать усиленный вариант ЦПТ для мартингал–разностных случайных полей, включающий сходимость моментов. Кроме того, получена степенная оценка скорости сходимости в ЦПТ, и при тех же условиях доказывается закон повторного логарифма. Полученные результаты позволяют с новой точки зрения рассматривать вопросы, связанные со сферой приложения предельных теорем к марковским и гиббсовским случайным полям.

В третьей главе диссертации мы показываем, что, применяя принцип рандомизации, каждому случайному полю можно сопоставить некоторое связанное с ним (ассоциированное) мартингал–разностное случайное поле. Основываясь на формуле связи между конечномерными распределениями ассоциированного и заданного случайных полей, мы показываем, что ассоциированные случайные поля наследуют многие свойства заданного поля, такие как однородность, эргодичность, слабую зависимость и т.д. В следствии этого, известные центральная и функциональная предельные теоремы оказываются верными и для ассоциированных мартингал-разностных случайных полей. Не менее, а, может, и более важным (с точки зрения предельных теорем) является нахождение формулы связи для распределений конечных сумм компонент ассоциированного и заданного случайных полей. Указанная формула в некоторых важных случаях может быть обращена (см. Главу 4), что открывает возможность изучения заданного случайного поля, основываясь на полезных свойствах мартингалов.

В четвертой главе диссертации рассматривается применение мартингального метода к гиббсовским случайным полям.

В середине прошлого века трудами Н. Боголюбова, Д. Рюэля, Р. Минлоса, Дж. Лейбовица, Я. Синая, Р. Добрушина и др. статистическая физика была полностью математизирована на основе понятия гиббсовского случайного поля. Гиббсовские случайные поля являются не только одним из основных объектов изучения в математической статистической физике, но и широко применяются в других областях исследований, таких как обработка изображений и сигналов, геофизика, биофизика и т.д.

Определение гиббсовского случайного поля основано на предложенном Добрушиным подходе к описанию случайных полей посредством их условных распределений (см. [8]). Условным распределением случайного поля в конечной области V, $V \subset \mathbb{Z}^d$, при заданных бесконечных граничных условиях всюду вне V, называется предел отношения соответствующих безусловных вероятностей, который для данного поля существует почти всюду. Согласно Добрушину, гиббсовским является случайное поле, условное распределение которого имеет гиббсовскую форму, описываемую в терминах потенциала взаимодействия ([9, 10]). Другое определение гиббсовского случайного поля, не использующее понятие потенциала, было предложено Нахапетяном и Дашьяном в [6]. Согласно их определению, случайное поле будет гиббсовским, если упомянутое отношение безусловных вероятностей стремится к своему пределу равномерно относительно граничных условий. В [6] было также показано, что эти определения гиббсовского случайного поля эквивалентны. Более того, в определении Нахапетяна и Дашьяна достаточно требовать равномерную сходимость только для одноточечных условных распределений.

Предельные теоремы для гиббсовских случайных полей играют важнейшую роль в статистической физике, и этой проблематике посвящено большое количество работ (см., например, [12, 29–32]). В четвертой главе, применяя результаты предыдущих глав, удается значительно расширить область справедливости предельных теорем для гиббсовских случайных полей.

Другое применение мартингального метода в задачах статистической физики имеет место при исследовании поведения суммарного спина в критической точке. Эта возможность впервые была высказана Нахапетяном в работе [34].

В классической статистической физике принято считать, что ЦПТ не может выполняться в критической точке для многомерных моделей. Для подтверждения этого предположения приводятся различные аргументы, а в качестве примера фигурирует ферромагнитная модель Изинга. Эта модель задается потенциалом парного взаимодействия ближайших соседей и имеет два параметра — внешнее поле $h \in \mathbb{R}$ и обратная температура $\beta > 0$. Известно, что существует определенное критическое значение β_{cr} обратной температуры, такое, что при $h = 0$ и $\beta > \beta_{cr}$ имеет место феномен разделения фаз (неединственность). При других значениях параметров ($h \neq 0$, $\beta > 0$ и $h = 0$, $0 < \beta < \beta_{cr}$) гиббсовское случайное поле, соответствующее модели Изинга, единственно и для его суммарного спина справедлива ЦПТ. Однако, при $h = 0$ и $\beta \uparrow \beta_{cr}$ корреляция между спинами резко возрастает, что и приводит к мысли о том, что ЦПТ в критической точке $(0, \beta_{cr})$ не должна выполняться.

Опровергая указанную точку зрения, Нахапетян в [34] привел пример мартингальной модели, определенным образом связанной с моделью Изинга, для которой ЦПТ имеет место в критической точке. В [34] были также установлены формулы связи конечномерных распределений суммарных спинов модели Изинга и рассмотренной мартингальной модели. Поскольку поведение суммарного спина мартингальной модели в критической точке известно (оно асимптотически нормально), то в [34] было высказано предположение, что изучение указанной формулы связи конечномерных распределений позволит установить асимптотическое поведение суммарного спина модели Изинга в ее критической точке.

В четвертой главе приводятся результаты, которые представляют собой необходимый начальный этап реализации идеи применения мартингального метода при исследовании поведения суммарного спина в критической точке. Установлен более компактный и удобный вид формулы связи конечномерных распределений суммарных спинов модели Изинга и мартингальной модели. С использованием полученной формулы удалось выразить характеристическую функцию суммарного спина модели Изинга посредством распределений вероятностей суммарного спина мартингальной модели. Это, в свою очередь, позволило установить связь моментов суммарных спинов модели Изинга и мартингальной модели, что открывает возможность применения метода моментов для изучения асимптотики суммарного спина модели Изинга в критической точке.

В заключении отметим, что, хотя в рамках настоящей работы мы ограничиваемся рассмотрением случайных полей с конечным фазовым пространством X, многие результаты могут быть перенесены и на общий случай.

ПРЕЛИМИНАРИИ

Приведем основные понятия и обозначения, используемые в диссертации.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — некоторое непустое конечное множество и $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ — d-мерная целочисленная решетка. Для $S \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим через $W(S) = \{V \subset S, |V| < \infty\}$[1] множество всех конечных подмножеств S. При $S = \mathbb{Z}^d$ будем использовать более простое обозначение W.

Обозначим через $X^S = \{(x_t, t \in S)\}$, $x_t \in X$ множество конфигураций на S, $S \subset \mathbb{Z}^d$. Для $S = \emptyset$ предполагается, что $X^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Для любых $S, T \subset \mathbb{Z}^d$, таких, что $S \cap T = \emptyset$ и любых конфигураций $x \in X^S$ и $y \in X^T$ обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T. Для $S \subset T$, $x \in X^T$, обозначим через x_S сужение конфигурации x на S. Для σ-алгебры, порожденной цилиндрическими подмножествами $X^{\mathbb{Z}^d}$, примем обозначение $\mathscr{B}^{\mathbb{Z}^d}$.

Случайным полем, заданным на $\mathbb{Z}^d$, с фазовым пространством X, будем называть совокупность $(\xi_t) = \left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right)$ случайных величин, каждая из которых принимает значение в X. Через $\Im_S$ обозначим σ-алгебру, порожденную совокупностью его компонент $\xi_s, s \in S$, $S \subset \mathbb{Z}^d$.

Распределением случайного поля (ξ_t) называется вероятностная мера P на $\left(X^{\mathbb{Z}^d}, \mathscr{B}^{\mathbb{Z}^d}\right)$, такая, что

$$\Pr\left\{\left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right) \in B\right\} = P(B), \qquad B \in \mathscr{B}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Случайные поля с одним и тем же распределением P будем считать совпадающими.

В соответствии с теоремой Колмогорова, задание распределения P случайного поля эквивалентно заданию согласованной системы $\{P_V, V \in W\}$ конечномерных распределений случайного поля, т.е. такой системы, для которой при всех $I \subset V$, $I, V \in W$

$$\sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) = P_I(x), \qquad x \in X^I,$$

где

$$P_V\left(x_1, ..., x_{|V|}\right) = P\left(\xi_{t_1} = x_1, ..., \xi_{t_{|V|}} = x_{|V|}\right).$$

Для случайного поля (ξ_t) и любого $V \in W$ условной вероятностью $q_V^{\bar{x}}(x)$, $x \in X^V$ с граничными условиями $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ называется следующий предел

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \lim_{\tilde{V} \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus V} \frac{P\left(\xi_t = x_t, t \in V, \xi_s = \bar{x}_s, s \in \tilde{V}\right)}{P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in \tilde{V}\right)}, \tag{0.1}$$

[1]Здесь и всюду далее $|V|$ означает мощность конечного множества V

который существует почти всюду. Следуя Добрушину, совокупность $Q = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ будем называть условным распределением случайного поля (ξ_t). Подсистему $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ условного распределения Q случайного поля будем называть его одноточечным условным распределением.

Отметим, что случайное поле может иметь много версий условного и одноточечного условного распределений. При этом известно (см. [20]), что случайные поля с конечным фазовым пространством имеют по крайней мере одну версию условного распределения Q, для которого пределы (0.1) существуют для всех $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$, $V \in W$. Далее под условным распределением случайного поля мы будем понимать именно такую совокупность пределов (0.1).

Случайное поле (ξ_t) называется положительным, если для любого $V \in W$ распределение вероятностей $P_V(x) > 0$ для всех $x \in X^V$.

Определим на $X^{\mathbb{Z}^d}$ группу преобразований τ_a, $a \in \mathbb{Z}^d$, такую, что $(\tau_a x)_t = x_{t+a}$ для всех $x \in X^{\mathbb{Z}^d}$. Пусть $\mathscr{L}$ — σ-алгебра подмножеств $X^{\mathbb{Z}^d}$, инвариантных относительно преобразований τ_a. Случайное поле (ξ_t) с распределением P называется однородным (или трансляционно–инвариантным), если для любых $A \in \mathscr{B}^{\mathbb{Z}^d}$ и $a \in \mathbb{Z}^d$

$$P(\tau_a A) = P(A).$$

Случайное поле (ξ_t) называется эргодическим, если его распределение P тривиально на $\mathscr{L}$, т.е. $P(A) \in \{0, 1\}$ при $A \in \mathscr{L}$.

Имеет место также следующее эквивалентное определение эргодичности случайного поля (см., например, [43]). Однородное случайное поле (ξ_t) называется эргодическим, если имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{a \in V_n} P(A \cap \tau_a(B)) = P(A) P(B),$$

где $A \in \Im_I$, $B \in \Im_\Lambda$, $I, \Lambda \in W$, а V_n — d-мерный куб со стороной n, $n = 1, 2, \ldots$.

Помимо эргодичности, существуют более сильные условия слабой зависимости компонент случайного поля. Нами будет использоваться следующее условие равномерного сильного перемешивания.

Мы будем говорить, что однородное случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, если для каждого фиксированного $I \in W$

$$\sup\left\{|P(A/B) - P(A)|, A \in \Im_I, B \in \Im_\Lambda, P(B) > 0\right\} \le \boldsymbol{\varphi}_I(\rho(I, \Lambda)),$$

где функция $\boldsymbol{\varphi}_I(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$, такова, что $\boldsymbol{\varphi}_I(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ и фиксированном $I \in W$. Здесь

$$\rho(I, \Lambda) = \inf\{|t - s|, t \in I, s \in \Lambda\},$$

$|t - s| = \max\limits_{1 \le i \le d} \left|t^{(i)} - s^{(i)}\right|$, $t = \left(t^{(1)}, ..., t^{(d)}\right)$, $s = \left(s^{(1)}, ..., s^{(d)}\right)$.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [32, 42]).

Утверждение 0.1. *Пусть (ξ_t) — однородное случайное поле, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания, и пусть ζ, η — случайные величины, измеримые относительно σ-алгебр $\Im_I$ и $\Im_\Lambda$, соответственно, $\rho(I, \Lambda) \ge r$, причем $|\zeta| < B_1$, $|\eta| < B_2$. Тогда*

$$|M\zeta\eta - M\zeta \cdot M\eta| \le 2B_1B_2\boldsymbol{\varphi}_I(r),$$

где M — символ математического ожидания, а B_1, B_2 — положительные постоянные.

В предельных теоремах для случайных полей используются различные последовательности возрастающих подмножеств целочисленной решетки, которые стремятся к $\mathbb{Z}^d$ (см., например, [32]). Мы ограничимся рассмотрением последовательности $\{V_n\}_{n \ge 1}$ d-мерных кубов с центром в начале координат и стороной n, таких, что $V_n \subset V_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$

Пусть (ξ_t) — однородное случайное поле и

$$S_V = \sum_{t \in V} \xi_t, \qquad V \in W.$$

Мы скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_{V_n} - MS_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

где D — символ дисперсии, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Предположим, что $X \subset \mathbb{Z}$. Мы скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива ЛПТ, если при $n \to \infty$

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{DS_{V_n}} P(S_{V_n} = j) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(S_{V_n} - MS_{V_n})^2}{2DS_{V_n}}\right\} \right| \to 0.$$

Мы скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлив закон повторного логарифма, если

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{V_n}}{\sqrt{2DS_{V_n}\ln\ln|V_n|}}=1\right)=1.$$

Пусть, далее, $T=[0,1]^d$ — декартово произведение d интервалов $[0,1]$ и $\mathbf{W}=\{\mathbf{W}(t),t\in T\}$ — d-мерный винеровский процесс на T (см. [38]). Для всех $t\in\mathbb{Z}^d$ положим

$$U_n(t)=\frac{1}{\sqrt{DS_{V_n}}}\sum\xi_s,$$

где суммирование ведется по всем $s=\left(s^{(1)},s^{(2)},...,s^{(d)}\right)\in\mathbb{Z}^d$, таким, что $0<s^{(i)}\le\left[nt^{(i)}\right]$ [2], $i=\overline{1,d}$. Мы скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива функциональная предельная теорема (ФПТ), если U_n сходится по распределению к $\mathbf{W}$ при $n\to\infty$.

[2] Здесь и далее $[\cdot]$ означает целую часть числа

Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1.1. Многомерные мартингалы и мартингал–разностные случайные поля

Эта глава посвящена различным способам построения многомерных мартингалов и мартингал–разностных случайных полей. Мы будем исходить из определения многомерного мартингала, предложенного в [36, 37].

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{B}, \mathrm{P})$ и семейство случайных величин S_V, $V \in W$ на нем. Пусть, далее, $\{\mathscr{B}_V, V \in W\}$ — частично упорядоченное по вложению множество σ-подалгебр $\mathscr{B}$, а именно,

- $\mathscr{B}_V \subset \mathscr{B}$ для всех $V \in W$;
- из $\tilde{V} \subset V$ следует $\mathscr{B}_{\tilde{V}} \subset \mathscr{B}_V$;
- $\mathscr{B}_\emptyset = \{\emptyset, \Omega\}$.

Семейство случайных величин $S = (S_V, \mathscr{B}_V)$ будем называть *мартингалом*, если для всех $V \in W$ величины S_V являются $\mathscr{B}_V$-измеримыми, $M\,|S_V| < \infty$ и для всех $\tilde{V} \subset V$

$$M\left(S_V / \mathscr{B}_{\tilde{V}}\right) = S_{\tilde{V}} \text{ (п.н.)}.$$

Приведем два примера построения многомерных мартингалов, которые в той же форме используются и в одномерном случае.

Пример 1. Пусть ζ — случайная величина, такая, что $M\,|\zeta| < \infty$ и пусть $\{\mathscr{B}_V, V \in W\}$ — частично упорядоченное по вложению множество σ-алгебр. Положим

$$S_V = M\left(\zeta / \mathscr{B}_V\right), \qquad V \in W$$

Тогда семейство случайных величин $S = (S_V, \mathscr{B}_V)$ образует мартингал.

Пример 2. Пусть X — полное метрическое пространство с конечной положительной мерой μ на σ-алгебре $\mathscr{B}$ борелевских подмножеств X. Пусть $\{p_V, V \in W\}$ — совокупность строго положительных плотностей, определенных на соответствующих пространствах $\left(X^V, \mathscr{B}^V, \mu^V\right)$, $V \in W$, и согласованных по Колмогорову. Пусть $\{q_V, V \in W\}$ — другая совокупность согласованных плотностей. Положим

$$S_V = \frac{q_V}{p_V}, \qquad V \in W$$

Тогда семейство случайных величин $S = \left(S_V, \mathscr{B}^V\right)$ образует мартингал.

В работах [36,37] было введено понятие мартингал–разностного случайного поля и показано, что достаточно широкие и интересные классы случайных полей являются таковыми.

Случайное поле (ξ_t) называется *мартингал–разностным случайным полем*, если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$, $M\,|\xi_t| < \infty$ и

$$M\left(\xi_t / \Im_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}\right) = 0 \text{ (п.н.).} \tag{1.1}$$

Нетрудно проверить, что условие (1.1) эквивалентно выполнению условия

$$M\left(\xi_t / \Im_V\right) = 0 \text{ (п.н.)} \tag{1.2}$$

для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $V \in W$, таких, что $t \notin V$.

По заданному мартингал–разностному случайному полю всегда можно построить многомерный мартингал. Действительно, пусть (ξ_t) — мартингал–разностное случайное поле, $S_V = \sum\limits_{t \in V} \xi_t$, $V \in W$. Тогда семейство $(S_{\Lambda_n}, \Im_{\Lambda_n})$ образует мартингал относительно любой последовательности $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$ возрастающих конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$, такой, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$. Верно и обратное утверждение. Если для заданного случайного поля (ξ_t) семейство $(S_{\Lambda_n}, \Im_{\Lambda_n})$ образует мартингал, тогда (ξ_t) — мартингал–разностное случайное поле.

В работе [37] приведены три примера построения мартингал-разностных случайных полей, которые не имеют прямых аналогов в классической (одномерной) теории мартингалов.

Пример 3. Пусть (ξ_t) — случайное поле, компоненты которого принимают значения в симметричном относительно нуля множестве X, а его конечномерное распределение $\{P_V, V \in W\}$ таково, что $P_V > 0$, $V \in W$ и

$$P_V\left(\theta_t x_t, t \in V\right) = P_V\left(x_t, t \in V\right),$$

для всех $\theta_t \in \{1, -1\}$. Тогда случайное поле (ξ_t) является мартингал–разностным случайным полем.

Пример 4. Рассмотрим случайное поле (ξ_t) с фазовым пространством X, для которого существует разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ($X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$, $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$), такое, что

$$\sum_{x \in X_k} x = 0, \qquad k = \overline{1, n}.$$

Пусть одноточечные условные распределения $q_t^{\bar{x}}(x)$ случайного поля (ξ_t) принимают постоянные значения на элементах разбиения Π, т.е. для всех

$\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$ и $t \in \mathbb{Z}^d$

$$q_t^{\bar{x}}(x) = q_{t,k}^{\bar{x}}, \qquad x \in X_k, k = \overline{1,n}.$$

Тогда (ξ_t) является мартингал–разностным случайным полем.

Пример 5. Пусть $T = \{T_j\}$ — некоторое разбиение $\mathbb{Z}^d$, т.е.

$$\mathbb{Z}^d = \bigcup_j T_j, \qquad T_j \cap T_k = \emptyset, j \neq k.$$

Пусть случайное поле (ξ_t) удовлетворяет следующему свойству: для всех j случайное поле ξ_t, $t \in T_j$ является мартингал-разностным случайным полем, т.е.

$$M\left(\xi_t / \Im_{T_j \setminus \{t\}}\right) = 0 \text{ (п.н.)}.$$

Если, к тому же, при $s \in T_j$, $r \in T_k$, $j \neq k$ случайные величины ξ_s и ξ_r независимы, тогда случайное поле (ξ_t) является мартингал–разностным случайным полем.

Предлагаемый далее способ построения мартингал–разностных случайных полей является развитием идеи, использованной в Примере 4, и определенным образом обобщает способ, рассмотренный в Примере 3.

1.2. Случайные поля с кусочно–постоянными по каждой из компонент конечномерными распределениями

В этом разделе вводится класс случайных полей, на основе которых строится один из базовых примеров мартингал–разностных случайных полей, рассматриваемых в диссертации.

Скажем, что конечномерные распределения случайного поля (ξ_t) кусочно–постоянны по каждой из переменных, если существует разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ его фазового пространства X ($X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$), такое, что при всех $x, x' \in X_k$ имеет место равенство

$$P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) = P\left(\xi_t = x', \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) \tag{1.3}$$

где $\bar{x} \in X^V$, $V \in W$, $t \notin V$, $k = \overline{1,n}$.

Совокупность случайных полей, обладающих свойством (1.3), обозначим через $\mathscr{P}$. Приведем примеры.

Пример 6. Пусть (ξ_t) — случайное поле с четными конечномерными распределениями и симметричным относительно нуля фазовым пространством X. Тогда (ξ_t) принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Без ограничения общности можем считать, что $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, -x_1, -x_2, ..., -x_n\}$. Рассмотрим разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ множества X такое, что $X_k = \{x_k, -x_k\}$, $k = \overline{1,n}$. В силу четности конечномерных распределений случайного поля (ξ_t) имеем

$$P\left(\xi_t = x_k, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) = P\left(\xi_t = -x_k, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right)$$

для всех $\bar{x} \in X^V$, $V \in W$, $t \notin V$ и $k = \overline{1,n}$.

Пример 7. Пусть (ξ_t) — случайное поле с независимыми компонентами и пусть $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ — некоторое разбиение его фазового пространства X. Если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $k = \overline{1,n}$

$$P\left(\xi_t = x\right) = P\left(\xi_t = x'\right) \qquad \text{при } x, x' \in X_k,$$

то (ξ_t) принадлежит $\mathscr{P}$.

Проверим выполнение условия (1.3). Для всех $x, x' \in X_k$ можем написать

$$P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) = P\left(\xi_t = x\right) P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) =$$

$$= P\left(\xi_t = x'\right) P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) = P\left(\xi_t = x', \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right),$$

где $\bar{x} \in X^V$, $V \in W$, $t \notin V$, $k = \overline{1,n}$.

Далее рассмотрим случайные поля с зависимыми компонентами, а именно, марковские и гиббсовские случайные поля.

Определение марковского случайного поля существенно опирается на понятие системы окрестностей на $\mathbb{Z}^d$. Системой окрестностей на $\mathbb{Z}^d$ называют такую систему $\left\{\partial t, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ конечных множеств ∂t решетки $\mathbb{Z}^d$, что для всех $t, s \in \mathbb{Z}^d$

- $t \notin \partial t$;
- $s \in \partial t$ тогда и только тогда, когда $t \in \partial s$.

Различия в выборе системы окрестностей приводят к различным типам марковских случайных полей.

Случайное поле (ξ_t) называется марковским случайным полем, если его условные вероятности обладают следующим свойством: для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $V \in W$, таких, что $\partial t \subset V$

$$P\left(\xi_t = x / \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) = P\left(\xi_t = x / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t\right),$$

$x \in X$, $\bar{x} \in X^V$.

Приведем условия, при которых марковские случайные поля принадлежат классу $\mathscr{P}$.

Пример 8. Пусть (ξ_t) — марковское случайное поле с фазовым пространством X. Если существует разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ множества X, такое, что при $x, x' \in X_k$

$$P\left(\xi_t = x\right) = P\left(\xi_t = x'\right)$$

и

$$P\left(\xi_t = x / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t\right) = P\left(\xi_t = x' / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t\right).$$

для всех $k = \overline{1, n}$, $t \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{\partial t}$, то конечномерные распределения случайного поля (ξ_t) кусочно–постоянны по каждой из компонент.

Зафиксируем $t \in \mathbb{Z}^d$ и $V \in W$, такое, что $t \notin V$. Обозначим через $I = \partial t \backslash V$. С применением марковского свойства можем написать

$$P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) =$$

$$= \sum_{u \in X^I} P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V, \xi_r = u_r, r \in I\right) =$$

$$= \sum_{u \in X^I} P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V, \xi_r = u_r, r \in I\right) \cdot$$

$$\cdot P\left(\xi_t = x / \xi_s = \bar{x}_s, s \in V, \xi_r = u_r, r \in I\right) =$$

$$= \sum_{u \in X^I} P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V, \xi_r = u_r, r \in I\right) P\left(\xi_t = x / \xi_s = y_s, s \in \partial t\right),$$

где

$$y_s = \begin{cases} \bar{x}_s, & s \in V \\ u_s, & s \in I \end{cases}$$

Тогда для всех $x, x' \in X_k$, $k = \overline{1, n}$

$$P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) =$$

$$= \sum_{u \in X^I} P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V, \xi_r = u_r, r \in I\right) P\left(\xi_t = x / \xi_s = y_s, s \in \partial t\right) =$$

$$= \sum_{u \in X^I} P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V, \xi_r = u_r, r \in I\right) P\left(\xi_t = x' / \xi_s = y_s, s \in \partial t\right) =$$

$$= P\left(\xi_t = x', \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right).$$

Остается заметить, что приведенные рассуждения остаются справедливыми при любом выборе $t \in \mathbb{Z}^d$ и $V \in W$, таких, что $t \notin V$.

Перейдем к рассмотрению гиббсовских случайных полей. Начнем с определения гиббсовского случайного поля, предложенного Нахапетяном и Дашьяном в работе [6].

Случайное поле (ξ_t) с распределением P называется *гиббсовским*, если оно положительно и для каждого $x \in X$ существует строго положительный равномерный по $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$ предел

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{P_{V \cup \{t\}}(x \bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)}, \qquad t \in \mathbb{Z}^d.$$

Совокупность $\mathcal{Q}^{(1)} = \left\{ q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d \right\}$ называется одноточечной канонической спецификацией, соответствующей гиббсовскому случайному полю (ξ_t).

Приведем условия, при которых гиббсовское случайное поле принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Пример 9. Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X. Если существует разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ множества X, такое, что элементы одноточечной канонической спецификации $\mathcal{Q}^{(1)}$ гиббсовского случайного поля (ξ_t) принимают постоянные значения на элементах разбиения Π, то конечномерные распределения случайного поля (ξ_t) кусочно–постоянны по каждой из компонент относительно разбиения Π.

Действительно, пусть $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ такое разбиение множества X, что

$$q_t^{\bar{x}}(x) = q_t^{\bar{x}}(x') \qquad \text{при } x, x' \in X_k,$$

$k = \overline{1, n}$. Из определения гиббсовского случайного поля следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое $V_0 \in W$, такое, что

$$\sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V \cup \{t\}}(x \bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

для всех V, таких, что $V_0 \subset V$, и всех $x \in X$. Тогда для $x, x' \in X_k$ можем написать

$$\sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| \frac{P_{\{t\} \cup V}(x \bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} - \frac{P_{\{t\} \cup V}(x' \bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{\{t\} \cup V}(x \bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| + \sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x') - \frac{P_{\{t\} \cup V}(x' \bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| +$$

$$+ \sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - q_t^{\bar{x}}(x') \right| < 2\varepsilon.$$

Поскольку выбор значения ε произволен, то для достаточно больших $V \in W$ получаем

$$P_{\{t\}\cup V}\left(x\bar{x}_V\right) = P_{\{t\}\cup V}\left(x'\bar{x}_V\right) \qquad \text{при } x, x' \in X_k, k = \overline{1,n}.$$

Остается заметить, что в силу согласованности конечномерных распределений случайного поля, для всех $I \subset V$ имеем

$$P_{\{t\}\cup I}\left(x\bar{x}_I\right) = \sum_{u \in X^{V\setminus I}} P_{\{t\}\cup V}\left(x\bar{x}_I u_{V\setminus I}\right) = \sum_{u \in X^{V\setminus I}} P_{\{t\}\cup V}\left(x'\bar{x}_I u_{V\setminus I}\right) = P_{\{t\}\cup I}\left(x'\bar{x}_I\right)$$

при $x, x' \in X_k$, $k = \overline{1,n}$.

В приложениях при определении гиббсовских случайных полей обычно используют понятие потенциала взаимодействия. Совокупность функций $\Phi = \left\{\Phi_V\left(x\right), x \in X^V, V \in W\right\}$, удовлетворяющих условию

$$\|\Phi\| = \sum_{0 \in V \in W} \sup_{x \in X^V} \left|\Phi_V\left(x\right)\right| < \infty,$$

называется потенциалом взаимодействия, а величина $\|\Phi\|$ называется нормой потенциала Φ. Для каждого $V \in W$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus V}$ определим потенциальную энергию

$$U_V^{\bar{x}}\left(x\right) = \sum_{J \subset V : J \neq \varnothing} \sum_{\tilde{J} \in W(\mathbb{Z}^d\setminus V)} \Phi_{J\cup\tilde{J}}\left(x_J \bar{x}_{\tilde{J}}\right), \qquad x \in X^V.$$

Рассмотрим совокупность $\mathcal{Q} = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus V}, V \in W\right\}$ конечномерных распределений вероятностей следующего вида

$$q_V^{\bar{x}}\left(x\right) = \frac{\exp\left\{-U_V^{\bar{x}}\left(x\right)\right\}}{\sum\limits_{z \in X^V} \exp\left\{-U_V^{\bar{x}}\left(z\right)\right\}}, \qquad x \in X^V,$$

которая называется гиббсовской спецификацией (см. [8, 9]).

Согласно Добрушину ([9]), *гиббсовским случайным полем*, отвечающим потенциалу Φ, называется случайное поле, имеющее версию условного распределения, почти всюду совпадающую с гиббсовской спецификацией, построенной по этому потенциалу.

Следующая теорема репрезентации, доказанная в [6], показывает эквивалентность приведенных определений гиббсовского случайного поля.

Теорема 1.1. *Если P — гиббсовское случайное поле, то его одноточечная каноническая спецификация допускает гиббсовское представление с помощью равномерно сходящегося потенциала. Обратно, если случайное поле* *имеет версию условного распределения, которое допускает гиббсовское представление с равномерно сходящимся потенциалом, то поле P — гиббсовское.*

В диссертации мы будем использовать оба определения гиббсовского случайного поля.

Приведем условия на потенциал, при которых гиббсовское случайное поле принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Пример 10. Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ. Пусть существует разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ множества X, такое, что потенциал Φ принимает постоянные значения на элементах разбиения Π, т.е. для всех $x_t \in X_k$

$$\Phi_{V\cup\{t\}}(x_t x_V) = \Phi_{V,k}(x_V),$$

где $V \in W$, $t \notin V$, $k = \overline{1,n}$. Тогда конечномерные распределения случайного поля (ξ_t) кусочно–постоянны по каждой из компонент.

Достаточно проверить, что при указанных условиях на потенциал одноточечные условные распределения вероятностей $q_t^{\bar{x}}(x)$ гиббсовского случайного поля (ξ_t) принимают постоянные значения на элементах разбиения Π. Пусть $x \in X_k$. Имеем

$$U_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{V\in W(\mathbb{Z}^d\setminus\{t\})} \Phi_{V\cup\{t\}}(x_t x_V) = \sum_{V\in W(\mathbb{Z}^d\setminus\{t\})} \Phi_{V,k}(x_V) = U_{t,k}^{\bar{x}},$$

для всех $k = \overline{1,n}$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Тогда для всех $k = \overline{1,n}$ и $x \in X_k$ имеет место равенство

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \frac{\exp\{-U_t^{\bar{x}}(x)\}}{\sum\limits_{z\in X} \exp\{-U_t^{\bar{x}}(z)\}} = \frac{\exp\left\{-U_{t,k}^{\bar{x}}\right\}}{\sum\limits_{z\in X} \exp\{-U_t^{\bar{x}}(z)\}} = q_{t,k}^{\bar{x}}.$$

Отметим также следующие классы потенциалов, которые будут использоваться в дальнейшем. Говорят, что потенциал Φ имеет конечный радиус действия R, если

$$\Phi_V(x) = 0 \qquad \text{при } \sup_{t,s\in V} |t-s| > R,$$

для всех $x \in X^V$, $V \in W$. Потенциал Φ называется трансляционно–инвариантным, если для всех $V \in W$ и $a \in \mathbb{Z}^d$

$$\Phi_{V+a}(x) = \Phi_V(x), \qquad x \in X^V.$$

Потенциал Φ называется четным, если для всех $V \in W$ и $x \in X^V$

$$\Phi_V\left(x_t, t \in V\right) = \Phi_V\left(\theta_t x_t, t \in V\right), \qquad \theta_t \in \{-1, 1\}, t \in V.$$

Условия, накладываемые на потенциал, позволяют получать тот или иной класс гиббсовских случайных полей. Так, например, гиббсовские случайные поля, соответствующие трансляционно–инвариантному потенциалу, являются однородными. При этом следует отметить работу [35], в которой было показано, что предположения, определяющие различные классы гиббсовских случайных полей, могут быть сформулированы исключительно в терминах свойств функций $U_t^{\bar{x}}$, соответствующих потенциальной энергии в точке t при заданных граничных условиях $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Как будет показано в параграфе 1.3, следующее свойство случайных полей из класса $\mathscr{P}$ является весьма полезным при построении мартингал–разностных случайных полей.

Лемма 1.1. *Пусть конечномерные распределения случайного поля* (ξ_t) *кусочно–постоянны по каждой из переменных при разбиении* $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *фазового пространства* X*. Тогда одноточечные условные распределения случайного поля* (ξ_t) *принимают постоянные значения на элементах разбиения* Π*, т.е.*

$$q_t^{\bar{x}}(x) = q_{t,k}^{\bar{x}} \qquad \text{при } x \in X_k$$

для всех $t \in \mathbb{Z}^d$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$ *и* $k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Для всех $x, x' \in X_k$ имеем

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right)}{P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right)} =$$

$$= \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{P\left(\xi_t = x', \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right)}{P\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right)} = q_t^{\bar{x}}(x')$$

где $t \in \mathbb{Z}^d$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$, $k = \overline{1, n}$. □

1.3. Условия мартингальности случайных полей с кусочно–постоянными по каждой из компонент конечномерными распределениями

Приведем условия, при которых случайное поле из класса $\mathscr{P}$ является мартингал–разностным случайным полем.

Теорема 1.2. *Пусть* (ξ_t) *— случайное поле, конечномерные распределения которого кусочно–постоянны по каждой из переменных при разбиении* $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *фазового пространства* X*. Если разбиение* Π *таково, что*

$$\sum_{x \in X_k} x = 0 \qquad \textit{для всех } k = \overline{1,n},$$

то (ξ_t) *является мартингал–разностным случайным полем.*

Доказательство. Действительно, в силу Леммы 1.1 для всех $t \in \mathbb{Z}^d$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$ и $k = \overline{1,n}$ имеем

$$q_t^{\bar{x}}(x) = q_{t,k}^{\bar{x}} \qquad \text{при } x \in X_k.$$

Тогда для каждого фиксированного $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$

$$M\left(\xi_t / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = \sum_{x \in X} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{x \in X_k} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{k=1}^{n} q_{t,k}^{\bar{x}} \sum_{x \in X_k} x = 0.$$

Отсюда для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\left(\xi_t / \Im_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}\right) = 0,$$

и, следовательно, (ξ_t) является мартингал–разностным случайным полем.

□

Как следствие Теоремы 1.2, можно сформулировать следующее условие мартингальности марковских случайных полей.

Теорема 1.3. *Пусть* (ξ_t) *— марковское случайное поле с фазовым пространством* X*, для которого существует разбиение* $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$*, такое, что при* $x, x' \in X_k$

$$P(\xi_t = x) = P(\xi_t = x')$$

и

$$P(\xi_t = x / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t) = P(\xi_t = x' / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t)$$

для всех $k = \overline{1,n}$*,* $\bar{x} \in X^{\partial t}$ *и* $t \in \mathbb{Z}^d$*. Если разбиение* Π *таково, что*

$$\sum_{x \in X_k} x = 0 \qquad \textit{для всех } k = \overline{1,n},$$

то марковское случайное поле (ξ_t) *является мартингал–разностным.*

В работе [36] были получены условия, при которых гиббсовское случайное поле является мартингал–разностным.

Теорема 1.4. *Пусть гиббсовское случайное поле* (ξ_t) *с фазовым пространством* X *задается четным потенциалом* Φ. *Если множество* X *симметрично относительно нуля, то гиббсовское случайное поле* (ξ_t) *является мартингал–разностным.*

Приведенный в настоящей главе подход к построению мартингал–разностных случайных полей позволяет получить следующее обобщение Теоремы 1.4.

Теорема 1.5. *Пусть гиббсовское случайное поле* (ξ_t) *с фазовым пространством* X *задается потенциалом* Φ, *который принимает постоянные значения на элементах некоторого разбиения* $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *множества* X, *т.е. для всех* $V \in W$, $t \notin V$

$$\Phi_{V\cup\{t\}}\left(x_t x_V\right) = \Phi_{V,k}\left(x_V\right), \qquad x_t \in X_k, k = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Если разбиение Π *таково, что*

$$\sum_{x\in X_k} x = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{1.5}$$

то гиббсовское случайное поле (ξ_t) *является мартингал–разностным.*

Глава 2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

2.1. Асимптотическая нормальность и принцип инвариантности

Вопросы, относящиеся к предельным теоремам для сумм случайных величин, образующих мартингал, составляют одну из важнейших глав теории одномерных мартингалов (см. [21], где в достаточной полноте представлены основные результаты и история этого вопроса). Введенное в [36] понятие мартингал–разностного случайного поля позволило распространить известные факты (ЦПТ, ЛПТ, принцип инвариантности и др.) теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин на достаточно широкие классы многомерных мартингалов ([25, 33, 36–38]).

Приводимый ниже аналог теоремы Биллингсли–Ибрагимова, доказанный в работе [33], является одним из основных результатов для мартингал–разностных случайных полей.

Теорема 2.1. *Пусть* (ξ_t) *— однородное эргодическое мартингал-разностное случайное поле, такое, что* $0 < M\xi_0^2 < \infty$. *Тогда для этого поля справедлива ЦПТ.*

Используемое в Теореме 2.1 условие эргодичности является наименее обязывающим из условий слабой зависимости компонент случайного поля. Теория предельных теорем для случайных полей со слабо зависимыми компонентами представляет собой весьма содержательную область исследований, интенсивно развивающуюся и в настоящее время. В этой теории, помимо стандартных условий на моменты, обычно накладываются условия и на скорость убывания коэффициента перемешивания. Однако, согласно Теореме 2.1, при наличии мартингального свойства требования на скорость убывания корреляции становятся минимальными. Отметим также, что в условиях Теоремы 2.1 имеет место и функциональная предельная теорема (см. [38]).

Настоящая глава посвящена предельным теоремам для мартингал–разностных случайных полей. Для этих полей устанавливается точная асимптотика всех моментов сумм компонент, взятых по возрастающим множествам, что позволяет доказать усиленный вариант центральной предельной теоремы, включающий сходимость моментов. Приводятся также условия, при которых имеет место степенная скорость сходимости в ЦПТ. Это, в свою очередь, позволяет доказать закон повторного логарифма для мартингал–разностных случайных полей.

2.2. Точная асимптотика моментов сумм компонент

Во многих вопросах теории вероятностей моменты случайных величин и их оценки играют ключевую роль. В частности, на них основан один из самых продуктивных методов доказательства предельных теорем — метод моментов. Посредством данного метода можно не только доказывать различные предельные теоремы, но и получать их уточнения (скорость сходимости), вплоть до асимптотических разложений. Следует отметить, однако, что до настоящего времени, поведение моментов сумм компонент мартингал–разностных случайных полей не являлось предметом рассмотрения. В этом параграфе мы устанавливаем точную асимптотику для всех моментов сумм компонент мартингал–разностного случайного поля, взятых по возрастающим подмножествам.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть (ξ_t) — однородное мартингал-разностное случайное поле с фазовым пространством X. Тогда для всех $k = 1, 2, ...$*

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k-1} = C_{2k-1} \cdot \left|V_n\right|^{k-1},$$

где постоянная C_{2k-1} не зависит от n.

Если, к тому же, случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что

$$\boldsymbol{\varphi}_I\left(j\right) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(j\right) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(j\right) < \infty,$$

то для всех $k = 1, 2, ...$

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k} \left|V_n\right|^{k} + C_{2k} \left|V_n\right|^{k-1},$$

где $\sigma^2 = M\xi_0^2$, а постоянная C_{2k} не зависит от n.

Для доказательства второго утверждения Теоремы 2.2, нам потребуется следующий результат, представляющий и самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *Пусть (ξ_t) — случайное поле с конечным фазовым пространством X, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что $\boldsymbol{\varphi}_I\left(\rho\right) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\rho\right)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $k = 1, 2, ...$ и целых $0 \leq m_1, m_2, ..., m_k < \infty$*

$$\sum_{\substack{t_1, t_2, ..., t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq ... \neq t_k}} \left| M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_k}^{m_k} - M\xi_{t_1}^{m_1}M\xi_{t_2}^{m_2} \cdot ... \cdot M\xi_{t_k}^{m_k} \right| \leq C \left|V_n\right|^{k-1} \sum_{j=1}^{n} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}\left(j\right),$$

где положительное число C не зависит от n.

Доказательство. Для упрощения обозначений всюду далее запись типа $t_1 \neq t_2 \neq ... \neq t_k$ при обозначении границ суммирования будем опускать, при этом каждый раз полагаем, что суммирование ведется по различным точкам из V_n, т.е. будем писать $\sum\limits'_{t_1,...,t_k \in V_n}$ вместо $\sum\limits_{\substack{t_1,...,t_k \in V_n \\ t_1 \neq t_2 \neq ... \neq t_k}}$.

Пусть $0 \leq m_1, m_2, ..., m_k < \infty$ — произвольные целые числа. Для всех $t_1, t_2, ..., t_k \in V_n$ можем написать

$$M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_k}^{m_k} - M\xi_{t_1}^{m_1}M\xi_{t_2}^{m_2}\cdot ... \cdot M\xi_{t_k}^{m_k} =$$

$$= \left(M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_k}^{m_k} - M\xi_{t_k}^{m_k}M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}}\right) +$$

$$+M\xi_{t_k}^{m_k}\left(M\xi_{t_1}^{m_1}...\xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}} - M\xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}}M\xi_{t_1}^{m_1}...\xi_{t_{k-2}}^{m_{k-2}}\right) +$$

$$+M\xi_{t_k}^{m_k}M\xi_{t_{k-1}}^{m_{k-1}}\left(M\xi_{t_1}^{m_1}...\xi_{t_{k-2}}^{m_{k-2}} - M\xi_{t_{k-2}}^{m_{k-2}}M\xi_{t_1}^{m_1}...\xi_{t_{k-3}}^{m_{k-3}}\right) + ...+$$

$$+M\xi_{t_k}^{m_k}\cdot ... \cdot M\xi_{t_3}^{m_3}\left(M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2} - M\xi_{t_1}^{m_1}M\xi_{t_2}^{m_2}\right) =$$

$$= \sum_{r=2}^{k}\prod_{j=r+1}^{k} M\xi_{t_j}^{m_j}\left(M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right).$$

Поскольку компоненты случайного поля (ξ_t) принимают значения в конечном множестве X, то для любых $t_1, t_2, ..., t_r \in V_n$ найдется число A_r, $0 < A_r < \infty$, такое, что

$$\left|\prod_{j=r+1}^{k} M\xi_{t_j}^{m_j}\right| \leq A_r, \qquad 1 \leq r \leq k.$$

Тогда

$$\sum_{t_1,...,t_k \in V_n}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_k}^{m_k} - M\xi_{t_1}^{m_1}M\xi_{t_2}^{m_2}\cdot ... \cdot M\xi_{t_k}^{m_k}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{t_1,...,t_k \in V_n}{}' \sum_{r=2}^{k}\left|\prod_{j=r+1}^{k} M\xi_{t_j}^{m_j}\right|\cdot\left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=2}^{k} A_r \cdot \sum_{t_1,...,t_r \in V_n}{}' \sum_{t_{r+1},...,t_k \in V_n\setminus\{t_1,...,t_r\}}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right| =$$

$$= \sum_{r=2}^{k} A_r \cdot C_{|V_n|-r}^{k-r} \sum_{t_1,...,t_r \in V_n}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=2}^{k} A_r \cdot \frac{|V_n|^{k-r}}{(k-r)!} \sum_{t_1,...,t_r \in V_n}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right|.$$

Таким образом,

$$\sum_{t_1,\ldots,t_k\in V_n}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_k}^{m_k} - M\xi_{t_1}^{m_1}M\xi_{t_2}^{m_2}\cdot...\cdot M\xi_{t_k}^{m_k}\right| \le$$

$$\le \sum_{r=2}^{k} A_r \cdot \frac{|V_n|^{k-r}}{(k-r)!} \sum_{t_1\in V_n} \sum_{t_2,\ldots,t_r\in V_n\setminus\{t_1\}}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right|. \tag{2.1}$$

Для каждого фиксированного $t_1 \in V_n$ найдем оценку величины

$$\sum_{t_2,\ldots,t_r\in V_n}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right| \tag{2.2}$$

Поскольку случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, то можем написать

$$\left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right| =$$

$$= \Bigg| \sum_{x_1\in X} ... \sum_{x_r\in X} x_1^{m_1}\cdot...\cdot x_r^{m_r} P\left(\xi_{t_1}=x_1,\xi_{t_2}=x_2,...,\xi_{t_r}=x_r\right) -$$

$$- \sum_{x_1\in X} x_1^{m_1} P\left(\xi_{t_1}=x_1\right) \sum_{x_2\in X} ... \sum_{x_r\in X} x_2^{m_2}\cdot...\cdot x_r^{m_r} P\left(\xi_{t_2}=x_2,...,\xi_{t_r}=x_r\right)\Bigg| \le$$

$$\le \sum_{x_1\in X} ... \sum_{x_r\in X} \left|x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdot...\cdot x_r^{m_r}\right| P\left(\xi_{t_2}=x_2,...,\xi_{t_r}=x_r\right)\cdot$$

$$\cdot \left|P\left(\xi_{t_1}=x_1/\xi_{t_2}=x_2,...,\xi_{t_r}=x_r\right) - P\left(\xi_{t_1}=x_1\right)\right| \le$$

$$\le \boldsymbol{\varphi}_{\{t_1\}}\left(\rho\left(\{t_1\},\Lambda_{r-1}\right)\right) \sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X} ... \sum_{x_r\in X} \left|x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdot...\cdot x_r^{m_r}\right| \le$$

$$\le B_r\cdot\boldsymbol{\varphi}\left(\rho\left(\{t_1\},\Lambda_{r-1}\right)\right),$$

где $\Lambda_{r-1} = \{t_2, t_3, ..., t_r\}$ и

$$B_r = \sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X} ... \sum_{x_r\in X} \left|x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdot...\cdot x_r^{m_r}\right| < \infty.$$

Отсюда

$$\sum_{t_2,\ldots,t_r\in V_n}{}' \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1}\cdot M\xi_{t_2}^{m_2}...\xi_{t_r}^{m_r}\right| \le$$

$$\le B_r \sum_{\Lambda_{r-1}\subset V_n\setminus\{t_1\}} \boldsymbol{\varphi}\left(\rho\left(\{t_1\},\Lambda_{r-1}\right)\right).$$

Для всех $t \in V_n$ обозначим

$$V_n^{(j)}(t) = \{s \in V_n : |t - s| = j\}, \qquad j = \overline{1, n},$$

и пусть t_2 — точка из Λ_{r-1}, для которой

$$\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1}) = \rho(\{t_1\}, \{t_2\}).$$

Тогда

$$\sum_{\Lambda_{r-1} \subset V_n \setminus \{t_1\}} \boldsymbol{\varphi}(\rho(\{t_1\}, \Lambda_{r-1})) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t_2 \in V_n^{(j)}(t_1)} \sum_{\Lambda_{r-2} \subset V_n \setminus \{t_1, t_2\}} \boldsymbol{\varphi}(\rho(\{t_1\}, \{t_2\})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{t_2 \in V_n^{(j)}(t_1)} \boldsymbol{\varphi}(j)\, C_{|V_n|-2}^{r-2} \le \frac{|V_n|^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}(j) \left| V_n^{(j)}(t_1) \right|.$$

Поскольку $V_n^{(j)}(t_1)$ содержит все точки $s = \left(s^{(1)}, s^{(2)}, ..., s^{(d)}\right)$ из V_n, для которых

$$\left| t_1^{(i)} - s^{(i)} \right| \le j,$$

причем равенство обязательно достигается хотя бы при одном i, $i = \overline{1, d}$, то

$$\left| V_n^{(j)}(t_1) \right| = \sum_{k=1}^{d} C_d^k 2^k (2j-1)^{d-k} = (2j+1)^d - (2j-1)^d =$$
$$= 2 \sum_{k=1}^{d/2} C_d^{2k-1} (2j)^{2k-1} \le 2^{2d} j^{d-1}.$$

Таким образом, для (3.2) имеем

$$\sum_{t_2, ..., t_r \in V_n}{}' \left| M\xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} ... \xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1} \cdot M\xi_{t_2}^{m_2} ... \xi_{t_r}^{m_r} \right| \le 2^{2d} \cdot B_r \frac{|V_n|^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{j=1}^{n} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j).$$

Подставив данную оценку в (2.1), получаем

$$\sum_{t_1, ..., t_k \in V}{}' \left| M\xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} ... \xi_{t_r}^{m_r} - M\xi_{t_1}^{m_1} \cdot M\xi_{t_2}^{m_2} ... \xi_{t_r}^{m_r} \right| \le$$

$$\le \sum_{r=2}^{k} A_r \cdot \frac{|V_n|^{k-r}}{(k-r)!} \sum_{t_1 \in V_n} 2^{2d} \cdot B_r \frac{|V_n|^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{j=1}^{n} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j) =$$

$$= |V_n|^{k-1} 2^{2d} \sum_{r=2}^{k} \frac{A_r B_r}{(k-r)!\,(r-2)!} \sum_{j=1}^{n} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j) = C\, |V_n|^{k-1} \sum_{j=1}^{n} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j),$$

где $C = 2^{2d} \cdot \sum\limits_{r=2}^{k} \dfrac{A_r B_r}{(k-r)!\,(r-2)!} < \infty.$

$\square$

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство Теоремы 2.2. При $s < |V_n|$ можем написать

$$M\left(S_{V_n}\right)^s = M\left(\sum_{t\in V_n}\xi_t\right)^s =$$

$$= \sum_{\substack{m_1,m_2,\ldots,m_{|V_n|}\geq 0\\ m_1+m_2+\ldots+m_{|V_n|}=s}} \frac{s!}{m_1!m_2!\ldots m_{|V_n|}!} M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_{|V_n|}}^{m_{|V_n|}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum\nolimits'_{t_1,t_2,\ldots,t_j\in V_n}\sum_{\substack{m_1,m_2,\ldots,m_j\geq 1\\ m_1+m_2+\ldots+m_j=s}}\frac{s!}{m_1!m_2!\ldots m_j!}M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j}.$$

Поскольку (ξ_t) — мартингал-разностное случайное поле, то $M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j} = 0$, если хотя бы одно из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_j$ равно 1. Следовательно, достаточно рассматривать суммы по наборам чисел $m_1, m_2, \ldots, m_j$, таким, что $m_i \geq 2$, $i = \overline{1,j}$. Отсюда

$$M\left(S_{V_n}\right)^s =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum\nolimits'_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}\sum_{\substack{m_1,m_2,\ldots,m_j\geq 1\\ m_1+m_2+\ldots+m_j=s}}\frac{s!}{m_1!m_2!\ldots m_j!}M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{[s/2]}\sum\nolimits'_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}\sum_{\{j;s\}}\frac{s!}{m_1!m_2!\ldots m_j!}M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j},$$

где для упрощения записи границы суммирования во внутренней сумме обозначены через $\{j;s\}$ по числу j слагаемых $m_1, m_2, \ldots, m_j$ и значению их суммы $m_1 + m_2 + \ldots + m_j = s$.

Обозначим через $z = \max\limits_{x\in X}|x|$ и

$$\mu_s(j) = \max\left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j}\right|,$$

где максимум берется по всем $t_1, t_2, \ldots t_j \in V_n$ и $m_1, m_2, \ldots m_j \geq 2$, таким, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_j = s$. Оценим $\mu_s = \max\limits_{1\leq j\leq [s/2]}\mu_s(j)$. Для всех $t_1, t_2, \ldots t_j \in V_n$ и $m_1, m_2, \ldots m_j$ имеем

$$\left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j}\right| \leq \sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X}\cdots\sum_{x_j\in X}\left|x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_j^{m_j}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{x_1\in X}\sum_{x_2\in X}\cdots\sum_{x_j\in X} z^{m_1+m_2+\ldots+m_j} = |X|^j z^s.$$

Тогда $\mu_s(j) \le |X|^j z^s$ и

$$\mu_s = \max_{1\le j\le [s/2]} \left(|X|^j z^s\right) = |X|^{[s/2]} z^s.$$

Пусть $s = 2k-1$. Тогда

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k-1\}} \frac{(2k-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!} M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j} = C_{2k-1}\left|V_n\right|^{k-1}, \tag{2.3}$$

где

$$\left|C_{2k-1}\right| \le \frac{1}{\left|V_n\right|^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k-1\}} \frac{(2k-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!} \left|M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j}\right| \le$$

$$\le \frac{\mu_{2k-1}}{\left|V_n\right|^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k-1\}} \frac{(2k-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!} <$$

$$< \frac{|X|^{k-1} z^{2k-1}}{\left|V_n\right|^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \left|V_n\right|^j j^{2k-1} < |X|^{k-1} z^{2k-1} (k-1)^{2k}.$$

Пусть теперь $s = 2k$. Имеем

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k\}} \frac{(2k)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!} M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j} =$$

$$= \sum_{t_1,\ldots,t_k\in V_n}{}' \sum_{\{k;2k\}} \frac{(2k)!}{m_1!m_2!\ldots m_k!} M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_k}^{m_k} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k\}} \frac{(2k)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!} M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j} =$$

$$= \frac{(2k)!}{2^k} \sum_{t_1,\ldots,t_k\in V_n}{}' M\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\ldots\xi_{t_k}^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,\ldots,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k\}} \frac{(2k)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!} M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j}.$$

Далее, с учетом того, что

$$M\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\ldots\xi_{t_k}^2 = M\xi_{t_1}^2 M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2 + \left(M\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\ldots\xi_{t_k}^2 - M\xi_{t_1}^2 M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2\right),$$

можем написать

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k}=\frac{(2k)!}{2^k}\sum_{t_1,\dots,t_k\in V_n}M\xi_{t_1}^2M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2+$$

$$+\frac{(2k)!}{2^k}\sum_{t_1,\dots,t_k\in V_n}{}'\left(M\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\ldots\xi_{t_k}^2-M\xi_{t_1}^2M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2\right)+ \qquad (2.4)$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{t_1,\dots,t_j\in V_n}{}'\sum_{\{j;2k\}}\frac{(2k)!}{m_1!m_2!\ldots m_j!}M\xi_{t_1}^{m_1}\xi_{t_2}^{m_2}\ldots\xi_{t_j}^{m_j}.$$

В полученном для $M\left(S_{V_n}\right)^{2k}$ соотношении (2.4) рассмотрим слагаемые, стоящие справа. В силу однородности случайного поля (ξ_t)

$$M\xi_{t_1}^2M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2=\left(M\xi_0^2\right)^k=\sigma^{2k},$$

и, следовательно, для первого слагаемого в (2.4) можем написать

$$\frac{(2k)!}{2^k}\sum_{t_1,\dots,t_k\in V_n}M\xi_{t_1}^2M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2=\frac{(2k)!}{2^k}C_{|V_n|}^k\sigma^{2k}=$$

$$=\frac{(2k)!}{2^kk!}\sigma^{2k}\left|V_n\right|\left(\left|V_n\right|-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left|V_n\right|-k+1\right)=\frac{(2k)!}{2^kk!}\sigma^{2k}\sum_{j=0}^{k}s\left(k,j\right)\left|V_n\right|^j=$$

$$=\frac{(2k)!}{2^kk!}\sigma^{2k}\left(\left|V_n\right|^k+\sum_{j=0}^{k-1}s\left(k,j\right)\left|V_n\right|^j\right),$$

где $s\left(k,j\right)$ — числа Стирлинга первого рода. Тогда

$$\frac{(2k)!}{2^k}\sum_{t_1,\dots,t_k\in V_n}{}'M\xi_{t_1}^2M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2=\frac{(2k)!}{2^kk!}\sigma^{2k}\left|V_n\right|^k+C_1\left(k\right)\left|V_n\right|^{k-1},$$

причем

$$\left|C_1\left(k\right)\right|=\frac{1}{\left|V_n\right|^{k-1}}\cdot\frac{(2k)!}{2^kk!}\sigma^{2k}\left|\sum_{j=0}^{k-1}s\left(k,j\right)\left|V_n\right|^j\right|<$$

$$<\frac{(2k)!}{2^kk!}\sigma^{2k}\sum_{j=0}^{k}\left|s\left(k,j\right)\right|=\frac{(2k)!}{2^k}\sigma^{2k}.$$

Далее, в силу Леммы 2.1,

$$\frac{(2k)!}{2^k}\sum_{t_1,\dots,t_k\in V_n}{}'\left(M\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\ldots\xi_{t_k}^2-M\xi_{t_1}^2M\xi_{t_2}^2\cdot\ldots\cdot M\xi_{t_k}^2\right)=C_2\left(k\right)\left|V_n\right|^{k-1},$$

где постоянная $C_2(k)$ не зависит от n. Оценим $C_2(k)$. Из доказательства Леммы 2.1 следует, что

$$|C_2(k)| < \frac{(2k)!}{2^k} \cdot 2^{2d} \sum_{r=2}^{k} \frac{A_r B_r}{(k-r)!\,(r-2)!} \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j),$$

где $A_r \geq \left| \prod\limits_{j=r+1}^{k} M\xi_{t_j}^{m_j} \right|$ и $B_r = \sum\limits_{x_1\in X} \sum\limits_{x_2\in X} ... \sum\limits_{x_r\in X} |x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_r^{m_r}|$. Поскольку в данном случае Лемма 2.1 применяется к однородному случайному полю, причем $m_1 = m_2 = ... = m_k = 2$, то можем положить $A_r = \sigma^{2(k-r)}$. Действительно,

$$\left| \prod_{j=r+1}^{k} M\xi_{t_j}^2 \right| = \left(M\xi_0^2\right)^{k-r-1} < \sigma^{2(k-r)}.$$

Далее,

$$B_r = \sum_{x_1\in X} \sum_{x_2\in X} ... \sum_{x_r\in X} \left|x_1^2 x_2^2 \cdot ... \cdot x_r^2\right| \leq \sum_{x_1\in X} \sum_{x_2\in X} ... \sum_{x_r\in X} z^{2r} = |X|^r z^{2r}.$$

Тогда

$$\sum_{r=2}^{k} \frac{A_r B_r}{(k-r)!\,(r-2)!} \leq \sum_{r=2}^{k} \frac{\sigma^{2(k-r)} |X|^r z^{2r}}{(k-r)!\,(r-2)!} <$$

$$< \frac{\sigma^{2k} |X|^k z^{2k}}{(k-2)!} \sum_{r=0}^{k-2} C_{k-2}^r = \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} \sigma^{2k} |X|^k z^{2k}.$$

Отсюда

$$|C_2(k)| \leq \frac{(2k)!}{(k-2)!} \cdot |X|^k z^{2k} \sigma^{2k} \cdot 2^{2d-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j).$$

Наконец, применив рассуждения, аналогичные тем, что использовались при получении оценки (2.3), нетрудно показать, что

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,...,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k\}} \frac{(2k)!}{m_1!m_2!...m_j!} M\xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} ... \xi_{t_j}^{m_j} = C_3(k) |V_n|^{k-1}$$

где

$$|C_3(k)| \leq \frac{1}{|V_n|^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{t_1,...,t_j\in V_n}{}' \sum_{\{j;2k\}} \frac{(2k)!}{m_1!m_2!...m_j!} \left| M\xi_{t_1}^{m_1} \xi_{t_2}^{m_2} ... \xi_{t_j}^{m_j} \right| <$$

$$< \frac{\mu_{2k}}{|V_n|^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} j^{2k} |V_n|^j < |X|^k z^{2k} (k-1)^{2k}.$$

Подставив полученные оценки в (2.4), окончательно получаем

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}\left|V_n\right|^k + C_{2k}\left|V_n\right|^{k-1},$$

где постоянная C_{2k} такова, что

$$\left|C_{2k}\right| = \left|C_1(k) + C_2(k) + C_3(k)\right| \leq$$

$$\leq \frac{(2k)!}{2^k}\sigma^{2k} + |X|^k z^{2k}(k-1)^{2k} + \frac{(2k)!}{(k-2)!}\cdot|X|^k z^{2k}\sigma^{2k}\cdot 2^{2d-2}\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\boldsymbol{\varphi}(j).$$

□

При доказательстве предельных теорем одним из основных требований является правильное поведение дисперсий сумм S_V, $V \in W$ компонент случайного поля, а именно,

$$DS_V = \sigma^2|V|\left(1 + o(1)\right), \qquad 0 < \sigma < \infty.$$

Для однородных мартингал-разностных случайных полей это требование выполняется автоматически, поскольку для таких полей $DS_V = M\xi_0^2 \cdot |V|$.

Полученный в Теореме 2.2 результат позволяет доказать для мартингал–разностных случайных полей следующий усиленный вариант ЦПТ.

Теорема 2.3. *Пусть* (ξ_t) *— однородное мартингал-разностное случайное поле с фазовым пространством* X*, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$*, таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I|\cdot\boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\cdot\boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

и пусть $M\xi_0^2 > 0$*. Тогда для случайного поля* (ξ_t) *справедлива ЦПТ, причем для всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$M\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty$$

где ζ *— стандартно нормально распределенная случайная величина.*

Доказательство. Из Теоремы 2.2 прямо следует, что

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{S_{V_n}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\right)^{2k-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sigma^2\left|V_n\right|\right)^{k-1/2}}M\left(S_{V_n}\right)^{2k-1} = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{S_{V_n}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}\right)^{2k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sigma^2\left|V_n\right|\right)^{k}}M\left(S_{V_n}\right)^{2k} = (2k-1)!!,$$

где $\sigma^2 = M\xi_0^2$, а предельные значения являются моментами стандартного нормального распределения. □

2.3. Оценки скорости сходимости в ЦПТ и закон повторного логарифма

Для мартингал–разностных случайных полей в работе [46] были получены степенные оценки скорости сходимости в ЦПТ в рамках классических мартингальных условий — ограничения на моменты и на скорость сближения условных дисперсий компонент случайного поля с их безусловными дисперсиями. В следующей теореме приводятся степенные оценки скорости сходимости в ЦПТ для однородных мартингал–разностных случайных полей. В доказательстве применяется подход, восходящий к методу малых блоков, предложенному в работе [45]. Он не предполагает близости условных и безусловных дисперсий, но требует наличия слабой зависимости между компонентами случайного поля.

Теорема 2.4. *Пусть (ξ_t) — однородное мартингал-разностное случайное поле с фазовым пространством X, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I|\cdot\boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

и пусть $M\xi_0^2 > 0$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq C\cdot n^{-d/8},$$

где положительная постоянная C не зависит от n.

Доказательство. Опираясь на неравенство Бери-Эссеена (см., например, [52], стр. 317), мы будем оценивать близость функций распределения посредством оценки близости их характеристических функций. В свою очередь, оценка близости характеристических функций будет получена на основе метода, предложенного в работе [45].

Пусть элементы множества V_n пронумерованы некоторым образом: $V_n = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$, $N = n^d$. Для удобства записи обозначим $M\xi_0^2 = \sigma^2$ и $\eta_j = \dfrac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}}$, $j = \overline{1, N}$. Пусть, далее, $f_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\dfrac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} = \sum\limits_{j=1}^{N} \eta_j$. Оценим разность $f_n(t)$ и $e^{-t^2/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| f_n(t) - e^{-t^2/2} \right| &= \left| M \exp\left\{ it \frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} \right\} - e^{-t^2/2} \right| \leq \\ &\leq \left| M \prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} \right| + \left| \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} - e^{-t^2/2} \right|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (2.5). Можем написать

$$\begin{aligned} &\left| M \prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \left| M e^{it\eta_k} \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M e^{it\eta_k} M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \left| M \left(e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right) \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - \right. \\ &\left. - M \left(e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right) M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| + \\ &+ |t| \sum_{k=1}^{N} \left| M\eta_k \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\eta_k M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| + \\ &+ \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{N} \left| M\eta_k^2 \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\eta_k^2 M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| = T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Оценим слагаемые в правой части полученного выражения. Для первого слагаемого можем написать

$$T_1 \le \sum_{k=1}^{N} \left(M \left| e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right| \cdot \left| \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| + \right.$$

$$\left. + M \left| e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right| \cdot M \left| \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| \right| \le$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{N} M \left| e^{it\eta_k} - 1 - it\eta_k - \frac{(it)^2}{2}\eta_k^2 \right|.$$

Обозначим $M\left|\xi_0\right|^3 = \beta_3$. Воспользовавшись неравенством

$$\left| e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} \right| \le \frac{|x|^3}{3!},$$

получаем

$$T_1 \le 2\frac{|t|^3}{3!} \sum_{k=1}^{N} M\left|\eta_k\right|^3 = \frac{|t|^3}{3} N \frac{\beta_3}{\sigma^3 n^{3d/2}} = |t|^3 \frac{\beta_3}{3\sigma^3} \cdot \frac{1}{n^{d/2}}.$$

Покажем, что $T_2 = 0$. Учитывая, что для мартингал–разностных случайных полей $M\xi_0 = 0$, можем написать

$$T_2 = |t| \sum_{k=1}^{N} \left| M\eta_k \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\eta_k M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right| =$$

$$= \frac{|t|}{\sigma\sqrt{|V_n|}} \sum_{k=1}^{N} \left| M\xi_{s_k} \prod_{j=k+1}^{N} \exp\left(it\frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}} \right) \right|.$$

Далее, в силу свойства (1.2) мартингал–разностных случайных полей, $M\left(\xi_{s_k}/\xi_{s_j}, j=\overline{k+1,N}\right) = 0$ вне зависимости от способа нумерации элементов V_n, и, следовательно,

$$M\xi_{s_k} \prod_{j=k+1}^{N} \exp\left(it\frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}} \right) =$$

$$= M\left(\left(\prod_{j=k+1}^{N} \exp\left(it\frac{\xi_{s_j}}{\sigma\sqrt{|V_n|}} \right) \right) \cdot M\left(\xi_{s_k}/\xi_{s_j}, j=\overline{k+1,N}\right) \right) = 0.$$

Рассмотрим T_3. Имеем

$$T_3 = \frac{t^2}{2\sigma^2 |V_n|} \sum_{k=1}^{N} \left| M\xi_{s_k}^2 \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\xi_{s_k}^2 M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} \right|.$$

Воспользовавшись соотношением

$$M\xi_{s_k}^2 \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\xi_{s_k}^2 M \prod_{j=k+1}^{N} e^{it\eta_j} =$$

$$= \sum_{m=k+1}^{N-1} \left(M\xi_{s_k}^2 \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+1}^{N} e^{it\eta_j} - M\xi_{s_k}^2 M \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+1}^{N} e^{it\eta_j} \right),$$

получаем

$$T_3 \le$$
$$\le \frac{t^2}{2\sigma^2 |V_n|} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=k+1}^{N-1} \left| M\xi_{s_k}^2 \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} - M\xi_{s_k}^2 M \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} \right|.$$

Обозначим через $z = \max_{x \in X} |x|$. Поскольку $\xi_{s_k}^2 < z^2$ и

$$\left| \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} \right| \le \left| e^{it\eta_m} - 1 \right| \le |t| \frac{|\xi_{s_m}|}{\sigma \sqrt{|V_n|}} \le |t| \frac{z}{\sigma n^{d/2}},$$

то, в силу Утверждения 0.1,

$$\left| M\xi_{s_k}^2 \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} - M\xi_{s_k}^2 M \left(e^{it\eta_m} - 1\right) \prod_{j=m+2}^{N} e^{it\eta_j} \right| \le$$

$$\le 2|t| \frac{z^3}{\sigma n^{d/2}} \boldsymbol{\varphi}_{\{s_k\}} \left(\rho\left(\{s_k\}, \{s_m\}\right)\right) \le 2|t| \frac{z^3}{\sigma n^{d/2}} \boldsymbol{\varphi}\left(|s_k - s_m|\right).$$

Следовательно,

$$T_3 \le |t|^3 \frac{z^3}{\sigma^3} \cdot \frac{1}{n^{3d/2}} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=k+1}^{N-1} \boldsymbol{\varphi}\left(|s_k - s_m|\right).$$

Обозначим

$$V_n^{(j)}(s) = \{r \in V_n : |s - r| = j\}, \qquad j = 1, 2, ..., 2n+1.$$

При доказательстве Леммы 2.1 было показано, что $\left|V_n^{(j)}(s)\right| < 2^{2d} j^{d-1}$. Следовательно,

$$\sum_{m=k+1}^{N-1} \boldsymbol{\varphi}\left(|s_k - s_m|\right) < \sum_{j=1}^{2n+1} \sum_{r \in V_n^{(j)}(k)} \boldsymbol{\varphi}\left(|s_k - r|\right) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left|V_n^{(j)}(s_k)\right| \boldsymbol{\varphi}(j) <$$

$$< 2^{2d} \sum_{j=1}^{2n+1} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j) < 2^{2d} \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j).$$

Окончательно получаем

$$T_3 < |t|^3 \frac{1}{n^{d/2}} \cdot \frac{2^{2d} z^3}{\sigma^3} \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j).$$

Таким образом, для первого слагаемого в (2.5) получили следующую оценку

$$\left| M \prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} \right| < C_1 |t|^3 \cdot \frac{1}{n^{d/2}},$$

где $C_1 = \dfrac{\beta_3}{3\sigma^3} + \dfrac{2^{2d} z^3}{\sigma^3} \sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j)$.

Рассмотрим второе слагаемое в (2.5). Из теоремы Бери-Эссеена (см., например, [49, 52]) следует, что

$$\left| \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} - e^{-t^2/2} \right| \le C_0 \frac{M |\eta_j|^3}{\sqrt{N}} |t|^3 e^{-t^2/4}, \qquad \text{при } |t| < \frac{\sqrt{N}}{5M |\eta_j|^3},$$

где C_0 — абсолютная константа. Поскольку $M |\eta_j|^3 = \dfrac{\beta_3}{\sigma^3 |V_n|^{3/2}}$, то при $|t| < \dfrac{\sigma^3}{5\beta_3} n^{2d}$ имеем

$$\left| \prod_{j=1}^{N} M e^{it\eta_j} - e^{-t^2/2} \right| \le C_0 \frac{\beta_3}{\sigma^3 n^{2d}} |t|^3 e^{-t^2/4} = C_2 \frac{1}{n^{2d}} |t|^3 e^{-t^2/4}$$

где $C_2 = \dfrac{C_0 \beta_3}{\sigma^3}$.

Перейдем к оценке разности функций распределения

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_{V_n}}{\sigma \sqrt{|V_n|}} < x \right) - \Phi(x) \right|.$$

Согласно неравенству Бери-Эссеена,

$$\Delta_n \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \left|\frac{f_n(t)-e^{-t^2/2}}{t}\right| dt + \frac{24}{\pi T}\cdot \max_{x\in\mathbb{R}} |\Phi'(x)| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \frac{1}{|t|}\left| M\prod_{j=1}^{N} e^{it\eta_j} - \prod_{j=1}^{N} Me^{it\eta_j}\right| dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \frac{1}{|t|}\left|\prod_{j=1}^{N} Me^{it\eta_j} - e^{-t^2/2}\right| dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{T}.$$

Следовательно,

$$\Delta_n < \frac{2C_1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^{d/2}}\int\limits_0^T t^2 dt + \frac{2C_2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^{2d}}\int\limits_0^\infty t^2 e^{-t^2/4} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{T} <$$

$$< \frac{2C_1}{3\pi}\cdot\frac{T^3}{n^{d/2}} + \frac{4C_2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n^{2d}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{T}.$$

Положив $T = n^{d/8}$, окончательно получаем

$$\Delta_n < \left(\frac{2C_1}{3\pi} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\right)\cdot\frac{1}{n^{d/8}} + \frac{4C_2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n^{2d}} < Cn^{-d/8}.$$

$\square$

В работе [32] для случайных полей, удовлетворяющих условию равномерного сильного перемешивания, получены оценки скорости сходимости в ЦПТ порядка $\dfrac{C}{\ln^{1+p} n}$, $p > 0$, при более сильных условиях на коэффициент перемешивания, а именно, при условии сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\cdot \boldsymbol{\varphi}^{1/2}(j)$ (см. Теорему 7.3.2 в указанной работе). Полученные логарифмические оценки скорости оказались достаточными для доказательства закона повторного логарифма для случайных полей с перемешиванием (Теорема 7.4.3 в [32]). Поскольку для мартингал–разностных случайных полей, удовлетворяющих условию равномерного сильного перемешивания, удалось получить степенные оценки скорости сходимости, то можно сформулировать следующее утверждение, являющееся следствием Теоремы 2.4 и Теоремы 7.4.3 работы [32].

Теорема 2.5. *Пусть (ξ_t) — однородное мартингал-разностное случайное поле с конечным фазовым пространством X, удовлетворяющее условию* *равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

и пусть $M\xi_0^2 > 0$. *Тогда для случайного поля* (ξ_t) *справедлив закон повторного логарифма.*

Глава 3. АССОЦИИРОВАННЫЕ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

В настоящей главе приводится способ, позволяющий посредством рандомизации каждому заданному случайному полю сопоставить некоторое (ассоциированное) случайное поле, которое при определенных условиях на фазовое пространство будет мартингал–разностным. Устанавливается также формула связи между конечномерными распределениями ассоциированного и заданного случайных полей. Показывается, что ассоциированные случайные поля наследуют многие свойства заданного поля, такие как однородность, эргодичность, слабую зависимость, гиббсовость.

Ассоциированные мартингал–разностные случайные поля могут быть использованы и для изучения свойств заданного случайного поля, в том числе, при доказательстве предельных теорем. Дело в том, что установленное соотношение между ассоциированным и заданным случайными полями, позволяет получить формулу связи для распределений конечных сумм компонент ассоциированного и заданного случайных полей. Эта формула в некоторых важных случаях может быть обращена, что открывает возможность изучения заданного случайного поля, основываясь на полезных свойствах мартингалов.

3.1. Рандомизация

Прежде всего, приведем понятие рандомизации.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ — конечные множества и $V \in W$. Пусть $\varphi_V : Y^V \to X^V$ — некоторое сюрьективное отображение и $\varphi_V^{-1}(x)$ — прообраз $x \in X^V$ при отображении φ_V.

Обозначим через $R_V^{\varphi} = \left\{ R_V^{\varphi,x}, x \in X^V \right\}$ — совокупность распределений вероятностей на Y^V, таких, что для каждого $x \in X^V$

$$R_V^{\varphi,x}(y) > 0, \quad y \in \varphi_V^{-1}(x) \qquad \text{и} \qquad R_V^{\varphi,x}(y) = 0, \quad y \notin \varphi_V^{-1}(x).$$

Такую совокупность R_V^{φ} распределений вероятностей будем называть рандомизацией на Y^V. В дальнейшем для R_V^{φ} и $R_V^{\varphi,x}$ также будут использоваться обозначения R_V и R_V^x соответственно.

Пусть $\hat{P}_V$ — некоторое распределение вероятностей на Y^V. Нетрудно проверить, что функция

$$P_V(x) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y), \qquad x \in X^V, \tag{3.1}$$

является распределением вероятностей на X^V. Рассмотрим обратную задачу — нахождение такого распределения вероятностей $\hat{P}_V$ на Y^V, которое при заданных распределении вероятностей P_V на X^V и отображении φ_V удовлетворяет соотношению (3.1). Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть P_V — некоторое распределение вероятностей на X^V и R_V^{φ} — некоторая рандомизация на Y^V. Тогда функция*

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{x \in X^V} R_V^{\varphi,x}(y)\, P_V(x), \qquad y \in Y^V, \tag{3.2}$$

является распределением вероятностей на Y^V, удовлетворяющим при каждом $x \in X^V$ соотношению (3.1).

Обратно, если некоторая функция $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$ при каждом $x \in X^V$ удовлетворяет соотношению (3.1), тогда существует рандомизация R_V^{φ} на Y^V, такая, что

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{x \in X^V} R_V^{\varphi,x}(y)\, P_V(x), \qquad y \in Y^V,$$

причем

$$R_V^{\varphi,x}(y) = \begin{cases} \dfrac{\hat{P}_V(y)}{\sum\limits_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)}, & y \in \varphi_V^{-1}(x), \\ \\ 0, & y \notin \varphi_V^{-1}(x). \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что функция $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$, определяемая соотношением (3.2), есть распределение вероятностей. Действительно, $\hat{P}_V(y) \geq 0$, $y \in Y^V$ и

$$\sum_{y \in Y^V} \hat{P}_V(y) = \sum_{y \in Y^V} \sum_{z \in X^V} R_V^{\varphi,z}(y)\, P_V(z) = \sum_{z \in X^V} P_V(z) \sum_{y \in Y^V} R_V^{\varphi,z}(y) =$$

$$= \sum_{z \in X^V} P_V(z) = 1.$$

Покажем, что $\hat{P}_V(y)$ удовлетворяет (3.1). Для каждого $x \in X^V$ имеем

$$\sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \sum_{z \in X^V} R_V^{\varphi,z}(y) P_V(z) = \sum_{z \in X^V} P_V(z) \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} R_V^{\varphi,z}(y) =$$

$$= P_V(x) \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} R_V^{\varphi,x}(y) = P_V(x).$$

Пусть теперь $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$ — некоторая функция, удовлетворяющая соотношению (3.1). Тогда для $x \in X^V$ можем написать

$$\hat{P}_V(y) = P_V(x) \cdot \frac{\hat{P}_V(y)}{P_V(x)} = P_V(x) \cdot \frac{\hat{P}_V(y)}{\sum\limits_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)}.$$

Далее, положим

$$R_V^{\varphi,x}(y) = \begin{cases} \dfrac{\hat{P}_V(y)}{\sum\limits_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)}, & y \in \varphi_V^{-1}(x), \\ 0, & y \notin \varphi_V^{-1}(x). \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{P}_V(y) = P_V(x) R_V^{\varphi,x}(y) = \sum_{x \in X^V} P_V(x) R_V^{\varphi,x}(y), \qquad y \in Y^V.$$

□

В дальнейшем будем использовать отображение $\varphi_S : Y^S \to X^S$ специального вида, которое при заданном отображении $\varphi : Y \to X$ определяется следующим образом

$$\varphi_S(y) = \varphi_S((y_t, t \in S)) = (\varphi(y_t), t \in S),$$

$y \in Y^S$, $S \subset \mathbb{Z}^d$.

Имеет место следующее свойство рандомизаций.

Лемма 3.2. *Пусть для всех $t \in V$ задана рандомизация $R_t = \{R_t^x, x \in X\}$ на $Y^{\{t\}}$ и пусть*

$$R_V^x(y) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t), \tag{3.3}$$

$y \in Y^V$, $x \in X^V$. Тогда совокупность $R_V = \left\{R_V^x, x \in X^V\right\}$ является рандомизацией на Y^V.

Доказательство. Действительно, для всех $x \in X^V$ имеем $R_V^x(y) \geq 0$, $y \in Y^V$ и

$$\sum_{y \in Y^V} R_V^x(y) = \sum_{y \in Y^V} \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) =$$

$$= \sum_{y_1 \in Y} R_1^{x_1}(y_1) \sum_{y_2 \in Y} R_2^{x_2}(y_2) ... \sum_{y_{|V|} \in Y} R_{|V|}^{x_{|V|}}\left(y_{|V|}\right) = 1.$$

Далее, поскольку для всех $x_t \in X$ и $t \in \mathbb{Z}^d$, $R_t^{x_t}(y_t) > 0$ при $y_t \in \varphi^{-1}(x_t)$ и $R_t^{x_t}(y_t) = 0$ при $y_t \notin \varphi^{-1}(x_t)$, то для всех $x \in X^V$, $\prod\limits_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) > 0$ при $y \in \varphi_V^{-1}(x)$ и $\prod\limits_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) = 0$ при $y \notin \varphi_V^{-1}(x)$.

$\square$

Рандомизацию $R_t = \{R_t^x, x \in X\}$ на $Y^{\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$ будем называть равномерной, если для всех $x \in X$

$$R_t^x(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\varphi^{-1}(x)|}, & y \in \varphi^{-1}(x), \\ \\ 0, & y \notin \varphi^{-1}(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Совокупность $R = \left\{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ рандомизаций R_t на $Y^{\{t\}}$ будем называть однородной, если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$R_t^x(y) = R^x(y), \qquad x \in X, y \in Y.$$

3.2. Ассоциированные случайные поля

Следующая теорема является основной в предлагаемом методе рандомизации случайных полей.

Теорема 3.1. *Пусть задано случайное поле (ξ_t) с фазовым пространством X, множество Y, отображение $\varphi : Y \to X$ и совокупность рандомизаций $R = \left\{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$. Тогда существует случайное поле (η_t) с фазовым пространством Y, такое, что для всех $t \in \mathbb{Z}^d$*

$$\xi_t = \varphi(\eta_t).$$

Конечномерные распределения вероятностей случайного поля (η_t) имеют вид

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{\varphi(y_t)}(y_t) \cdot P(\xi_t = \varphi(y_t), t \in V), \qquad y \in Y^V,$$

или, что эквивалентно,

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V), \qquad y_t \in \varphi^{-1}(x_t),$$

$x_t \in X$, $t \in V$, $V \in W$.

Доказательство. Пусть $\{P_V, V \in W\}$ — совокупность конечномерных распределений вероятностей случайного поля (ξ_t). Для всех $V \in W$ обозначим

$$R_V^x(y) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t),$$

$y \in Y^V$, $x \in X^V$. В соответствии с Леммой 3.2, совокупность $R_V = \left\{R_V^x, x \in X^V\right\}$ является рандомизацией на Y^V. Для каждого $V \in W$ определим функцию

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{x \in X^V} R_V^x(y)\, P_V(x), \qquad y \in Y^V,$$

которая, в силу Леммы 3.1, является распределением вероятностей на Y^V. Покажем, что совокупность конечномерных распределений вероятностей $\left\{\hat{P}_V, V \in W\right\}$ согласована по Колмогорову. С учетом согласованности $\{P_V, V \in W\}$, можем написать

$$\sum_{w \in Y^{V \setminus I}} \hat{P}_V(yw) = \sum_{w \in Y^{V \setminus I}} \sum_{x \in X^I, u \in X^{V \setminus I}} R_V^{xu}(yw)\, P_V(xu) =$$

$$= \sum_{x \in X^I} \sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) \sum_{w \in Y^{V \setminus I}} \prod_{t \in I} R_t^{x_t}(y_t) \cdot \prod_{t \in V \setminus I} R_t^{u_t}(w_t) =$$

$$= \sum_{x \in X^I} R_I^x(y) \sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) \sum_{w \in Y^{V \setminus I}} R_{V \setminus I}^u(w) = \sum_{x \in X^I} R_I^x(y)\, P_I(x) = \hat{P}_I(y).$$

Следовательно, в силу теоремы Колмогорова, существует случайное поле (η_t), для которого $\left\{\hat{P}_V, V \in W\right\}$ является совокупностью конечномерных распределений вероятностей, причем для всех $x \in X^V$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \hat{P}_V(y) = \sum_{x \in X^V} R_V^x(y)\, P_V(x) =$$

$$= \sum_{x \in X^V} R_V^x(y)\, P(\xi_t = x_t, t \in V),$$

где $y \in Y^V$. Тогда для $y \in \varphi_V^{-1}(x)$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = R_V^x(y)\, P(\xi_t = x_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V).$$

Далее, в силу Леммы 3.1, для всех $V \in W$ можем написать

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} P(\eta_t = y_t, t \in V), \qquad x \in X^V.$$

С другой стороны,

$$\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} P\left(\eta_t = y_t, t\in V\right) = P\left(\eta_t \in \varphi^{-1}\left(x_t\right), t\in V\right) = P\left(\varphi\left(\eta_t\right) = x_t, t\in V\right),$$

$x \in X^V$. Таким образом, для всех $x\in X^V$

$$P\left(\xi_t = x_t, t\in V\right) = P\left(\varphi\left(\eta_t\right) = x_t, t\in V\right).$$

Поскольку полученное равенство выполняется для всех $V\in W$, то, в силу теоремы Колмогорова, распределения случайных полей (ξ_t) и $(\varphi(\eta_t))$ совпадают. Следовательно, $\xi_t = \varphi(\eta_t)$ для всех $t\in\mathbb{Z}^d$. $\square$

Случайное поле (η_t) назовем *ассоциированным* со случайным полем (ξ_t) (посредством отображения φ и совокупности рандомизаций R).

В следующей теореме приводится формула связи условных одноточечных распределений вероятностей заданного и ассоциированного с ним случайных полей.

Теорема 3.2. *Пусть* $Q_\xi^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}, t\in\mathbb{Z}^d\right\}$ *— одноточечное условное распределение случайного поля* (ξ_t), *и* $\hat{Q}_\eta^{(1)} = \left\{\hat{q}_t^{\bar{y}}, \bar{y}\in Y^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}, t\in\mathbb{Z}^d\right\}$ *— одноточечное условное распределение случайного поля* (η_t), *ассоциированного с полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности рандомизаций* R. *Тогда*

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot q_t^{\bar{x}}\left(\varphi(y)\right), \qquad y\in Y, \tag{3.5}$$

$\bar{y}\in\varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t\in\mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Используя результаты Теоремы 3.1, для всех $y\in Y$ можем написать

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = \lim_{V\uparrow\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}} \frac{P_{V\cup\{t\}}\left(\eta_t = y; \eta_s = \bar{y}_s, s\in V\right)}{P_V\left(\eta_s = \bar{y}_s, s\in V\right)} =$$

$$= \lim_{V\uparrow\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}} \frac{R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot\prod\limits_{s\in V} R_s^{\varphi(\bar{y}_s)}(\bar{y}_s)\cdot P_{V\cup\{t\}}\left(\xi_t = \varphi(y), \xi_s = \bar{x}_s, s\in V\right)}{\prod\limits_{s\in V} R_s^{\varphi(\bar{y}_s)}(\bar{y}_s)\cdot P_V\left(\xi_s = \bar{x}_s, s\in V\right)} =$$

$$= R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot q_t^{\bar{x}}\left(\varphi(y)\right),$$

$\bar{y}\in\varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t\in\mathbb{Z}^d$. $\square$

Заметим, что случайное поле (η_t), ассоциированное со случайным полем (ξ_t), не обязательно единственно. Действительно, для построения ассоциированного случайного поля необходимо задать множество Y, сюръективное отображение $\varphi : Y \to X$ и совокупность рандомизаций $R = \left\{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$, выбор которых произволен. Кроме того, при построении ассоциированных случайных полей вместо одного отображения φ можно рассматривать совокупность отображений $\left\{\varphi_t : X \to Y, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$. Тогда класс случайных полей, ассоциированных с заданным случайным полем, будет существенно шире.

3.3. Свойства ассоциированных случайных полей

Ассоциированные случайные поля наследуют определенные свойства заданного случайного поля. Прежде всего, приведем условия, при которых ассоциированное случайное поле будет однородным и эргодическим.

Теорема 3.3. *Пусть (ξ_t) — однородное эргодическое случайное поле и (η_t) — случайное поле, ассоциированное с (ξ_t) посредством однородной совокупности рандомизаций R. Тогда ассоциированное случайное поле (η_t) является однородным эргодическим случайным полем.*

Доказательство. Покажем, что (η_t) является однородным случайным полем. Используя результаты Теоремы 3.1 и однородность совокупности рандомизаций R, для всех $V \subset \mathbb{Z}^d$ и $a \in \mathbb{Z}^d$ получаем

$$P\left(\eta_t = y_t, t \in V\right) = \prod_{t \in V} R^{x_t}\left(y_t\right) \cdot P\left(\xi_t = x_t, t \in V\right) =$$

$$= \prod_{t \in V} R^{x_t}\left(y_t\right) \cdot P\left(\xi_{t+a} = x_t, t \in V\right) = P\left(\eta_{t+a} = x_t, t \in V\right),$$

где $x \in X^V$, $y \in Y^V$. Далее, с учетом эргодичности случайного поля (ξ_t), для всех $V, \Lambda \in W$ и $y \in Y^V$, $w \in Y^\Lambda$ можем написать

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{a \in V_n} P\left(\{\eta_t = y_t, t \in V\} \cap \{\eta_{s+a} = w_s, s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= \prod_{t \in V} R^{\varphi(y_t)}\left(y_t\right) \cdot \prod_{s \in \Lambda} R^{\varphi(w_s)}\left(y_s\right) \cdot$$
$$\cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{a \in V_n} P\left(\{\xi_t = \varphi\left(y_t\right), t \in V\} \cap \{\xi_{s+a} = \varphi\left(w_s\right), s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= \prod_{t \in V} R^{\varphi(y_t)}\left(y_t\right) P\left(\xi_t = \varphi\left(y_t\right), t \in V\right) \cdot \prod_{s \in \Lambda} R^{\varphi(w_s)}\left(y_s\right) \cdot P\left(\xi_s = \varphi\left(w_s\right), s \in \Lambda\right) =$$

$$= P\left(\eta_t = y_t, t \in V\right) \cdot P\left(\eta_s = w_s, s \in \Lambda\right).$$

□

В следующей теореме устанавливаются свойства случайных полей, ассоциированных с однородными случайными полями, удовлетворяющими условию равномерного сильного перемешивания.

Теорема 3.4. *Пусть случайное поле (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$. Тогда случайное поле (η_t), ассоциированное с (ξ_t), также удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_I$, таким, что $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_I \leq \boldsymbol{\varphi}_I$ для всех $I \in W$.*

Доказательство. Для случайного поля (ξ_t) и всех $I, \Lambda \in W$ имеем

$$\left|P\left(\xi_t = x_t, t \in I / \xi_s = x_s, s \in \Lambda\right) - P\left(\xi_t = x_t, t \in I\right)\right| \leq \boldsymbol{\varphi}_I\left(\rho\left(I, \Lambda\right)\right).$$

Далее, с использованием результатов Теоремы 3.1, можем написать

$$\left|P\left(\eta_t = y_t, t \in I / \eta_s = y_s, s \in \Lambda\right) - P\left(\eta_t = y_t, t \in I\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{P\left(\eta_t = y_t, t \in I, \eta_s = y_s, s \in \Lambda\right)}{P\left(\eta_s = y_s, s \in \Lambda\right)} - P\left(\eta_t = y_t, t \in I\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\prod\limits_{r \in I \cup \Lambda} R_r^{x_r}\left(y_r\right) \cdot P\left(\xi_t = x_t, t \in I, \xi_s = x_s, s \in \Lambda\right)}{\prod\limits_{s \in \Lambda} R_s^{x_s}\left(y_s\right) \cdot P\left(\xi_s = x_s, s \in \Lambda\right)} - \right.$$

$$\left. - \prod_{t \in I} R_t^{x_t}\left(y_t\right) \cdot P\left(\xi_t = x_t, t \in I\right)\right| =$$

$$= \prod_{t \in I} R_t^{x_t}\left(y_t\right) \cdot \left|P\left(\xi_t = x_t, t \in I / \xi_s = x_s, s \in \Lambda\right) - P\left(\xi_t = x_t, t \in I\right)\right| \leq$$

$$\leq \prod_{t \in I} R_t^{x_t}\left(y_t\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_I\left(\rho\left(I, \Lambda\right)\right) \leq \boldsymbol{\varphi}_I\left(\rho\left(I, \Lambda\right)\right)$$

причем данное соотношение выполняется равномерно по всем событиям вида $\{\eta_t = y_t, t \in I\}$ и $\{\eta_s = y_s, s \in \Lambda\}$ таким, что $P\left(\eta_s = y_s, s \in \Lambda\right) > 0$, $I, \Lambda \in W$. Функцию $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_I\left(\rho\right)$ можно выбрать равной $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_I\left(\rho\right) = \prod\limits_{t \in I} R_t^{x_t}\left(y_t\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_I\left(\rho\right)$ для всех $I \in W$ и $\rho \in \mathbb{R}$.

□

С точки зрения применения принципа рандомизации к гиббсовским случайным полям, весьма важен следующий результат.

Теорема 3.5. *Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле. Тогда ассоциированное с ним случайное поле (η_t) также является гиббсовским случайным полем.*

Доказательство. Пусть P — распределение случайного поля (ξ_t), компоненты которого принимают значения в множестве X. Тогда, по определению гиббсовского случайного поля, его канонические одноточечные условные вероятности имеют вид

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{P_{V \cup \{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)}, \tag{3.6}$$

причем $q_t^{\bar{x}}(x) > 0$, $x \in X$ и сходимость в (3.6) равномерна по $\bar{x}$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое $V_0 \in W$, такое, что

$$\sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V \cup \{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

для всех V, таких, что $V_0 \subset V$.

Пусть компоненты случайного поля (η_t), ассоциированного с (ξ_t) посредством совокупности рандомизаций $R = \left\{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$, принимают значения в множестве Y. Покажем, что (η_t) также является гиббсовским случайным полем. Понятно, что если поле (ξ_t) — положительно, тогда и ассоциированное с ним случайное поле (η_t) также будет положительным. Далее покажем, что пределы

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{\hat{P}_{V \cup \{t\}}(y\bar{y}_V)}{\hat{P}_V(\bar{y}_V)}, \qquad y \in Y, t \in \mathbb{Z}^d,$$

сходятся равномерно по $\bar{y}$, $\bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$. Воспользовавшись результатами Теорем 3.1 и 3.2, можем написать

$$\sup_{\bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| \hat{q}_t^{\bar{y}}(y) - \frac{\hat{P}_{V \cup \{t\}}(y\bar{y}_V)}{\hat{P}_V(\bar{y}_V)} \right| =$$

$$= \sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \sup_{\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}(\bar{x})} \left| R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{R_t^{\varphi(y)}(y)\, R_V^{\varphi(\bar{y}_V)}(\bar{y}_V)\, P_{V \cup \{t\}}(x\bar{x}_V)}{R_V^{\varphi(\bar{y}_V)}(\bar{y}_V)\, P_V(\bar{x}_V)} \right| =$$

$$= R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot \sup_{\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V \cup \{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

где $x = \varphi(y)$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{Z}^d$. □

3.4. Условия мартингальности ассоциированных случайных полей

Приведем условия, при которых ассоциированное случайное поле будет мартингал–разностным.

Теорема 3.6. *Пусть* (ξ_t) *— случайное поле с фазовым пространством* X*,* (η_t) *— случайное поле с фазовым пространством* Y*, ассоциированное с полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности рандомизаций* R*. Если для всех* $x \in X$ *и* $t \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^x(y) = 0, \tag{3.7}$$

тогда случайное поле (η_t) *является мартингал–разностным случайным полем.*

Доказательство. Пусть $Q_\xi^{(1)} = \left\{ q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d \right\}$ — одноточечное условное распределение случайного поля (ξ_t). Поскольку случайное поле (η_t) ассоциировано со случайным полем (ξ_t), то, в силу Теоремы 3.2, его одноточечные условные вероятности имеют вид

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = R_t^x(y)\, q_t^{\bar{x}}(x), \qquad y \in \varphi^{-1}(x), x \in X,$$

$\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Вычислим условное математическое ожидание случайного поля (η_t). Для каждого фиксированного $\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}(\bar{x})$ имеем

$$M\left(\eta_t / \eta_s = \bar{y}_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = \sum_{y \in Y} y \cdot \hat{q}_t^{\bar{y}}(y) =$$
$$= \sum_{x \in X} \sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{\varphi(y)}(y)\, q_t^{\varphi(\bar{y})}(\varphi(y)) = \sum_{x \in X} q_t^{\bar{x}}(x) \sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^x(y) = 0.$$

Следовательно, для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\left(\eta_t / \Im_{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}\right) = 0.$$

□

Рассмотрим случай построения ассоциированного случайного поля посредством совокупности равномерных рандомизаций $R = \left\{ R_t^x, x \in X, t \in \mathbb{Z}^d \right\}$, где

$$R_t^x(y) = \frac{1}{|\varphi^{-1}(x)|} \qquad \text{для всех } y \in \varphi^{-1}(x).$$

Пусть (ξ_t) — случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности равномерных рандомизаций R. В силу Теоремы 3.1, конечномерные распределения случайного поля (η_t) можно представить следующим образом

$$P\left(\eta_t = y, \eta_s = \bar{y}_s, s \in V\right) = \\ = \frac{1}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|} \cdot \frac{1}{\left|\varphi_V^{-1}\left(\varphi\left(\bar{y}_V\right)\right)\right|} P\left(\xi_t = x, \xi_s = \varphi\left(\bar{y}_s\right), s \in V\right)$$

для всех $y \in \varphi^{-1}(x)$, $x \in X$ и $\bar{y} \in Y^V$, $V \in W$. Отсюда для всех $x \in X$ при $y, y' \in \varphi^{-1}(x)$ имеем

$$P\left(\eta_t = y, \eta_s = \bar{y}_s, s \in V\right) = P\left(\eta_t = y', \eta_s = \bar{y}_s, s \in V\right).$$

Следовательно, конечномерные распределения случайного поля (η_t), ассоциированного с (ξ_t) посредством совокупности равномерных рандомизаций R и отображения φ, являются кусочно–постоянными по каждой из компонент относительно разбиения множества Y, порожденного отображением φ.

Таким образом, для ассоциированных случайных полей, построенных посредством совокупности равномерных рандомизаций, условия мартингальности можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.7. *Пусть (ξ_t) — случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций. Если отображение φ и множество Y таковы, что*

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y = 0 \qquad \text{для всех } x \in X, \tag{3.8}$$

тогда случайное поле (η_t) является мартингал-разностным случайным полем.

Теперь сформулируем следствие Теорем 3.5 и 3.6, которое демонстрирует применение принципа рандомизации при построении гиббсовских мартингал–разностных случайных полей.

Теорема 3.8. *Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности рандомизаций R. Если для всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{Z}^d$*

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^x(y) = 0,$$

тогда (η_t) является гиббсовским мартингал–разностным случайным полем.

3.5. Предельные теоремы для ассоциированных мартингал–разностных случайных полей

Принцип рандомизации при построении мартингал–разностных случайных полей позволяет расширить класс случайных полей, для которых справедливы центральная и функциональная предельные теоремы, а также их уточнения.

Сформулируем предельные теоремы для ассоциированных мартингал–разностных случайных полей. Их доказательства не составляют труда и поэтому будут опущены. Заметим только, что совокупность равномерных рандомизаций, определяемых по (3.4), удовлетворяет условиям Теоремы 3.3. Поэтому, применяя равномерную рандомизацию к однородным случайным полям, мы будем всегда получать однородные ассоциированные случайные поля. Поскольку требование однородности существенно при доказательстве перечисленных предельных теорем, то все теоремы формулируются для случайных полей, ассоциированных с заданным однородным случайным полем посредством совокупности равномерных рандомизаций.

Теорема 3.9. *Пусть (ξ_t) — однородное эргодическое случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций, такое, что $M\eta_0^2 > 0$. Если отображение φ и множество Y удовлетворяют условию (3.8), тогда для (η_t) справедлива ЦПТ.*

Теорема 3.10. *Пусть (ξ_t) — однородное эргодическое случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций, такое, что $M\eta_0^2 > 0$. Если отображение φ и множество Y удовлетворяют условию (3.8), тогда для (η_t) справедлива ФПТ.*

Теорема 3.11. *Пусть (ξ_t) — однородное случайное поле с фазовым пространством X, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty.$$

Пусть, далее, случайное поле (η_t) с фазовым пространством Y, ассоциированное с (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций, таково, что $M\eta_0^2 > 0$. Если отображение φ и множество Y

удовлетворяют условию (3.8), тогда для случайного поля (η_t), *справедлива ЦПТ, причем для всех* $k = 1, 2, ...$

$$M\left(\frac{S_{V_n}^{\eta}}{\sqrt{DS_{V_n}^{\eta}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где $S_{V_n}^{\eta} = \sum\limits_{t \in V_n} \eta_t$, *а* ζ — *стандартно нормально распределенная случайная величина.*

Теорема 3.12. *Пусть* (ξ_t) — *однородное случайное поле с фазовым пространством* X, *удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty.$$

Пусть, далее, случайное поле (η_t) *с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R *равномерных рандомизаций, таково, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если отображение* φ *и множество* Y *удовлетворяют условию (3.8), тогда*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_{V_n}^{\eta}}{\sqrt{DS_{V_n}^{\eta}}} < x\right) - \Phi(x) \right| \le C \cdot n^{-d/8},$$

где $S_{V_n}^{\eta} = \sum\limits_{t \in V_n} \eta_t$, *а положительная постоянная* C *не зависит от* n.

Теорема 3.13. *Пусть* (ξ_t) — *однородное случайное поле с фазовым пространством* X, *удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty.$$

Пусть, далее, случайное поле (η_t) *с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R *равномерных рандомизаций, таково, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если отображение* φ *и множество* Y *удовлетворяют условию (3.8), тогда для случайного поля* (η_t) *справедлив закон повторного логарифма.*

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЯ К ГИББСОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЯМ

4.1. Предельные теоремы для гиббсовских мартингал–разностных случайных полей

Предельным теоремам для гиббсовских случайных полей посвящено большое количество работ (см., например, [12, 29–32]). В этих работах, как правило, помимо требования достаточно быстрого убывания потенциала, накладывается также требование малости его нормы. При этих условиях компоненты гиббсовского случайного поля оказываются слабо зависимыми, что позволяет применить к таким полям общие предельные теоремы для случайных полей с перемешиванием. В то же время применение мартингального метода позволяет не только значительно ослабить условия на скорость убывания потенциала, но и позволяет с новой точки зрения рассматривать вопросы, связанные со сферой приложения предельных теорем к гиббсовским случайным полям. Ниже будут приведены соответствующие утверждения.

Известно (см. [9]), что совокупность гиббсовских случайных полей, соответствующих заданному потенциалу Φ, образует симплекс, т.е. непустое выпуклое замкнутое множество. Крайние точки этого множества являются эргодическими гиббсовскими случайными полями. В частности, если гиббсовское случайное поле единственно, то оно эргодично.

Теорема 4.1. *Пусть* Φ *— трансляционно–инвариантный потенциал и* X *— соответствующее пространство спинов, причем существует разбиение* Π *множества* X*, удовлетворяющее условию* (1.5)*, а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (1.4)*. Тогда для каждой крайней точки симплекса гиббсовских случайных полей, отвечающих потенциалу* Φ*, справедливы ЦПТ и ФПТ.*

В [12] для гиббсовских случайных полей, соответствующих ограниченным потенциалам, показано, что ЛПТ следует из ЦПТ. Таким образом, оказывается справедливым и следующей факт.

Теорема 4.2. *Пусть* Φ *— ограниченный трансляционно–инвариантный потенциал и* X *— соответствующее пространство спинов, причем существует разбиение* Π *множества* X*, удовлетворяющее условию* (1.5)*, а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (1.4)*. Тогда для каждой крайней точки симплекса гиббсовских случайных полей, отвечающих потенциалу* Φ*, справедлива ЛПТ.*

Для гиббсовских случайных полей с перемешиванием справедливы следующие теоремы, являющиеся следствиями Теорем 2.3, 2.4 и 2.5.

Теорема 4.3. *Пусть (ξ_t) — однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ, такое, что $M\xi_0^2 > 0$. Пусть существует разбиение Π множества X, удовлетворяющее условию (1.5), а потенциал Φ удовлетворяет условию (1.4). Если, к тому же, (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

тогда для случайного поля (ξ_t) справедлива ЦПТ, причем для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$M\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty$$

где ζ — стандартно нормально распределенная случайная величина.

Теорема 4.4. *Пусть (ξ_t) — однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ, такое, что $M\xi_0^2 > 0$. Пусть существует разбиение Π множества X, удовлетворяющее условию (1.5), а потенциал Φ удовлетворяет условию (1.4). Если, к тому же, (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \right| \leq C \cdot n^{-d/8},$$

где положительная постоянная C не зависит от n.

Теорема 4.5. *Пусть (ξ_t) — однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ, такое, что $M\xi_0^2 > 0$. Пусть существует разбиение Π множества X, удовлетворяющее условию (1.5), а потенциал Φ удовлетворяет условию (1.4). Если, к тому же,*

(ξ_t) *удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

тогда для случайного поля (ξ_t) *справедлив закон повторного логарифма.*

Известно (см. [9,32]), что в области единственности гиббсовские случайные поля удовлетворяют условию равномерного сильного перемешивания. При определенных условиях на потенциал удается установить и скорость убывания соответствующего коэффициента перемешивания. Справедливость следующего утверждения следует из Теоремы 9.4.1 в [32].

Утверждение 4.1. *Пусть гиббсовское случайное поле* (ξ_t) *задается потенциалом* Φ, *который удовлетворяет следующим условиям*

$$\frac{1}{2} e^{4\|\Phi\|_1} \left(e^{4\|\Phi\|_1} - 1 \right) < 1, \tag{4.1}$$

$$\sum_{0 \in V \in W} |V| \, (diamV)^{\gamma} \sup_{x \in X^V} |\Phi_V(x)| < \infty, \qquad \gamma > 0, \tag{4.2}$$

где

$$\|\Phi\|_1 = \sum_{0 \in V \in W} |V| \sup_{x \in X^V} |\Phi_V(x)|, \qquad diamV = \sup_{t,s \in V} |t - s| .$$

Тогда (ξ_t) *удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I| \, C_{\Phi} \left(\frac{\ln j}{j} \right)^{\gamma}, \qquad \gamma > 0,$$

где $0 < C_{\Phi} < \infty$ *— некоторая постоянная.*

Понятно, что

$$\boldsymbol{\varphi}(j) = \left(\frac{\ln j}{j} \right)^{\gamma} \to 0 \qquad \text{при } j \to \infty,$$

и при $\gamma > d - 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \boldsymbol{\varphi}(j) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \left(\frac{\ln j}{j} \right)^{\gamma} < \infty.$$

Таким образом, Теоремы 4.3 – 4.8 могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 4.6. *Пусть* (ξ_t) *— однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* X, *отвечающее потенциалу* Φ, *такое, что* $M\xi_0^2 > 0$. *Пусть существует разбиение* Π *множества* X, *удовлетворяющее условию* (1.5), *а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (1.4). *Если, к тому же, потенциал* Φ *удовлетворяет условиям* (4.1) *и* (4.2) *при* $\gamma > d-1$, *тогда для случайного поля* (ξ_t) *справедлива ЦПТ, причем для всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$M\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty$$

где ζ *— стандартно нормально распределенная случайная величина.*

Теорема 4.7. *Пусть* (ξ_t) *— однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* X, *отвечающее потенциалу* Φ, *такое, что* $M\xi_0^2 > 0$. *Пусть существует разбиение* Π *множества* X, *удовлетворяющее условию* (1.5), *а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (1.4). *Если, к тому же, потенциал* Φ *удовлетворяет условиям* (4.1) *и* (4.2) *при* $\gamma > d-1$, *тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du\right| \le C\cdot n^{-d/8},$$

где положительная постоянная C *не зависит от* n.

Теорема 4.8. *Пусть* (ξ_t) *— однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* X, *отвечающее потенциалу* Φ, *такое, что* $M\xi_0^2 > 0$. *Пусть существует разбиение* Π *множества* X, *удовлетворяющее условию* (1.5), *а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (1.4). *Если, к тому же, потенциал* Φ *удовлетворяет условиям* (4.1) *и* (4.2) *при* $\gamma > d-1$, *тогда для случайного поля* (ξ_t) *справедлив закон повторного логарифма.*

Принцип рандомизации при построении мартингал–разностных случайных полей также может быть использован для расширения класса гиббсовских случайных полей, для которых справедливы предельные теоремы. Данный подход основан на том, что (при определенных условиях) случайное поле, ассоциированное с однородным эргодическим гиббсовским случайным полем, также является однородным, эргодическим и гиббсовским (см. Теоремы 3.3 и 3.5). Поэтому, применяя рандомизацию, при которой ассоциированное поле будет мартингал–разностным, мы получим гиббсовское случайное поле, для которого справедливы соответствующие предельные теоремы. Приведем точные формулировки этих теорем.

Теорема 4.9. *Пусть* (ξ_t) *— однородное эргодическое гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* X, (η_t) *— случайное поле с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R *равномерных рандомизаций, такое, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если отображение* φ *и множество* Y *удовлетворяют условию* (3.8), *тогда для* (η_t) *справедливы ЦПТ и ФПТ. Если, к тому же, потенциал* $\widetilde{\Phi}$, *соответствующий ассоциированному случайному полю, ограничен, то для* (η_t) *справедлива ЛПТ.*

Результат Теоремы 3.4 позволяет сформулировать следующие теоремы для ассоциированных гиббсовских случайных полей, являющиеся следствиями Теорем 2.3, 2.4 и 2.5.

Теорема 4.10. *Пусть* (ξ_t) *— однородное гиббсовское случайное поле с конечным фазовым пространством* X, *удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty.$$

Пусть, далее, случайное поле (η_t) *с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R *равномерных рандомизаций, таково, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если отображение* φ *и множество* Y *удовлетворяют условию* (3.8), *тогда для случайного поля* (η_t) *справедлива ЦПТ, причем для всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$M\left(\frac{S_{V_n}^{\eta}}{\sqrt{DS_{V_n}^{\eta}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty$$

где $S_{V_n}^{\eta} = \sum\limits_{t \in V_n} \eta_t$, *а* ζ *— стандартно нормально распределенная случайная величина.*

Теорема 4.11. *Пусть* (ξ_t) *— однородное гиббсовское случайное поле с конечным фазовым пространством* X, *удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty.$$

Пусть, далее, случайное поле (η_t) *с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R *равномерных* *рандомизаций, таково, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если отображение* φ *и множество* Y *удовлетворяют условию* (3.8), *тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left| P\left(\frac{S^{\eta}_{V_n}}{\sqrt{DS^{\eta}_{V_n}}} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du\right| \le C\cdot n^{-d/8},$$

где $S^{\eta}_{V_n} = \sum\limits_{t\in V_n}\eta_t$, *а положительная постоянная* C *не зависит от* n.

Теорема 4.12. *Пусть* (ξ_t) — *однородное гиббсовское случайное поле с конечным фазовым пространством* X, *удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I\in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I|\cdot\boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}\cdot\boldsymbol{\varphi}(j) < \infty.$$

Пусть, далее, случайное поле (η_t) *с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R *равномерных рандомизаций, таково, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если отображение* φ *и множество* Y *удовлетворяют условию* (3.8), *тогда для случайного поля* (η_t) *справедлив закон повторного логарифма.*

4.2. Мартингальная модель, ассоциированная с моделью Изинга

Проблема фазовых переходов является одной из центральных в статистической физике. В своих фундаментальных работах [8–11] Добрушин показал, что изучение фазовых переходов сводится к изучению (гиббсовских) распределений, являющихся предельными для распределений Гиббса в конечном сосуде. Единственность предельного распределения свидетельствует об отсутствии явления разделения фаз. В работе [11] приведены условия единственности гиббсовского распределения, а также приведены примеры моделей, для которых гиббсовское распределение не единственно. Одной из таких моделей является двумерная ферромагнитная модель Изинга.

Введем следующие обозначения. Для всех $t, s\in\mathbb{Z}^d$ положим

$$\|t-s\| = \sum_{i=1}^{d}\left|t^{(i)} - s^{(i)}\right|.$$

Далее, для всех $V\in W$ обозначим

$$\partial V = \left\{t\in\mathbb{Z}^d\backslash V : \rho(t,V) = 1\right\}, \qquad \rho(t,V) = \min_{s\in V}|t-s|.$$

Модель Изинга

Модель Изинга является, пожалуй, самой известной моделью статистической физики, и ее изучению посвящено огромное количество работ (см., например, [2, 15, 19, 48] и указанную в них литературу). Мы рассматриваем так называемую ферромагнитную модель Изинга. Эта модель задается следующим потенциалом парного взаимодействия

$$\Phi_V(x) = \begin{cases} -\beta h \cdot x_t, & V = \{t\} \\ -\beta \cdot x_t x_s, & V = \{t, s\} \text{ и } \|t - s\| = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где $x_t, x_s \in X = \{-1, 1\}$, $t, s \in \mathbb{Z}^d$, параметр $h \in \mathbb{R}$ соответствует внешнему полю, а параметр $\beta > 0$ пропорционален обратной температуре. Для всех $V \in W$ потенциальная энергия запишется следующим образом

$$U_V^{\bar{x}}(x) = U_V^{\beta,h}(x/\bar{x}) = -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{t,s \in V: \\ \|t-s\|=1}} x_t x_s - \beta \sum_{\substack{t \in V, s \in \partial V: \\ \|t-s\|=1}} x_t \bar{x}_s - \beta h \sum_{t \in V} x_t,$$

где $x \in X^V$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$. Обозначим через $P_V^{\beta,h}(x/\bar{x})$ условное распределение $q_V^{\bar{x}}(x)$ гиббсовского случайного поля, соответствующего модели Изинга, т.е.

$$P_V^{\beta,h}(x/\bar{x}) = \frac{\exp\left\{-U_V^{\beta,h}(x/\bar{x})\right\}}{\sum\limits_{z \in X^V} \exp\left\{-U_V^{\beta,h}(z/\bar{x})\right\}}.$$

Пусть, далее,

$$P_{V,+}^{\beta,h} = P_V^{\beta,h}(x/\bar{x}_s = 1, s \in \partial V) \qquad \text{и} \qquad P_{V,-}^{\beta,h} = P_V^{\beta,h}(x/\bar{x}_s = -1, s \in \partial V).$$

Известно, что $P_{V,+}^{\beta,h}$ и $P_{V,-}^{\beta,h}$ слабо сходятся к некоторым пределам $P_+^{\beta,h}$ и $P_-^{\beta,h}$ при $V \uparrow \mathbb{Z}^d$. В случае $d = 1$ существует только одно предельное распределение ([11]), т.е.

$$P_+^{\beta,h} = P_-^{\beta,h}$$

для всех значений параметров (β, h). При $d = 2$ единственность сохраняется только при $h \neq 0$, $0 < \beta < \infty$ и $h = 0$, $0 < \beta \leq \beta_{cr}$, где β_{cr} — критическая обратная температура. Если же $h = 0$ и $\beta > \beta_{cr}$, то

$$P_+^{\beta,h} \neq P_-^{\beta,h}.$$

Пара значений $(\beta_{cr}, 0)$ является критической точкой для модели Изинга.

Известно, что для модели Изинга ЦПТ имеет место в области единственности, т.е. при $h \neq 0$, $0 < \beta < \infty$ и $h = 0$, $0 < \beta < \beta_{cr}$ (см., например, [15]). В критической точке $(\beta_{cr}, 0)$ случайное поле, соответствующее модели Изинга, также единственно. Однако при $h = 0$ и $\beta \uparrow \beta_{cr}$ корреляция между его компонентами возрастает, и, поэтому, их нельзя считать слабо зависимыми случайными величинами. В связи с этим выдвигается гипотеза о невозможности выполнения ЦПТ в критической точке для модели Изинга, как, впрочем, и для любой другой многомерной модели статистической физики.

Мартингальная модель

В работе [34] приведен пример модели, определенным образом связанной с моделью Изинга, для которой соответствующее гиббсовское случайное поле является мартингал–разностным. Эта модель интересна прежде всего тем, что для нее ЦПТ верна даже в критической точке.

Рассмотрим модель, несколько отличающуюся от модели, приведенной в [34]. Эта модель задается следующим потенциалом парного взаимодействия

$$\tilde{\Phi}_V(y) = \begin{cases} -\beta h \cdot |y_t|, & V = \{t\} \\ -\beta |y_t| \cdot |y_s|, & V = \{t, s\} \text{ и } \|t - s\| = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где $y_t, y_s \in Y = \{-1, 0, 1\}$, $t, s \in \mathbb{Z}^d$. Понятно, что потенциал $\tilde{\Phi}$ — четный, и, следовательно, соответствующее гиббсовское случайное поле является мартингал–разностным (см. Теорему 1.4). В связи с этим, данную модель будем называть мартингальной. Потенциальная энергия для мартингальной модели запишется следующим образом

$$\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y}) = -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{t,s \in V: \\ \|t-s\|=1}} |y_t| \cdot |y_s| - \beta \sum_{\substack{t \in V, s \in \partial V: \\ \|t-s\|=1}} |y_t| \cdot |\bar{y}_s| - \beta h \sum_{t \in V} |y_t|,$$

для всех $y \in Y^V$, $\bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$, $V \in W$. Отличие рассматриваемой модели от модели, приведенной в [34], заключается в наличие множителя β перед последней суммой в выражении для потенциальной энергии $\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y})$. Однако все дальнейшие рассуждения проводятся совершенно аналогично рассуждениям указанной работы.

Преобразуем $\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y})$. Можем написать

$$\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y}) = -\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}} (2|y_t|-1)\cdot(2|y_s|-1)-$$

$$-\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}} |y_t| + \frac{\beta}{8}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}} 1 - \frac{\beta}{4}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}} (2|y_t|-1)\cdot(2|\bar{y}_s|-1)-$$

$$-\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}} |y_t| - \frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}} |\bar{y}_s| + \frac{\beta}{4}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}} 1-$$

$$-\frac{\beta h}{2}\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) - \frac{\beta h}{2}|V|.$$

Далее, с учетом того, что $\sum\limits_{\substack{s\in V\cup\partial V:\\ \|t-s\|=1}} 1 = 2d$ для всех $t\in V$, получаем

$$\frac{\beta h}{2}\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) + \frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}} |y_t| + \frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}} |y_t| =$$

$$= \frac{\beta h}{2}\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) + \frac{\beta}{2}\sum_{t\in V}\sum_{\substack{s\in V\cup\partial V:\\ \|t-s\|=1}} |y_t| = \frac{\beta h}{2}\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) + \beta d\sum_{t\in V}|y_t| =$$

$$= \frac{\beta h}{2}\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) + \frac{\beta d}{2}\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) + \frac{\beta d}{2}|V| =$$

$$= \frac{h+d}{2}\beta\sum_{t\in V}(2|y_t|-1) + \frac{\beta d}{2}|V|.$$

Обозначим

$$f(|V|,|\partial V|) = \frac{\beta d}{2}|V| + \frac{\beta h}{2}|V| - \frac{\beta}{8}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}} 1 - \frac{\beta}{4}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}} 1.$$

Тогда

$$\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y}) = -\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}}(2|y_t|-1)\cdot(2|y_s|-1)-$$

$$-\frac{\beta}{4}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}}(2|y_t|-1)\cdot(2|\bar{y}_s|-1)-$$

$$-\frac{h+d}{2}\beta\sum_{t\in V}(2|y_t|-1)-\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}}|\bar{y}_s|-f(|V|,|\partial V|)=$$

$$=U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}(2|y|-1/2|\bar{y}|-1)-\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}}|\bar{y}_s|+f(|V|,|\partial V|),$$

где

$$2|y|-1=\{2|y_t|-1,t\in V\},\qquad 2|\bar{y}|-1=\{2|\bar{y}_s|-1,s\in\partial V\}.$$

Таким образом,

$$\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y}) = U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}(2|y|-1/2|\bar{y}|-1)-$$
$$-\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t\in V,s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}}|\bar{y}_s|+f(|V|,|\partial V|). \tag{4.3}$$

Обозначим через $Q_V^{\beta,h}(y/\bar{y})$ условное распределение вероятностей $\hat{q}_V^{\bar{y}}(y)$ гиббсовского случайного поля, соответствующего мартингальной модели, т.е.

$$Q_V^{\beta,h}(y/\bar{y}) = \frac{\exp\left\{-\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y})\right\}}{\sum\limits_{z\in Y^V}\exp\left\{-\tilde{U}_V^{\beta,h}(z/\bar{y})\right\}}.$$

Подставив полученное для $\tilde{U}_V^{\beta,h}(y/\bar{y})$ выражение (4.3) и выполнив необходимые сокращения, получаем

$$Q_V^{\beta,h}(y/\bar{y}) = \frac{\exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2\beta(h+d)}(2|y|-1/2|\bar{y}|-1)\right\}}{\sum\limits_{z\in Y^V}\exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2\beta(h+d)}(2|z|-1/2|\bar{y}|-1)\right\}}.$$

Преобразуем выражение в знаменателе. Можем написать

$$\sum_{z\in Y^V} \exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\} =$$

$$= \sum_{z\in\{0,1\}^V} 2^{\sum\limits_{t\in V} z_t} \exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\} =$$

$$= \sum_{z\in X^V} 2^{\frac{1}{2}\sum\limits_{t\in V}(2|z_t|-1)+\frac{|V|}{2}} \exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\} =$$

$$= 2^{|V|/2} \sum_{z\in X^V} \exp\left\{\frac{\ln 2}{2}\sum_{t\in V}\left(2\left|z_t\right|-1\right)\right\} \exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\} =$$

$$= 2^{|V|/2} \sum_{z\in X^V} \exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\},$$

поскольку

$$U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right) - \frac{\ln 2}{2}\sum_{t\in V}\left(2\left|z_t\right|-1\right) =$$

$$= -\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}}\left(2\left|y_t\right|-1\right)\cdot\left(2\left|y_s\right|-1\right) - \frac{\beta}{4}\sum_{\substack{t\in V, s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}}\left(2\left|y_t\right|-1\right)\cdot\left(2\left|\bar{y}_s\right|-1\right) -$$

$$-\frac{\beta\left(h+d\right)}{2}\sum_{t\in V}\left(2\left|y_t\right|-1\right) - \frac{\ln 2}{2}\sum_{t\in V}\left(2\left|z_t\right|-1\right) =$$

$$= -\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{t,s\in V:\\ \|t-s\|=1}}\left(2\left|y_t\right|-1\right)\cdot\left(2\left|y_s\right|-1\right) - \frac{\beta}{4}\sum_{\substack{t\in V, s\in\partial V:\\ \|t-s\|=1}}\left(2\left|y_t\right|-1\right)\cdot\left(2\left|\bar{y}_s\right|-1\right) -$$

$$-\frac{\beta}{2}\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)\sum_{t\in V}\left(2\left|y_t\right|-1\right) = U_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right).$$

Далее,

$$Q_V^{\beta,h}\left(y/\bar{y}\right)=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}\sum\limits_{t\in V}(2|y_t|-1)}\cdot 2^{|V|/2}}{2^{\sum\limits_{t\in V}|y_t|}}\cdot\frac{\exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2(h+d)}\left(2\left|y\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\}}{2^{|V|/2}\sum\limits_{z\in Y^V}\exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\}}=$$

$$=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}\cdot\frac{\exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|y\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\}}{\sum\limits_{z\in Y^V}\exp\left\{-U_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|z\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right)\right\}}=$$

$$=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}P_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|y\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right).$$

Таким образом,

$$Q_V^{\beta,h}\left(y/\bar{y}\right)=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}P_V^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|y\right|-1/2\left|\bar{y}\right|-1\right).$$

Обозначим

$$Q_{V,0}^{\beta,h}=Q_V^{\beta,h}\left(y/\bar{y}_s=0,s\in\partial V\right),$$
$$Q_{V,+}^{\beta,h}=Q_V^{\beta,h}\left(y/\bar{y}_s=1,s\in\partial V\right),$$
$$Q_{V,-}^{\beta,h}=Q_V^{\beta,h}\left(y/\bar{y}_s=-1,s\in\partial V\right).$$

Имеем

$$Q_{V,0}^{\beta,h}=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}P_{V,-}^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|y\right|-1\right),$$
$$Q_{V,+}^{\beta,h}=Q_{V,-}^{\beta,h}=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}P_{V,+}^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\left(2\left|y\right|-1\right).$$

Далее, для всех $I\subset V$ можем написать

$$\left(Q_{V,0}^{\beta,h}\right)_I(y)=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}\left(P_{V,-}^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\right)_I\left(2\left|y\right|-1\right)\tag{4.4}$$

и

$$\left(Q_{V,+}^{\beta,h}\right)_I(y)=\left(Q_{V,-}^{\beta,h}\right)_I(y)=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}\left(P_{V,+}^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\right)_I\left(2\left|y\right|-1\right).\tag{4.5}$$

Поскольку при $V\uparrow\mathbb{Z}^d$ пределы в правых частях выражений (4.4) и (4.5) существуют, то существуют и пределы

$$\left(Q_j^{\beta,h}\right)_I(y)=\lim_{V\uparrow\mathbb{Z}^d}\left(Q_{V,j}^{\beta,h}\right)_I(y),\qquad j\in\{0,+,-\},$$

причем

$$\left(Q_0^{\beta,h}\right)_I(y)=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}\left(P_-^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\right)_I(2\,|y|-1)\,,$$

$$\left(Q_+^{\beta,h}\right)_I(y)=\left(Q_-^{\beta,h}\right)_I(y)=2^{-\sum\limits_{t\in V}|y_t|}\left(P_+^{\frac{\beta}{4},2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)}\right)_I(2\,|y|-1)\,.$$

Из этих соотношений следует, что предельное распределение для мартингальной модели единственно при

$$2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)\neq 0,\qquad \beta>0$$

и

$$2\left(h+d+\frac{\ln 2}{\beta}\right)=0,\qquad 0<\frac{\beta}{4}<\beta_{cr}$$

(в силу единственности предельного распределения для модели Изинга с соответствующими параметрами), а фазовый переход происходит на кривой

$$h+d+\frac{\ln 2}{\beta}=0,\qquad \beta>4\beta_{cr}.$$

Критическая точка (β_{cr}^*,h_{cr}^*) мартингальной модели имеет координаты

$$\beta_{cr}^*=4\beta_{cr},\qquad h_{cr}^*=-d-\frac{\ln 2}{\beta_{cr}^*},$$

где β_{cr} — критическая обратная температура модели Изинга.

Предельное распределение $Q^{\beta_{cr}^*,h_{cr}^*}$ мартингальной модели в критической точке (β_{cr}^*,h_{cr}^*) единственно, поскольку при соответствующих параметрах единственно предельное распределение модели Изинга. Кроме того, оно однородно, поскольку потенциал $\tilde{\Phi}$ трансляционно инвариантен. Таким образом, в силу Теоремы 4.1, для случайного поля, соответствующего мартингальной модели, в критической точке выполняется ЦПТ.

4.3. Иллюстрация возможностей мартингального метода при доказательстве предельных теорем для модели Изинга

В работе [34] была получена формула связи конечномерных распределений суммарных спинов модели Изинга и мартингальной модели. В связи с этим, автор высказал идею о том, что изучение полученной формулы связи конечномерных распределений вероятностей позволит установить асимптотическое поведение суммарного спина модели Изинга в критической точке.

Принцип рандомизации, описанный в Главе 3, позволяет развить идею применения мартингального метода для доказательства предельных теорем.

Принцип рандомизации позволяет строить случайные поля, которые помимо свойств заданного поля (однородность, эргодичность, перемешивание, гиббсовость), обладают также мартингал–разностным свойством. Это свойство оказывается весьма полезным с точки зрения выполнимости предельных теорем и их уточнений (см. Главу 2). С другой стороны, конечномерные распределения заданного случайного поля определенным образом связаны с конечномерными распределениями построенного (ассоциированного) мартингал–разностного случайного поля (Теорема 3.1). Эта связь может быть использована для установления связи распределений конечных сумм компонент заданного и ассоциированного случайных полей. Далее, поскольку асимптотическое поведение сумм ассоциированного мартингал-разностного случайного поля известно (ЦПТ), то изучение формулы связи распределений может прояснить асимптотическое поведение сумм компонент заданного случайного поля. Описанный метод может быть применен и к гиббсовским случайным полям, что весьма важно с точки зрения применения разрабатываемого метода в математической статистической физике.

Приводимые далее результаты иллюстрируют возможности применения мартингального метода при доказательстве предельных теорем.

Случайное поле, ассоциированное с моделью Изинга

Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле, соответствующее модели Изинга. Для удобства вычислений, будем полагать, что компоненты (ξ_t) принимают значения в множестве $X = \{0, 1\}$, а не в $X' = \{-1, 1\}$. Переход к фазовому пространству X' может быть легко осуществлен посредством соотношения

$$x' = 2x - 1, \qquad x' \in X', x \in X.$$

Обозначим

$$M\xi_t = P\left(\xi_t = 1\right) = p, \qquad t \in \mathbb{Z}^d, 0 < p < 1.$$

Пусть, далее, заданы множество $Y = \{-1, 0, 1\}$ и отображение $\varphi : Y \to X$, такое, что $\varphi\left(y\right) = y^2$, $y \in Y$. Рассмотрим однородную совокупность равномерных рандомизаций $R = \left\{ \frac{1}{\left|\varphi^{-1}\left(x\right)\right|}, x \in X \right\}$. Согласно Теореме 3.1, существует случайное поле (η_t), ассоциированное со случайным полем (ξ_t) посредством отображения φ и рандомизации R, причем для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$\xi_t = \eta_t^2,$$

$$P\left(\eta_t = 1\right) = P\left(\eta_t = -1\right) = \frac{1}{2} P\left(\xi_t = 1\right) = \frac{p}{2},$$

$$P(\eta_t = 0) = P(\xi_t = 0) = 1 - p,$$

и для всех $V \in W$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{t\in V} y_t^2} P\left(\xi_t = y_t^2, t \in V\right) = 2^{-\sum\limits_{t\in V} x_t} P(\xi_t = x_t, t \in V),$$

$y_t \in \varphi^{-1}(x_t)$, $x \in X^V$.

Случайное поле (η_t) является однородным гиббсовским случайным полем, поскольку оно ассоциировано с однородным гиббсовским случайным полем (ξ_t) посредством однородной совокупности равномерных рандомизаций R (см. Теоремы 3.3 и 3.5). Далее, поскольку $\sum\limits_{y\in\varphi^{-1}(x)} y = 0$ для всех $x \in X$, то, применяя Теорему 3.7, заключаем, что (η_t) является мартингал–разностным случайным полем. Отметим также, что $M\eta_t = 0$, $D\eta_t = M\eta_t^2 = p$ для всех $t \in \mathbb{Z}^d$.

Формулы связи для распределений суммарных спинов (ξ_t) и (η_t)

Обозначим $S_V^\xi = \sum\limits_{t\in V} \xi_t$ и $S_V^\eta = \sum\limits_{t\in V} \eta_t$ для всех $V \in W$. В следующих двух теоремах устанавливаются формулы связи распределений вероятностей суммарных спинов S_V^ξ и S_V^η.

Теорема 4.13. *Распределение вероятностей S_V^η через распределение вероятностей S_V^ξ выражается следующим образом*

$$P(S_V^\eta = k) = \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} 2^{-(k+2m)} C_{k+2m}^m P\left(S_V^\xi = k + 2m\right),^1 \tag{4.6}$$

$$P(S_V^\eta = k) = P(S_V^\eta = -k), \qquad k = 0, 1, ..., |V|.$$

Доказательство. Обозначим

$$V^+ = \{t \in V : \eta_t = +1\} \qquad \text{и} \qquad V^- = \{t \in V : \eta_t = -1\}.$$

Тогда

$$S_V^\eta = \sum_{t\in V} \eta_t = \left|V^+\right| - \left|V^-\right|.$$

[1] Здесь и всюду далее символ C_n^k используется для обозначения биномиального коэффициента, т.е. числа сочетаний из n по k

Следовательно, событие $\{\omega : S_V^\eta = k\}$ можно представить следующим образом

$$\left\{\omega : \sum_{t\in V} \eta_t = k\right\} = \left\{\omega : |V^+| = k+m, |V^-| = m, 0 \le m \le \frac{|V|-k}{2}\right\} =$$

$$= \bigcup_m \bigcup_{\substack{I\subset V\\ |I|=k+2m}} \bigcup_{\substack{\tilde{I}\subset I\\ \left|\tilde{I}\right|=m}} \left\{\omega : \eta_t = -1, t\in \tilde{I}, \eta_t = +1, t \in I\backslash\tilde{I}, \eta_t = 0, t\in V\backslash I\right\},$$

где $I = \{t \in V : \eta_t = \pm 1\}$, $\tilde{I} = \{t \in V : \eta_t = -1\}$, $\tilde{I} \subset I \subset V$, $0 \le k \le |V|$. Тогда

$$P\left(S_V^\eta = k\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} \sum_{\substack{I\subset V\\ |I|=k+2m}} \sum_{\substack{\tilde{I}\subset I\\ \left|\tilde{I}\right|=m}} P\left(\eta_t = -1, t\in\tilde{I}, \eta_t = +1, t\in I\backslash\tilde{I}, \eta_t = 0, t \in V\backslash I\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} \sum_{\substack{I\subset V\\ |I|=k+2m}} \sum_{\substack{\tilde{I}\subset I\\ \left|\tilde{I}\right|=m}} 2^{-(k+2m)} P\left(\xi_t = 1, t\in I, \xi_t = 0, t\in V\backslash I\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} 2^{-(k+2m)} C_{k+2m}^m \sum_{\substack{I\subset V\\ |I|=k+2m}} P\left(\xi_t = 1, t\in I, \xi_t = 0, t\in V\backslash I\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} 2^{-(k+2m)} C_{k+2m}^m P\left(S_V^\xi = k+2m\right).$$

Аналогично можно показать, что

$$P\left(S_V^\eta = -k\right) = \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} 2^{-(k+2m)} C_{k+2m}^m P\left(S_V^\xi = k+2m\right),$$

т.е. $P\left(S_V^\eta = -k\right) = P\left(S_V^\eta = k\right)$, $0 \le k \le |V|$.

$\square$

Более важным представляется результат следующей теоремы.

Теорема 4.14. *Распределение вероятностей S_V^ξ через распределение вероятностей S_V^η выражается следующим образом*

$$P\left(S_V^\xi = 0\right) = P\left(S_V^\eta = 0\right) + 2\sum_{m=1}^{[|V|/2]} (-1)^m P\left(S_V^\eta = 2m\right),$$

$$P\left(S_V^\xi = k\right) = 2^k \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} (-1)^m \frac{k+2m}{k+m} C_{k+m}^m P\left(S_V^\eta = k+2m\right) \tag{4.7}$$

для всех $k = 1, 2, ..., |V|$.

Доказательство. Обозначим

$$a_{k+2m} = 2^{-(k+2m)} P\left(S_V^\xi = k+2m\right).$$

Соотношение (4.6) запишется следующим образом

$$P\left(S_V^\eta = k\right) = \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} C_{k+2m}^m a_{k+2m},$$

что совпадает с одним из пары взаимно обратных соотношений чебышевского типа (см., например, [47], Таблица 2.3). Тогда

$$a_k = \sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]} (-1)^m \frac{k+2m}{k+m} C_{k+m}^m P\left(S_V^\eta = k+2m\right). \tag{4.8}$$

Приведем доказательство справедливости соотношения (4.8).

В силу Теоремы 4.14

$$a_{2k} = \sum_{m=0}^{|V|/2-k} (-1)^m \frac{2k+2m}{2k+m} C_{2k+m}^m P\left(S_V^\eta = 2k+2m\right), \tag{4.9}$$

для всех $k = 0, 1, ..., |V|/2$. Тогда (4.6) примет вид

$$P\left(S_V^\eta = 2k\right) = \sum_{m=0}^{[(|V|-2k)/2]} C_{2k+2m}^m a_{2k+2m} = \sum_{j=k}^{[|V|/2]} C_{2j}^{j-k} a_{2j}.$$

Подставив это выражение в (4.9), получим

$$a_{2j} = \sum_{k=0}^{|V|/2-j} (-1)^k \frac{2j+2k}{2j+k} C_{2j+k}^k \sum_{m=j+k}^{|V|/2} C_{2m}^{m-j-k} a_{2m}.$$

Далее, обозначив $s = m - j$, можем написать

$$a_{2j} = \sum_{k=0}^{|V|/2-j} (-1)^k \frac{2j+2k}{2j+k} C_{2j+k}^k \sum_{s=k}^{|V|/2-j} C_{2j+2s}^{s-k} a_{2j+2s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{|V|/2-j} a_{2j+2s} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{2j+2k}{2j+k} C_{2j+k}^k C_{2j+2s}^{s-k} = \sum_{s=0}^{|V|/2-j} A_s a_{2j+2s},$$

где

$$A_s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{2j+2k}{2j+k} C_{2j+k}^{k} C_{2j+2s}^{s-k}.$$

Нетрудно проверить, что $A_0 = 1$. Таким образом, для доказательства справедливости соотношения (4.8) достаточно показать, что $A_s = 0$ при $s > 0$. Имеем

$$A_s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \tfrac{2j+2k}{2j+k} C_{2j+k}^{k} C_{2j+2s}^{s-k} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \left(C_{2j+k}^{k} + C_{2j+k-1}^{k-1} \right) C_{2j+2s}^{t-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_{2j+k}^{k} C_{2j+2s}^{s-k} - \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{2j+k}^{k} C_{2j+2s}^{s-1-k}.$$

Применив формулу

$$C_{n+m-1}^{m} = (-1)^m C_{-n}^{m},$$

можем написать

$$A_s = \sum_{k=0}^{s} C_{-2j-1}^{k} C_{2j+2s}^{t-k} - \sum_{k=0}^{s-1} C_{-2j-1}^{k} C_{2j+2s}^{s-1-k}.$$

Наконец, воспользовавшись сверткой Вандермонда

$$\sum_{k=0}^{m} C_r^k C_s^{m-k} = C_{r+s}^{m},$$

окончательно получаем

$$A_s = C_{2s-1}^{s} - C_{2s-1}^{s-1} = 0.$$

Совершенно аналогично доказательство проводится для

$$a_{2k-1} = \sum_{m=0}^{|V|/2-k} (-1)^m \frac{2k-1+2m}{2k-1+m} C_{2k-1+m}^{m} P\left(S_V^{\eta} = 2k-1+2m\right),$$

$k = 1, 2, ..., |V|/2$.

Остается заметить, что выражение для $P\left(S_V^{\xi} = 0\right)$ получается в связи с требованием

$$\sum_{k=0}^{|V|} P\left(S_V^{\xi} = k\right) = 1.$$

$\square$

Характеристические функции суммарных спинов S_V^ξ и S_V^η

Полученные в Теореме 4.13 соотношения позволяют выразить характеристическую функцию суммарного спина S_V^η через распределение вероятностей S_V^ξ.

Теорема 4.15. *Характеристическая функция $f_{S_V^\eta}(t)$ суммарного спина S_V^η имеет следующий вид*

$$f_{S_V^\eta}(t) = \sum_{k=0}^{|V|} (\cos t)^k P\left(S_V^\xi = k\right).$$

Доказательство. Для удобства записи введем следующие обозначения: $|V| = n$,

$$P\left(S_V^\xi = j\right) = a_j^{(n)}, \qquad j = \overline{0, n},$$

$$P\left(S_V^\eta = j\right) = b_j^{(n)}, \qquad j = \overline{-n, n}.$$

В силу Теоремы 4.13 имеем

$$b_{2k}^{(n)} = \sum_{j=k}^{[n/2]} 2^{-2j} C_{2j}^{j-k} a_{2j}^{(n)}, \qquad k = 0, 1, ..., [n/2],$$

$$b_{2k-1}^{(n)} = \sum_{j=k}^{[n/2]} 2^{-2j+1} C_{2j-1}^{j-k} a_{2j-1}^{(n)}, \qquad k = 1, 2, ..., [n/2],$$

$$b_k = b_{-k}, \qquad k = \overline{-n, n}.$$

Тогда

$$f_{S_V^\eta}(t) = Me^{itS_V^\eta} = \sum_{k=-n}^{n} e^{itk} b_k^{(n)} = b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{itk} + e^{-itk}\right) b_k^{(n)} =$$

$$= b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(e^{it2k} + e^{-it2k}\right) b_{2k}^{(n)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(e^{it(2k-1)} + e^{-it(2k-1)}\right) \cdot b_{2k-1}^{(n)} =$$

$$= b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(e^{it2k} + e^{-it2k}\right) \sum_{j=k}^{[n/2]} 2^{-2j} C_{2j}^{j-k} a_{2j}^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(e^{it(2k-1)} + e^{-it(2k-1)}\right) \sum_{j=k}^{[n/2]} 2^{-2j+1} C_{2j-1}^{j-k} a_{2j-1}^{(n)} =$$

$$= b_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{[n/2]} 2^{-2j} a_{2j}^{(n)} \sum_{k=1}^{j} C_{2j}^{j-k} \left(e^{it2k} + e^{-it2k}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{[n/2]} 2^{-2j+1} a_{2j-1}^{(n)} \sum_{k=1}^{j} C_{2j-1}^{j-k} \left(e^{it(2k-1)} + e^{-it(2k-1)}\right).$$

Нетрудно показать, что

$$\left(1 + e^{2it}\right)^{2j} = e^{2it} \left[C_{2j}^{j} + \sum_{k=1}^{j} C_{2j}^{j-k} \left(e^{it2k} + e^{-it2k}\right)\right].$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{j} C_{2j}^{j-s} \left(e^{it2k} + e^{-it2k}\right) = e^{-2itj} \left(1 + e^{2it}\right)^{2j} - C_{2j}^{j} = \left(e^{-it} + e^{it}\right)^{2j} - C_{2j}^{j}.$$

Аналогично, из соотношения

$$\left(1 + e^{2it}\right)^{2j-1} = e^{it(2j-1)} \sum_{k=1}^{j} C_{2j-1}^{j-k} \left(e^{-it(2k-1)} + e^{it(2k-1)}\right)$$

следует

$$\sum_{k=1}^{j} C_{2j-1}^{j-k} \left(e^{-it(2k-1)} + e^{it(2k-1)}\right) = \left(e^{-it} + e^{it}\right)^{2j-1}.$$

С учетом того, что $b_0^{(n)} = \sum_{j=0}^{[n/2]} 2^{-2j} C_{2j}^{j} a_{2j}^{(n)}$, окончательно получаем

$$f_{S_V^\eta}(t) = \sum_{j=0}^{[n/2]} 2^{-2j} C_{2j}^{j} a_{2j}^{(n)} + \sum_{j=1}^{[n/2]} 2^{-2j} a_{2j}^{(n)} \left(e^{-it} + e^{it}\right)^{2j} - \sum_{j=1}^{[n/2]} 2^{-2j} a_{2j}^{(n)} C_{2j}^{j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{[n/2]} 2^{-2j+1} a_{2j-1}^{(n)} \left(e^{-it} + e^{it}\right)^{2j-1} = a_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} a_j^{(n)} \left(e^{-it} + e^{it}\right)^{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{e^{-it} + e^{it}}{2}\right)^{j} a_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} (\cos t)^j a_j^{(n)}.$$

□

В следующей теореме приводится выражение для характеристической функции суммы S_V^ξ через распределение вероятностей S_V^η. Интерес представляют возникающие при этом коэффициенты, которые являются многочленами Чебышева первого рода.

Теорема 4.16. *Характеристическая функция* $f_{S_V^\xi}(t)$ *суммарного спина* S_V^ξ *имеет следующий вид*

$$f_{S_V^\xi}(t) = \sum_{k=-|V|}^{|V|} \cos\left(k \arccos e^{it}\right) P\left(S_V^\eta = k\right).$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве Теоремы 4.15. В силу Теоремы 4.14 имеем

$$a_0^{(n)} = b_0^{(n)} + 2 \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m b_{2m}^{(n)},$$

$$a_{2k}^{(n)} = (-1)^k 2^{2k} \sum_{m=k}^{[n/2]} (-1)^k \frac{2m}{k+m} C_{m+k}^{m-k} b_{2m}^{(n)},$$

$$a_{2k-1}^{(n)} = (-1)^k 2^{2k-1} \sum_{m=k}^{[n/2]} (-1)^m \frac{2m-1}{m+k-1} C_{m+k-1}^{m-k} b_{2m-1}^{(n)},$$

для всех $k = 1, 2, ..., n/2$. Тогда

$$f_{S_V^\xi}(t) = Me^{itS_V^\xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} a_k^{(n)} = a_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{[n/2]} e^{it2j} a_{2j}^{(n)} + \sum_{j=1}^{[n/2]} e^{it(2j-1)} a_{2j-1}^{(n)} =$$

$$= b_0^{(n)} + 2 \sum_{k=1}^{n/2} (-1)^k b_{2k}^{(n)} + \sum_{j=1}^{[n/2]} e^{it2j} \cdot (-1)^j 2^{2j} \sum_{k=j}^{[n/2]} (-1)^k \frac{2k}{k+j} C_{k+j}^{k-j} b_{2k}^{(n)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{[n/2]} e^{it(2j-1)} \cdot (-1)^j 2^{2j-1} \sum_{k=j}^{[n/2]} (-1)^k \frac{2k-1}{k+j-1} C_{k+j-1}^{k-j} b_{2k-1}^{(n)} =$$

$$= b_0^{(n)} + 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k b_{2k}^{(n)} + \sum_{j=1}^{[n/2]} \left(-4e^{2it}\right)^j \sum_{k=j}^{[n/2]} (-1)^k \frac{2k}{k+j} C_{k+j}^{k-j} b_{2k}^{(n)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{\left(-4e^{2it}\right)^j}{2e^{it}} \sum_{k=j}^{[n/2]} (-1)^k \frac{2k-1}{k+j-1} C_{k+j-1}^{k-j} b_{2k-1}^{(n)} =$$

$$= b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k b_{2k}^{(n)} \sum_{j=0}^{k} \frac{2k}{k+j} C_{k+j}^{k-j} \left(-4e^{2it}\right)^j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^k b_{2k-1}^{(n)}}{2e^{it}} \sum_{j=1}^{k} \frac{2k-1}{k+j-1} C_{k+j-1}^{k-j} \left(-4e^{2it}\right)^j.$$

Далее, обозначив $k-j=s$, можем написать

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{2k}{k+j} C_{k+j}^{k-j} \left(-4e^{2it}\right)^{j} = \left(-4e^{2it}\right)^{k} \sum_{s=0}^{k} \frac{2k}{2k-s} C_{2k-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{2k-1}{k+j-1} C_{k+j-1}^{k-j} \left(-4e^{2it}\right)^{j} = \left(-4e^{2it}\right)^{k} \sum_{s=0}^{k} \frac{2k-1}{2k-1-s} C_{2k-1-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s}.$$

Отсюда

$$f_{S_V^\varsigma}(t) = b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k b_{2k}^{(n)} \left(-4e^{2it}\right)^{k} \sum_{s=0}^{k} \frac{2k}{2k-s} C_{2k-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{[n/2]} \tfrac{(-1)^k b_{2k-1}^{(n)}}{2e^{it}} \left(-4e^{2it}\right)^{k} \sum_{s=0}^{k} \frac{2k-1}{2k-1-s} C_{2k-1-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s} =$$

$$= b_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k b_{2k}^{(n)} - 2\sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k b_{2k}^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{[n/2]} 2^{2k} e^{it2k} b_{2k}^{(n)} \sum_{s=0}^{k} \tfrac{2k}{2k-s} C_{2k-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{[n/2]} 2^{2k-1} e^{it(2k-1)} b_{2k-1}^{(n)} \sum_{s=0}^{k} \frac{2k-1}{2k-1-s} C_{2k-1-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s} =$$

$$= b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} 2^k e^{itk} b_k^{(n)} \sum_{s=0}^{[k/2]} \frac{k}{k-s} C_{k-s}^{s} \left(-4e^{2it}\right)^{-s}.$$

Преобразуем известное разложение полиномов Чебышева (см., например, [41], задача 4.22)

$$\cos\left(k \arccos x\right) = \sum_{s=0}^{[k/2]} (-1)^s \frac{k}{k-s} C_{k-s}^{s} 2^{k-2s-1} x^{k-2s} =$$

$$= 2^{k-1} x^k \sum_{s=0}^{[k/2]} \frac{k}{k-s} C_{k-s}^{s} \cdot \left(-4x^2\right)^{-s}.$$

Тогда

$$f_{S_V^\xi}(t) = b_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} 2^k e^{itk} b_k^{(n)} 2^{1-k} e^{-itk} \cos\left(k \arccos e^{it}\right) =$$

$$= b_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k \arccos e^{it}\right) b_k^{(n)}.$$

Поскольку $b_k^{(n)} = b_{-k}^{(n)}$, окончательно получаем

$$f_{S_V^\xi}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \cos\left(k \arccos e^{it}\right) b_k^{(n)}.$$

□

Прямое доказательство ЦПТ для случайного поля (η_t)

Как уже отмечалось выше, ассоциированное случайное поле (η_t) является однородным эргодическим мартингал–разностным случайным полем, причем $M\eta_0^2 = p > 0$. Следовательно, для него справедлива ЦПТ (см. Теорему 2.1). Однако результат Теоремы 4.15 позволяет весьма просто получить прямое доказательство асимптотической нормальности суммарного спина S_V^η методом характеристических функций.

Теорема 4.17. *Пусть $f_{S_V^\eta/\sqrt{DS_V^\eta}}(t)$ — характеристическая функция нормированного суммарного спина $\dfrac{S_V^\eta}{\sqrt{DS_V^\eta}}$. Тогда*

$$f_{S_V^\eta/\sqrt{DS_V^\eta}}(t) \to e^{-t^2/2} \qquad \text{при } V \uparrow \mathbb{Z}^d.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $MS_V^\xi = p\,|V|$ и

$$DS_V^\eta = M\left(S_V^\eta\right)^2 = \sum_{t\in V} M\eta_t^2 = p\,|V|\,.$$

В силу Теоремы 4.15, можем написать

$$f_{S_V^\eta/\sqrt{DS_V^\eta}}(t) = M\exp\left\{it\frac{S_V^\eta}{\sqrt{p\,|V|}}\right\} = \sum_{j=0}^{|V|}\left(\cos\frac{t}{\sqrt{p\,|V|}}\right)^j P\left(S_V^\xi = j\right).$$

Далее, последовательно применив разложения в ряд Маклорена для функций

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^4\right)$$

и

$$(1+x)^j = 1 + jx + o\left(x^2\right),$$

получим

$$\left(\cos\frac{t}{\sqrt{p\left|V\right|}}\right)^j = \left(1 - \frac{t^2}{2p\left|V\right|} + o\left(\left|V\right|^{-2}\right)\right)^j =$$

$$= 1 - j\cdot\frac{t^2}{2p\left|V\right|} + j\cdot o\left(\left|V\right|^{-2}\right) + o\left(\left|V\right|^{-4}\right).$$

Тогда

$$f_{S_V^\eta/\sqrt{DS_V^\eta}}\left(t\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\left(1 - j\cdot\frac{t^2}{2p\left|V\right|} + j\cdot o\left(\left|V\right|^{-2}\right) + o\left(\left|V\right|^{-4}\right)\right)P\left(S_V^\xi = j\right) =$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2p\left|V\right|}MS_V^\xi + o\left(\left|V\right|^{-2}\right)MS_V^\xi + o\left(\left|V\right|^{-4}\right) =$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2p\left|V\right|}p\left|V\right| + o\left(n^{-2}\right)p\left|V\right| + o\left(\left|V\right|^{-4}\right) = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(\left|V\right|^{-1}\right),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Формула связи для моментов суммарных спинов S_V^ξ и S_V^η

Результат следующей теоремы позволяет выразить момент $M\left(S_V^\xi\right)^k$ любого конечного порядка k суммарного спина S_V^ξ в виде линейной комбинации четных моментов суммарного спина S_V^η до порядка $2k$ включительно, $k = 1, 2, ...$

Теорема 4.18. *Для всех* $k = 1, 2, ...$

$$M\left(S_V^\xi\right)^k = \sum \frac{k!}{m_1!m_2!...m_k!\left(1!\right)^{m_1}\left(2!\right)^{m_2}...\left(k!\right)^{m_k}}\cdot\frac{1}{\left(2m-1\right)!!}\sum_{i=1}^{m} a_{m,i}M\left(S_V^\eta\right)^{2i},$$

где суммирование ведется по всем целым $m_1, m_2, ..., m_k \geq 0$, *таким, что* $1\cdot m_1 + 2\cdot m_2 + ... + k\cdot m_k = k$, $m = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, *а коэффициенты* $a_{m,i}$ *определяются из следующего соотношения*

$$\prod_{s=0}^{m-1}\left(x^2 - s^2\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{m,i}x^{2i}.$$

Доказательство. В силу Теоремы 4.16, имеем

$$f_{S_V^\xi}(t) = P\left(S_V^\eta = 0\right) + 2\sum_{j=1}^{|V|} \cos\left(j \arccos e^{it}\right) P\left(S_V^\eta = j\right).$$

Поскольку k-ый момент случайной величины равен значению k-ой производной ее характеристической функции в точке 0, то

$$M\left(S_V^\xi\right)^k = i^{-k}\left(P\left(S_V^\eta = 0\right) + 2\sum_{j=1}^{|V|} \cos\left(j \arccos e^{it}\right) P\left(S_V^\eta = j\right)\right)^{(k)}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= i^{-k} \cdot 2\sum_{j=1}^{|V|} \left(\cos\left(j \arccos e^{it}\right)\right)^{(k)}\Big|_{t=0} P\left(S_{|V|}^\eta = j\right).$$

Обозначим $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$. Воспользовавшись известной формулой для вычисления производных высших порядков от сложной функции (см., например, [40], стр. 113), можем написать

$$\frac{d^k}{dx^k} T_j(x(t)) =$$

$$= \sum_{\substack{m_1, m_2, \ldots, m_k \geq 0 \\ 1\cdot m_1 + 2\cdot m_2 + \ldots + k\cdot m_k = k}} \frac{k!}{m_1! m_2! \cdot \ldots \cdot m_k! \, (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (k!)^{m_k}} \cdot$$

$$\cdot T_j^{(m_1+m_2+\ldots+m_k)}\left(e^{it}\right) \prod_{j=1}^{k} \left(\left(e^{it}\right)^{(j)}\right)^{m_j}.$$

Далее,

$$\prod_{j=1}^{k} \left(\left(e^{it}\right)^{(j)}\right)^{m_j} = \prod_{j=1}^{k} \left(i^j e^{it}\right)^{m_j} = i^{\sum_{j=1}^{k} j\cdot m_j} e^{it\sum_{j=1}^{k} m_j} = i^k e^{it\sum_{j=1}^{k} m_j},$$

и при $t = 0$ получаем

$$\prod_{j=1}^{k} \left(\left(e^{it}\right)^{(j)}\right)^{m_j}\Bigg|_{t=0} = i^k e^{it\sum_{j=1}^{k} m_j}\Bigg|_{t=0} = i^k.$$

Обозначим $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Для производной порядка m полинома Чебышева $T_j(x)$ при $x = 1$ имеет место соотношение

$$T_j^{(m)}(1) = \prod_{s=0}^{m-1} \frac{j^2 - s^2}{2s+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^k}{dx^k}T_j\left(e^{it}\right)\Big|_{t=0}=i^k\cdot$$

$$\cdot\sum_{\substack{m_1,m_2,...,m_k\geq 0\\ 1\cdot m_1+2\cdot m_2+...+k\cdot m_k=k}}\frac{k!}{m_1!m_2!\cdot...\cdot m_k!\,(1!)^{m_1}\,(2!)^{m_2}\cdot...\cdot(k!)^{m_k}}\cdot\prod_{s=0}^{m-1}\frac{j^2-s^2}{2s+1},$$

и для всех $k=1,2,...,$ получаем

$$M\left(S_V^{\xi}\right)^k=2\sum_{j=1}^{|V|}P\left(S_V^{\eta}=j\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{\substack{m_1,m_2,...,m_k\geq 0\\ 1\cdot m_1+2\cdot m_2+...+k\cdot m_k=k}}\frac{k!}{m_1!m_2!\cdot...\cdot m_k!\,(1!)^{m_1}\,(2!)^{m_2}\cdot...\cdot(k!)^{m_k}}\cdot\prod_{s=0}^{m-1}\frac{j^2-s^2}{2s+1}\right].$$

Далее, можем написать

$$M\left(S_V^{\xi}\right)^k=2\sum_{\substack{m_1,m_2,...,m_k\geq 0\\ 1\cdot m_1+2\cdot m_2+...+k\cdot m_k=k}}\frac{k!}{m_1!m_2!\cdot...\cdot m_k!\,(1!)^{m_1}\,(2!)^{m_2}\cdot...\cdot(k!)^{m_k}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{|V|}\prod_{s=0}^{m-1}\frac{j^2-s^2}{2s+1}P\left(S_V^{\eta}=j\right)=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,m_2,...,m_k\geq 0\\ 1\cdot m_1+2\cdot m_2+...+k\cdot m_k=k}}\frac{k!}{m_1!m_2!\cdot...\cdot m_k!\,(1!)^{m_1}\,(2!)^{m_2}\cdot...\cdot(k!)^{m_k}}\cdot\frac{1}{(2m-1)!!}\cdot$$

$$\cdot 2\sum_{j=1}^{|V|}\prod_{s=0}^{m-1}\left(j^2-s^2\right)P\left(S_V^{\eta}=j\right),$$

Рассмотрим

$$2\sum_{j=1}^{|V|}\prod_{s=0}^{m-1}\left(j^2-s^2\right)P\left(S_V^{\eta}=j\right).$$

Понятно, что $\prod_{s=0}^{m-1}\left(j^2-s^2\right)$ представляет собой многочлен от j^2 степени m с некоторыми коэффициентами $a_{m,i}$, $i = \overline{1, m}$, а именно

$$\prod_{s=0}^{m-1} \left(j^2 - s^2\right) = j^2 \left(j^2 - 1\right) \left(j^2 - 2^2\right) \cdot ... \cdot \left(j^2 - (m-1)^2\right) =$$

$$= a_{m,m} j^{2m} + a_{m,m-1} j^{2(m-1)} + a_{m,m-2} j^{2(m-2)} + ... + a_{m,2} j^4 + a_{m,1} j^2 = \sum_{i=1}^{m} a_{m,i} j^{2i},$$

причем $a_{m,m} = 1$. Тогда

$$2 \sum_{j=1}^{|V|} \prod_{s=0}^{m-1} \left(j^2 - s^2\right) P\left(S_V^\eta = j\right) = 2 \sum_{j=1}^{|V|} \sum_{k=1}^{m} a_{m,k} j^{2k} P\left(S_V^\eta = j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{m,i} 2 \sum_{j=1}^{|V|} j^{2i} P\left(S_V^\eta = j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{m,k} \sum_{j=-|V|}^{|V|} j^{2i} P\left(S_V^\eta = j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{m,i} M\left(S_V^\eta\right)^{2i}.$$

□

Как уже отмечалось выше, вне критической области значений параметров (β, h) для модели Изинга справедлива ЦПТ, а, следовательно, и ЛПТ. Результаты Теорем 4.14, 4.16 и 4.18 также могут быть использованы при доказательстве предельных теорем для модели Изинга, поскольку соответствующие теоремы (ЦПТ и ЛПТ) справедливы для мартингальной модели. Такой подход позволит не только получить новые доказательства предельных теорем для модели Изинга вне критической области значений параметров, но и установить предельные законы в критической точке, которые не могут быть получены классическими методами. Дело в том, что для мартингальной модели ЦПТ и ЛПТ остаются справедливыми и в критической точке. Поэтому формулы связи, полученные в Теоремах 4.14, 4.16 и 4.18, могут быть использованы при нахождении предельного закона для суммарного спина модели Изинга в ее критической точке.

Литература

1. Banys P., CLT for linear random fields with stationary martingale–difference innovations. Lith. Math. J., 2011, 303–309
2. Brush G., History of the Lenz–Ising model. Reviews of Modern Physics 39, 1967, 883–894
3. Cairoly R., Walsh J., Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 1975, 111–183
4. Chow Y. S., Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 1960, 254–286
5. Comets F., Janžura M., A central limit theorem for conditionally centred random fields with an application to Markov fields. J. Appl. Prob. 35, 1998, 608–621
6. Dachian S., Nahapetian B.S., On Gibbsiannes of Random Fields. Markov Processes and Related Fields 15, 2009, 81–104
7. Dedecker J., A central limit theorem for stationary random fields. Probab. Theory Relat. Fields 110, 1998, 397–426
8. Dobrushin R.L., The description of random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. Theory Probab. Appl. 13, 1968, 197–224
9. Dobrushin R.L., Gibbs random fields for latties systems with pair-wise interaction. Funct. Anal. Appl. 2, 1968, 292–301
10. Dobrushin R.L., Gibbsian random fields. The general case. Funct. Anal. Appl. 3, 1969, 27–35
11. Dobrushin R.L., The problem of uniqueness of a Gibbsian random field and the problem of phase transitions. Funct. Anal. Appl. 2, 1968, 302–312
12. Dobrushin R.L., Tirozzi B., The Central Limit Theorem and the Problem of Equivalence of Ensembles. Commun. Math. Phys. 54, 1977, 173–192
13. Doob J. L., Stochastic processes. New York, Wiley, 1953
14. Jenish N., Asymptotic Theory for Spatial Processes. 2008, http://hdl.handle.net/1903/8535
15. Ellis R.S., Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006
16. El Machkouri M., Stoica R., Asymptotic normality of kernel estimates in a regression model for random fields. Journal of Nonparametric Statistics 22, 2010, 955–971
17. El Machkouri M., Volný D., On the central and local limit theorem for martingale difference sequences. Stochastics and Dynamics 4, 2004, 153–173
18. El Machkouri M., Volný D., Wu W.B., A central limit theorem for stationary random fields. http://arxiv.org/abs/1109.0838, 2011

19. Georgii H.-O., Gibbs Measures and Phase Transitions, De Gruyter, Berlin, 1988
20. Goldstein S., A note on specifications. Z. Wahrsch. verw. Geb. 46, 1978, 45–51
21. Hall P., Heyde C.C., Martingale limit theory and its applications. Academic Press, New York–London, 1980
22. Helms L.L., Mean convergence of martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 1958, 439–446
23. Illig A., Troung-Van B., Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales. Preprint, 2003
24. Ivanoff G., Mertzbach E., Set–Indexed martingales. CRC Press, Boca Raton. FL, 2000
25. Khachatryan L.A., Nahapetian B.S., Randomization in the construction of multidimensional martingales. Journal of Contemporary Mathematical Analysis 48, 2013, 35–45
26. Khachatryan L.A., Nahapetian B.S., Multidimensional martingales associated with the Ising model. ВЕСТНИК Казанского Государственного Энергетического университета 4 (19), 2013, 87–101
27. Krikeberg K., Convergence of martingales with directed index set. Trans. Amer. Math. Soc. 83, 1956, 313–337
28. Lanford O.E., Ruelle D., Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. Commun. Math. Phys. 13, 1969, 194–215
29. Malyshev V.A., The central limit theorem for Gibbsian random fields. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 16, 1975, 1141–1154
30. Minlos R.A., Halfina A.M., Central limit theorem for the energy and the number of particles in lattice systems of gas. Izv. Akad. Nauk SSSR, 34, 1970, 1173–1191
31. Nahapetian B.S., The central limit theorem for random fields with mixing property. Multicomponent random systems, Dobrushin R.L., Sinai Ya.G. (eds.), Dekker, Ney York, Basel, 1980
32. Nahapetian B.S., Limit theorems and some applications in statistical physics. Teubner-Texte zur Mathematik 123 (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.Leipzig), 1991
33. Nahapetian B.S., Billingsley–Ibragimov Theorem for martingale–difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. C. R. Acad. Sci. Paris 320, 1995, 1539–1544
34. Nahapetian B.S., Models with even potential and the behaviour of total spin at the critical point. Commun. Math. Phys. 189, 1997, 513–519
35. Nahapetian B.S., Horomyan G.T., An algebraic approach to the problem of specification description by means of one-point subsystems. Journal of Contemporary Mathematical Analysis 48, 2013, 46–49

36. Nahapetyan B.S., Petrosyan A.N., Martingale–difference Gibbs random fields and central limit theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math. 17, 1992, 105–110
37. Nahapetyan B.S., Petrosyan A.N., Martingale–difference random fields. Limit theorems and some applications. Vienna, Preprint ESI 283, 1995
38. Pogosyan S., Roelly S., Invariance principle for martingale–difference random fields. Statist. Probab. Lett. 38, 1998, 235–245
39. Tjøstheim D., Statistical spatial series modeling II. Some further results on unilateral lattice processes. Adv. Appl. Probab. 3, 1983, 562–584
40. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу, Москва, Высшая школа, 1999
41. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В., Численные методы в задачах и упражнениях. Москва, Высшая школа, 2000
42. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В., Независимые и стационарно связанные величины. Москва, Наука, 1965
43. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В., Эргодическая теория. Москва, Наука, 1980
44. Мейер П. А., Вероятность и потенциал. Москва, Мир, 1973
45. Нахапетян Б.С., Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применение 3, 1987, 589–594
46. Нахапетян Б.С., Петросян А.Н., Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингал-разностных случайных полей. Известия НАН Армении, Математика, т.1, 2004, 59–68
47. Риордан Дж., Комбинаторные тождества. Москва, Наука, 1982
48. Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты. Москва, Мир, 1971
49. Сенатов В.В., Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. Москва, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008
50. Хачатрян Л.А., Асимптотика моментов сумм компонент мартингал–разностных случайных полей, Вестник Российско–Армянского (Славянского) университета, Физико–математические и естественные науки 2, 2013, 3–15
51. Хачатрян Л.А., Точность гауссовской аппроксимации для мартингал–разностных случайных полей. Известия НАН Армении. Математика 49, 2014, 83–90
52. Ширяев А.Н., Вероятность. Москва, Наука, 1989