УСКОРЕННАЯ СХОДИМОСТЬ ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

А.Б. Нерсесян, А.В. Погосян

Институт математики НАН РА

Пр. Баграмяна 24 б, Ереван 375019, Республика Армения

e-mails: nerses@instmath.sci.am, arnak@instmath.sci.am

Введение

Аппроксимация гладкой функции на конечном отрезке частичной суммой ряда Фурье (или классической тригонометрической интерполяционной формулой), вообще говоря, неэффективна из за медленной L_2-сходимости и существенного влияния явления Гиббса вблизи границы.

Не так давно были предложены методы, комбинирующие тригонометрическую и полиномиальную интерполяцию, позволяющие успешно преодолеть явление Гиббса и получить хорошее приближение для гладкой функции [1-6]. При этом (Baszenski, Delvos,Tasche [1]) используются значения производных разлагаемой функции на концах отрезка, а также (Gelb, Gottlieb [4-5]) полиномы Гегенбауера или (Eckhoff, Wasberg [2-3]) полиномы Бернулли.

В работе [6] показано, что применение полиномов Бернулли вполне эффективно как в одномерном, так и в двухмерном случаях. Предложенная при этом схема прошла широкую экспериментальную проверку и был замечен неожиданный эффект, заключающийся в ускоренной сходимости внутри области интерполяции. Пока еще нами не найдено достаточное теоретическое обоснование этого явления, в то время как практическая польза от его использования несомненна.

Предлагаемая работа содержит подробное экспериментальное подтверждение упомянутого явления, условно названного нами эффектом Фурье-Бернулли (ФБ-эффектом), а также описание одного применения этого эффекта.

Все численные результаты получены с применением системы MATHEMATICA 3.0 [7].

1. Использование полиномов Бернулли

Кратко изложим схему использования полиномов Бернулли для интерполяции функции одной переменной (подробности см. в [2,3]).

Для функции $f \in C^{Q+1}[-1,1]$ $(Q \geq 0)$ предлагается следующая интерполяционная формула

$$f \approx f_A^N = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{i\pi nx} + \sum_{k=0}^{Q} A_k \left(B_k(x) - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{B}_{k,n} e^{i\pi nx} \right), \tag{1.1}$$

где

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) e^{-i\pi n x_k},\ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N,\ x_k = \frac{2k}{2N+1},$$

$$A_k = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1),\ k = 0, 1, \cdots, Q. \tag{1.2}$$

Здесь $B_k(x)$ - полиномы Бернулли, которые определяются рекурентно, как

$$B_0(x) = \frac{x}{2},\ B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx,\ x \in [-1,1],\ k = 1, 2, \cdots,$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^{1} B_k(t) dt = 0,\ k = 1, 2, \cdots.$$

При этом скорость сходимости (см. [2,3]) имеет порядок $o(\frac{1}{N^Q})$, $N \to \infty$. Алгоритм (1.1)-(1.2) назовем алгоритмом **A**.

Если числа $\{A_k\}$ неизвестны, то их приближенные значения $\{A_k^d\}$ можно вычислить из следующих систем ([6])

$$\frac{\widehat{f}_n - \widehat{f}_{-n}}{2} = \sum_{k=0}^{Q_1} A_{2k}^d \widehat{B}_{2k,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty, \tag{1.3}$$

$$\frac{\widehat{f}_n + \widehat{f}_{-n}}{2} = \sum_{k=0}^{Q_2} A_{2k+1}^d \widehat{B}_{2k+1,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty, \tag{1.4}$$

где $Q_1 = Q_2 = \frac{Q+1}{2}$ при нечетных Q и $Q_1 = \frac{Q}{2} + 1,\ Q_2 = \frac{Q}{2}$ – при четных.

Нетрудно видеть ([2,3]), что при постоянном Q и $N \to \infty$ ошибки $\{A_k - A_k^d\}$ имеют порядок $o(\frac{1}{N^{Q-k}})$ соответственно.

Алгоритм (1.1), (1.3) и (1.4), где эти системы решаются при $n = N,\ N/2,\ 2N/3,\ \cdots$ ([4]), назовем алгоритмом $\mathbf{B}$, а соответствующую интерполяцию функции f обозначим, в отличии от (1.1), через f_B^N. Порядок его сходимости такой же, как и у алгоритма $\mathbf{A}$, однако естественно ожидать, что сама ошибка будет больше.

Соответствующие алгоритмы предложены и в двухмерном случае ([6]).

2. ФБ-эффект в одномерном случае.

С алгоритмом $\mathbf{B}$ связано одно неожиданное явление. Он дает более точное приближение внутри отрезка $[-1,\ 1]$ (иногда даже на несколько порядков), чем алгоритм $\mathbf{A}$, несмотря на то, что имеющиеся значения производных, получаемые из систем (1.3), (1.4) практически всегда чувствительно отличаются от точных.

Оказывается, что упомянутые ошибки $\{A_k - A_k^d\}$ "гасят" общую ошибку алгоритма $\mathbf{B}$, в результате чего он лучше "чувствует" поведение функции $f(x)$ вдали от границы отрезка $[-1, 1]$.

В подтверждение сказанного рассмотрим несколько типичных примеров.

2.1. Сначала рассмотрим функцию, разложение которой в ряд Тейлора с началом в точке $x = 0$ сходится при $|x| \leq 1$ довольно медленно

$$f(x) = ln(2 + x). \tag{2.1}$$

В таблице 1 представлены L_2-погрешности на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, после применения алгоритмов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ для функции (2.1) . При $Q = 0$ эффект практически незаметен, но при $Q = 1$ и $2N+1 = 513$ алгоритм $\mathbf{A}$ уступает по точности алгоритму $\mathbf{B}$ более чем в 10^4 раз. Сравнение с таблицей 10 (см. ниже п. 3) еще более проясняет явление ФБ-эффекта.

$2N+1 \rightarrow$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \rightarrow$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-9}$
	$B \rightarrow$	$8.6 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$
$Q=1$	$A \rightarrow$	$6 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-9}$
	$B \rightarrow$	$2 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$7 \cdot 10^{-14}$
$Q=2$	$A \rightarrow$	$6 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-14}$
	$B \rightarrow$	$5 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-16}$	$5 \cdot 10^{-16}$

Таблица 1. *L_2-погрешности на отрезке* [-1/2,1/2] *после применения алгоритмов* **A** *и* **B** *для функции (2.1).*

В таблице 2 представлены равномерные ошибки. Здесь, при $Q=1$ и $2N+1=513$, **A** уступает **B** точно в 10^4 раз. Как показывают эксперименты, ФБ-эффект более заметен для L_2-погрешностей, чем для равномерных.

$2N+1 \rightarrow$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \rightarrow$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-9}$
	$B \rightarrow$	$2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-9}$
$Q=1$	$A \rightarrow$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-9}$
	$B \rightarrow$	$5 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-13}$
$Q=2$	$A \rightarrow$	$2 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$7 \cdot 10^{-14}$
	$B \rightarrow$	$2 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$

Таблица 2. *Равномерные погрешности на отрезке* [-1/2,*1/2]* после *применения алгоритмов* **A** *и* **B** *для функции (2.1).*

Теперь покажем на этом примере, что ФБ-эффект имеет место и на любом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > \frac{1}{2N+1}$, причем с уменьшением длины этого отрезка эффект усиливается.

На рис. 1 и 2 представлены графики функции $f-f_A^{33}$ и $f-f_B^{33}$ соответственно, при $Q=1$. Эти данные показывают, что, - уже начиная со второго минимума,- ФБ-эффект проявляется явно и далее усиливается с приближением к середине отрезка.

2.2 Рассмотрим теперь пример другой функции

$$f(x) = 10(1-x^2)^3 ln(2+x). \tag{2.2}$$

Эта функция, как и (2.1), бесконечно-дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$, но имеет нулевые числа A_0, A_1 и A_2. Как можно убедиться из таблицы 3, в алгоритме **B** даже эти числа вычисляются со значительной ошибкой.

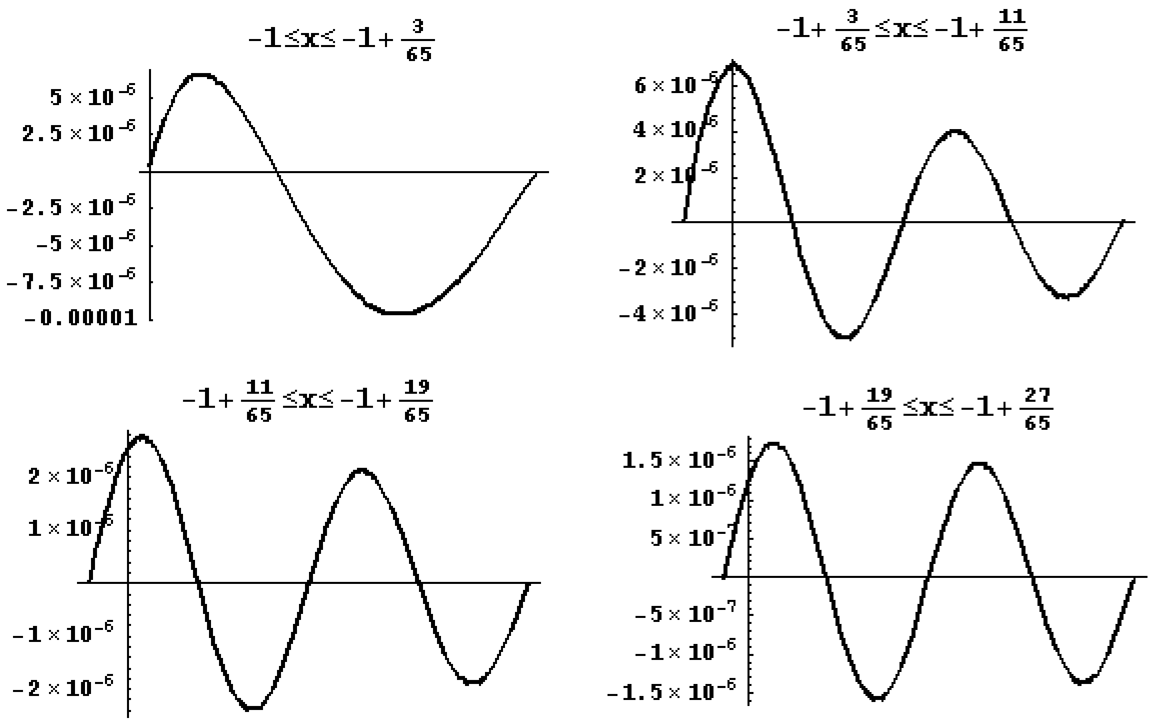

Рис.1.Графики ошибки $f - f_A^{33}$ на разных отрезках, при $Q = 1$, для примера (2.1).

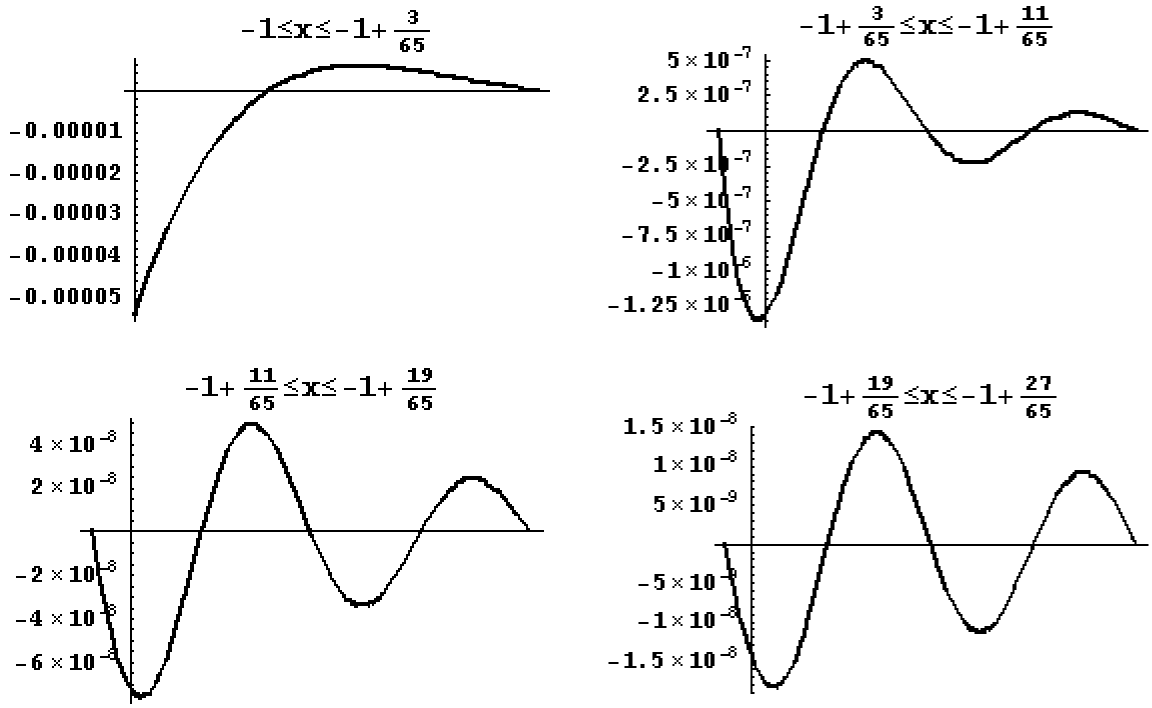

Рис.2.Графики ошибки $f - f_B^{33}$ на разных отрезках, при $Q = 1$, для примера (2.1).

$2N+1 \to$		65	129	257	513
$Q=0$	$\|A_0 - A_0^d\| \to$	0.00007	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$
$Q=1$	$\|A_0 - A_0^d\| \to$	0.00007	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$
	$\|A_1 - A_1^d\| \to$	0.1	0.03	0.007	0.002
$Q=2$	$\|A_0 - A_0^d\| \to$	0.0003	0.00002	$1 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-8}$
	$\|A_1 - A_1^d\| \to$	0.1	0.03	0.007	0.002
	$\|A_2 - A_2^d\| \to$	3	0.7	0.2	0.05

Таблица 3. *Ошибки* $\{|A_k - A_k^d|\}$, *для примера (2.2),*

при различных значениях Q *и* N

Несмотря на это, эффект проявляется с такой же интенсивностью как и в предыдущем случае. В таблице 4 представлены L_2 погрешности на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ после применения алгоритмов **A** и **B**.

$2N+1 \to$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \to$	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-11}$
	$B \to$	$1 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-12}$
$Q=1$	$A \to$	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-11}$
	$B \to$	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-15}$
$Q=2$	$A \to$	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-11}$
	$B \to$	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-15}$

Таблица 4. L2*-погрешности на отрезке* [-1/2,1/2] *после применения*

алгоритмов **A** *и* **B** *для функции (2.2).*

Сопоставление результатов, приведенных в таблицах 3 и 4, подтверждает парадоксальность ФБ-эффекта.

2.3. Рассмотрим теперь пример функции, третья производная которой, терпит разрыв на отрезке $[-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -0.8, \\ e^{3x} \sin^3 9.5(x+0.8), & -0.8 \le x \le 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

L_2-погрешности на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ представлены в таблице 5. Несмотря на разрыв в точке $x = -0.8$, ФБ-эффект имеет место. Заметим, что точка разрыва находится вне отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. В этом случае ФБ-эффект существует уже при $Q = 0$ и $2N + 1 = 65$.

$2N+1 \to$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \to$	0.004	0.0005	0.00007	$8 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.0003	0.00004	$5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-7}$
$Q=1$	$A \to$	0.004	0.0005	0.00007	$8 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.00001	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-10}$
$Q=2$	$A \to$	0.0002	$7 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$
	$B \to$	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-10}$

Таблица 5. *L2-погрешности на отрезке* `[-1/2,1/2]` *после применения алгоритмов* **A** *и* **B** *для функции (2.3).*

Передвинем теперь разрыв вовнутрь отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, рассмотрев функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -0.1, \\ e^{3x} \sin^3 9.5(x+0.1), & -0.1 \le x \le 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

Таблица 6 (равномерные погрешности) показывает, что ни для какого $Q = 0, 1, 2$, заметный ФБ-эффект не проявляется, хотя алгоритм $\mathbf{B}$ нигде не уступает алгоритму $\mathbf{A}$.

$2N+1 \to$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \to$	0.002	0.0002	0.00002	$3 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.001	0.0001	0.00001	$2 \cdot 10^{-6}$
$Q=1$	$A \to$	0.001	0.00009	0.00001	$2 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.0005	0.00009	$8 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$Q=2$	$A \to$	0.0007	0.00009	$8 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.0005	0.00009	$8 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Таблица 6. *Равномерные погрешности на отрезке* `[-1/2,1/2]` *после применения алгоритмов* **A** *и* **B** *для функции (2.4).*

Однако для L_2- погрешностей (таблица 7) ФБ-эффект проявляется уже при $Q = 0$ (в 2 раза), а при $Q = 1$ алгоритм $\mathbf{A}$ уступает $\mathbf{B}$ по точности уже в 10 раз. При $Q = 2$ явление исчезает. Последнее объяснимо, поскольку функция (2.4) не обладает гладкой третьей производной.

$2N+1 \to$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \to$	0.0009	0.00009	0.00001	$1 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.0004	0.00006	$7 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$
$Q=1$	$A \to$	0.0008	0.00007	$9 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
	$B \to$	0.0001	0.00001	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$Q=2$	$A \to$	0.0003	0.00001	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
	$B \to$	0.0001	0.00001	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$

Таблица 7. *L2-погрешности на отрезке* `[-1/2,1/2]` *после применения алгоритмов* **A** *и* **B** *для функции (2.4).*

2.4. Рассмотрим, наконец, пример бесконечно-дифференцируемой функции, которая, однако, неаналитична на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$

$$f(x) = 100(1-x)e^{-\frac{3}{|x|}}. \tag{2.5}$$

В таблице 8 представлены L_2-погрешности, соответствующие этому примеру. Как видим, здесь также явно заметен ФБ-эффект.

$2N+1 \rightarrow$		65	129	257	513
$Q=0$	$A \rightarrow$	0.00007	0.00001	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
	$B \rightarrow$	0.00004	$5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-8}$
$Q=1$	$A \rightarrow$	0.00006	$8 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
	$B \rightarrow$	$2 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$7 \cdot 10^{-12}$
$Q=2$	$A \rightarrow$	$3 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-12}$
	$B \rightarrow$	$4 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-15}$

Таблица 8. *L2-погрешности на отрезке* [-1/2,1/2] *после применения алгоритмов* **A** *и* **B** *для функции (2.5).*

2.5. Нами проведены десятки экспериментов с разными функциями. В результате можно сделать следующие выводы:

• В приведенных выше численных результатах отрезок $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ выбран ради определенности. Типичными являются результаты, приведенные на рисунках 1 и 2: эффект на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ тем больше, чем меньше α.

• ФБ-эффект обнаруживается, хотя и с меньшей интенсивностья, и в случае использования в полиномиально-тргонометрической интерполяции коэффициентов Фурье $\{f_n\}$ (см. [2,3]), вместо значении интерполируемой функции на равномерной сетке.

• В двухмерном случае ([6]), когда используются значения функции на равномерной сети, ФБ-эффект также проявляется явно. Соответственно при использовании коэффициентов Фурье ФБ-эффект наблюдается с меньшей интенсивностью.

• Примеры функций (2.4) и (2.5) показывают, что по-видимому, ФБ-эффект связан не с аналитичностью функции на отрезке, а с ее гладкостью. При разрыве некоторых производных функции в некоторых точках отрезка $[-1, 1]$ не последнюю роль играет местоположение разрывов (внутри отрезка, где ожидается эффект, вне его или на границе).

• ФБ-эффект более заметен для L_2-погрешностей, чем для равномерных.

• ФБ-эффект наблюдается (см.п. 2.2) даже в случае равенства нулю нескольких первых чисел A_k, когда интерполируемая функция, продолженная 2-периодически, имеет конечную гладкость.

• ФБ-эффект тем заметнее, чем медленнее растут производные интерполируемой функции.

3. Использование ФБ-эффекта для аппроксимации гладких функций.

Пока еще не найдено полное теоретическое обоснование ФБ-эффекта, но практически его уже можно использовать. Представим один из возможных путей.

Пусть $f \in C^{Q+1}[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ $(T > 2)$ и известны значения $\{f(x_k^T)\}$ на равномерной сетке $x_k^T = \frac{kT}{2N+1}$, $k = -N, \cdots, N$, но требуется аппроксимировать ее на отрезке $[-1, 1]$. Применим метод п. 1 к функции f на отрезке $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Такой алгоритм назовем условно алгоритмом **C**. Фактически производится интерполяция с использованием значений f вне отрезка интерползции $[-1, 1]$. Как и в алгоритме **B**, здесь также используются точно $(2N + 1)$ значений функции на равномерной сетке, но, благодаря ФБ-эффекту, получается намного более точное (иногда на несколько порядков) приближение на отрезке $[-1, 1]$. Приведем некоторые численные результаты.

В таблице 9 представлены равномерные погрешности на отрезке $[-1, 1]$ после применения алгоритма **C** для функции (2.1), для различных значений T и при $Q = 1$. Для сравнения, в таблице 10 представлены равномерные погрешности после применения алгоритмов **A** и **B**.

При $T = 2 + \frac{10}{N}$, $2N + 1 = 513$, $Q = 1$ алгоритм **C** обеспечивает в 300 раз более точное приближение, чем **B** и в 50 раз – чем **A**. Как видим, с увеличением T погрешности алгоритма **C** уменьшились, что согласуется с графиками из рисунков 1 и 2. При $T = 2 + \frac{110}{N}$, $2N + 1 = 513$, $Q = 1$ алгоритмы **A** и **B** отстают по точности почти в 10^5 раз. Заметим (см. таблицу 9), что при $2N + 1 = 65$ и

$T=2+\frac{110}{N}$ ошибка велика по той причине, что на отрезок $[-1,1]$ попадает лишь 23 точек сети из 65.

$2N+1 \rightarrow$	65	129	257	513
$T=2+\frac{10}{N} \rightarrow$	$2\cdot 10^{-7}$	$4\cdot 10^{-8}$	$9\cdot 10^{-9}$	$2\cdot 10^{-9}$
$T=2+\frac{50}{N} \rightarrow$	$4\cdot 10^{-7}$	$4\cdot 10^{-9}$	$2\cdot 10^{-10}$	$3\cdot 10^{-11}$
$T=2+\frac{110}{N} \rightarrow$	0.01	$4\cdot 10^{-8}$	$1\cdot 10^{-10}$	$7\cdot 10^{-12}$

Таблица 9. *Равномерные погрешности на отрезке* `[-1,1]` *после применения алгоритма* **C** *для функции (2.1), при* `Q=1`, *и для различных значении* `T`.

$2N+1 \rightarrow$	65	129	257	513
$A \rightarrow$	$9\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-6}$	$6\cdot 10^{-7}$	$1\cdot 10^{-7}$
$B \rightarrow$	0.00004	$9\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-6}$	$6\cdot 10^{-7}$

Таблица 10. *Равномерные погрешности на отрезке* `[-1,1]` *после применения алгоритмов* **A** *и* **B**, *для функции (2.1), при* `Q=1`.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Baszenski, F.J. Delvos, M. Tasche. A united approach to accelerating trigonometric expansions. Computers Math. Applic., Vol. 30, No 3-6, pp 33-49, 19995.

[2] K.S. Eckhoff and C.E. Wasberg. On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method, Thesis of Carl Erik Wasberg. Department of Mathematics. University of Bergen. Norway. 1996.

[3] K.S.Eckhoff. On a high order numerical method for solving partial differential equations in complex geometries. J. Scientific Comp. 12. 1997, pp 119-138.

[4] A. Gelb, D. Gottlieb. The resolution of the Gibbs phenomenon for "spliced" functions in one and two dimensions. Computers Math. Applic., vol 33, N11, pp 35-58,1997.

[5] D. Gottlieb, C.W.Shu. On the Gibbs phenomenon V; Recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function, Math. Comp. 43, 81-92 (1992).

[6] Нерсесян А.Б., Погосян А.В.. Метод Бернулли в многомерном случае. Депонировано в АрмНИИНТИ 09.03.00 N20-Ar00.

[7] Wolfram S. The MATHEMATICA book, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.