ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIV 1987 4

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О множествах пика гладких функций в поликруге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/X 1986)

Пусть U^n — единичный поликруг в пространстве $\mathbb{C}^n$: $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$, Γ^n — его n-мерный остов, $A^k(U^n)$ — класс функций, голоморфных в U^n, у которых все производные до k-го порядка включительно непрерывны на $\overline{U}^n$. Гладкое подмногообразие M остова называется интерполяционным многообразием, если для каждой точки $p \in M$ пересечение касательного пространства $T_p(M)$ с замкнутым конусом K_p в $T_p(\Gamma^n)$, образованного касательными векторами $\left.\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\right|_p, \ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial\theta_n}\right|_p$, где $\theta_i = \arg z_i$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяет условию $K_p \bigcap T_p(M) = \{0\}$.

Множества пика равномерной алгебры $A^0(U^n)$ хорошо изучены (см., например, ([1])). Случай гладких функций рассмотрен в ([2]), где показано, что всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса C^k является множеством пика для $A^{k-4}(U^n)$. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Т е о р е м а. *Всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия M класса C^k $(k \geqslant 5)$ на остове поликруга U^n является множеством пика для $A^{k-3}(U^n)$.*

При доказательстве используется метод, приведенный в ([3]) и соответствующим образом приспособленный для случая поликруга. Для заданного компакта $K \subset M$ сперва строится так называемая "почти аналитическая" функция пика $F(z)$.

Л е м м а 1. *Пусть M —то же, что в теореме, K —компакт на M. Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существует функция $F \in C^k(\Omega)$ такая, что*

а) $F(z) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $z \in K$;

б) $\overline{\partial} F = 0$ *на* M, *более того,* $\overline{\partial} F(z) = o(d(z, M)^{k-1})$, *где* $d(z, M)$ *—расстояние между* z *и* M;

в) $\operatorname{Re} F(z) \geqslant c d(z, M)^2$;

г) $|F(z)| \geqslant c d(z, M)$, *где* c *—абсолютная константа,* $z \in \overline{U^n} \bigcap \Omega$.

Отметим, что в случае строго псевдовыпуклой области оценка $|F(z)|$ получается несколько иная (см. ([4])): $|F(z)| \geqslant c d(z, M)^2$ вдоль комплексного касательного направления.

Рассмотрим замкнутую дифференциальную форму типа $(0,1)$ $g(z) = \overline{\partial}\dfrac{\lambda(z)}{F(z)}$, где $\lambda(z)$ бесконечно дифференцируемая, финитная в Ω функция, $\lambda(z) \equiv 1$ в некоторой окрестности компакта K и $0 \leqslant \lambda(z) \leqslant 1$.

Л е м м а 2. *Уравнение $\overline{\partial}u = g$ в области U^n имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве и удовлетворяющее оценке*

$$D^p u(z) = o(d(z,M)^{k-|p|-5}), \tag{1}$$

Здесь $p = (p_1, \dots, p_{2n})$—целочисленный вектор, $|p| = \sum\limits_{k=1}^{2n} p_k$ и

$$D^p u(z) = \frac{\partial^{|p|}u(z)}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} \partial \bar{z}_1^{p_{n+1}} \dots \partial \bar{z}_n^{p_{2n}}}.$$

Решение $u(z)$, допускающее оценку (1), выписывается весовой формулой, которая получена в ([5]). В случае $n=2$ эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} u(z) = &-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta_1|=|\zeta_2|} g(\zeta)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2}\frac{d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}-\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|z_1\times D_2\\ |z_1|\geqslant|\zeta_2|}} g_2(z_1,\zeta_2)d\bar{\zeta}_2\wedge\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}-\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{D_1\times z_2\\ |z_2|\geqslant|\zeta_1|}} g_1(\zeta_1,z_2)d\bar{\zeta}_1\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}+\\ &+\frac{\beta_1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta_2|\geqslant|\zeta_1|} g(\zeta)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1-1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2}\frac{d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\cdot\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}+\\ &+\frac{\beta_2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta_1|\geqslant|\zeta_2|} g(\zeta)\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\right)^{\beta_2-1}\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\right)^{\beta_1}\frac{d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\cdot\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}. \end{aligned}$$

Здесь β_1 и β_2 произвольные неотрицательные числа.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Функция

$$v(z) = \frac{\lambda(z)}{F(z)} - u(z),$$

где $u(z)$ является решением $\overline{\partial}$-уравнения с оценкой (1), очевидно, голоморфна в U^n. Далее, $\operatorname{Re} v(z) = \lambda(z)\dfrac{\operatorname{Re}F(z)}{|F(z)|^2} - \operatorname{Re} u(z)$. Из (1) при $k \geqslant 5$ и $p = 0$ следует, что $u(z) = o(d(z,M))$, т. е. $u(z)$ ограничена на $\overline{U}^n$. Поэтому с учетом в) и (1) имеем $\operatorname{Re} v(z) \geqslant -\max\limits_{z\in\overline{U}^n} > -\infty$. Добавив в случае необходимости к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0, \quad z \in \overline{U}^n \backslash K. \tag{2}$$

Функция

$$f(z)=\frac{1}{v(z)}=\frac{F(z)}{\lambda(z)-u(z)F(z)} \tag{3}$$

является искомой; она голоморфна в U^n, и, как следует из (2), $\operatorname{Re} F(z)>0$ при $z\in\overline{U}^n\backslash K$. Из (3) следует, что нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. с множеством K. На множестве $\overline{U}^n\backslash K$ функция f принадлежит классу C^k. Вычислив производные $D^p f$ и используя оценки (1), убеждаемся, что $f\in A^{k-3}(U^n)$.

Ереванский Государственный Университет

Ա. Ի. Պետրոսյան

Բազմաշրջանում ողորկ ֆունկցիաների պիկի բազմությունների մասին

Դիցուք U^n-ը $\mathbb{C}^n$ պարածության մեջ բազմաշրջան է, M-ը նրա հենքի վրա գտնվող ինտերպոլյացիոն բազմություն է, այսինքն յուրաքանչյուր $p\in M$ կետում M-ի շոշափող պարածությունը հատվում է $\left.\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right|_p,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right|_p$ վեկտորներով առաջացած փակ կոնի հետ միայն մեկ կետով: $A^k(U^n)$-ով նշանակվում է U^n-ում հոլոմորֆ և $\overline{U^n}$-ում մինչև k-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների դասը: Հոդվածի հիմնական արդյունքը հետևյալն է. եթե M-ը պատկանում է ողորկության C^k դասին, ապա կամայական $K\subset M$ կոմպակտ բազմությունը հանդիսանում է պիկի բազմություն $A^{k-3}(U^n)$-ի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

1 *У. Рудин* Теория функций в поликруге, Мир, М., 1974.
2 *R. Saerens*, Ph. D. dissertation, Unive sity of Washington, Seattle, 1983.
3 *M. Hakim, N. Sibony*, Duke Math. J., v. 45, p. 601–617 (1978).
4 *J. Chaumat, A. M. Chollet*, Ann. Inst.Fourier, v. 29, p. 171–200 (1979).
5 *G. M. Henkin, P. L. Polyakov*, Comptes rendus, 298, serie 1, 5–8 (1984).