ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
Volume 106 2006 No 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

А. И. Петросян

О множествах пика и интерполяции гладких функций в полидиске

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 7/VII 2006)

Ключевые слова: *полидиск, пик, интерполяция, гладкие функции*

1. Работа посвящена исследованию множеств пика и тесно связанных с ними множеств интерполяции для алгебр $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$. Приведем необходимые определения. Пусть
$\mathbb{U}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon \ |z_i| < 1, \ \ i = 1, \ldots, n\}$ — единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$;
$\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \ |z_i| = 1, \ i = 1, \ldots, n\}$ — его остов.
Для заданного целого числа m, $m \geqslant 0$, и $\alpha \in (0, 1]$ обозначим через $A^m(\mathbb{U}^n)$ алгебру функций, голоморфных в $\mathbb{U}^n$, производные которых порядка m непрерывно продолжаются на замыкание $\mathbb{U}^n$, и через $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ — подалгебру $A^m(\mathbb{U}^n)$, состоящую из функций, у которых производные порядка m удовлетворяют в $\mathbb{U}^n$ условию Гёльдера порядка α. Аналогично обозначаются подалгебры $\mathcal{C}^m(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{C}^{m,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ алгебры $\mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$ функций, непрерывных на остове $\mathbb{T}^n$.

Компактное подмножество K остова называется *множеством пика* для $A^m(\mathbb{U}^n)$ или $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$, если существует функция $f \in A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ (соответственно, $f \in A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$) такая, что $f = 1$ на K и $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$.

Это условие можно задать в эквивалентной форме: существует функция f такая, что

$$f(z) = 0 \ \text{ при } \ z \in K, \ \text{ и } \ \operatorname{Re} f(z) > 0 \ \text{ при } \ z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K. \tag{1}$$

Компакт K называется *интерполяционным множеством* для $A^m(\mathbb{U}^n)$ или $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$, если для каждой функции f из $\mathcal{C}^p(\mathbb{T}^N)$ (соответственно, $\mathcal{C}^{p,\alpha}(\mathbb{T}^N)$) существует $F \in A^m(\mathbb{U}^n)$ $(F \in A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n))$, которая равна f на K.

2. Задаче описания множеств пика и интерполяции для различных функциональных алгебр посвящено немало работ. Наиболее полно исследован случай полидиск-алгебры $A(\mathbb{U}^n) = A^0(\mathbb{U}^n)$. Хорошо известно (см., например, [1]), что множества пика и интерполяции $K \subset \mathbb{T}^n$ характеризуются тем, что *вариация любой ортогональной меры на них равна нулю,* т. е. условие $|\mu(K)| = 0$ выполняется для всякой борелевской меры μ на $\mathbb{T}^N$, такой, что $\mu \perp A(\mathbb{U}^n)$. Согласно классической теореме М. и Ф. Риссов, всякая мера, ортогональная к диск-алгебре $A(\mathbb{U})$, абсолютно непрерывна. Поэтому в одномерном случае (т. е. $n = 1$) множества пика и интерполяции для $A(\mathbb{U})$ суть замкнутые подмножества окружности лебеговой меры нуль.

Для алгебр гладких функций (т. е. при $m \geqslant 1$) дело обстоит иначе. Уже в одномерном случае множества пика и интерполяции не совпадают: множества пика конечны, (см. [2]), а интерполяционные множества могут быть и бесконечными и определяются условием, которое дано в [3].

Многомерный случай исследован меньше. Для формулировки результатов нам нужно следующее понятие.

Определение. Гладкое подмногообразие M остова $\mathbb{T}^n$ называется *интерполяционным многообразием*, если в каждой точке $q \in M$ касательное пространство $T_q(M)$ пересекается с замкнутым положительным конусом C_q на $T_q(\mathbb{T}^n)$, образованном касательными векторами

$$\partial/\partial\theta_1|_q, \ldots, \partial/\partial\theta_n|_q, \qquad \theta_i = \arg z_i.$$

только в начале координат.

Отметим, что, очевидно, размерность M не превосходит $n - 1$.

3. В работах [4] и [5] доказано следующее необходимое условие: *если K является множеством пика для $A^m(\mathbb{U}^n)$, $m \geqslant 1$, то в некоторой окрестности множества K существует интерполяционное многообразие M гладкости $\mathcal{C}^m$ такое, что $K \subset M$.* Интересно отметить, что этот результат неулучшаем в том смысле, что в общем случае не существует *замкнутого* подмногообразия M остова с перечисленными свойствами. В статье приведен соответствующий пример.

В [4] исследована также достаточность этого условия и доказано, что *всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса $\mathcal{C}^m$ является множеством пика для $A^{m-4}(\mathbb{U}^n)$*. В Теореме 1 этот результат усиливается.

Теорема 1. *Всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса $\mathcal{C}^{m,\alpha}$, $m \geqslant 3$, на остове полидиска $\mathbb{U}^n$ является множеством пика для $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.*

Доказательство Теоремы 1 основано на конструкции так называемой «почти аналитической» функции пика (Теорема 2), а также на оценке роста производных решения соответствующего $\overline{\partial}$-уравнения при подходе к особенностям правой части (Лемма 2). При этом достаточно ограничиться компактными подмножествами интерполяционного подмногообразия, имеющего максимально возможную размерность, т. е. $n-1$. Это следует из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть M — интерполяционное $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-гладкое подмногообразие остова $\mathbb{T}^n$, имеющее размерность k, $k \leqslant n-1$. Тогда на $\mathbb{T}^n$ существует $(n-1)$-мерное интерполяционное подмногообразие $\widetilde{M}$ той же гладкости и такое, что $M \subset \widetilde{M}$.*

Теорема 2. *Пусть M — интерполяционное подмногообразие размерности $n-1$ остова полидиска класса $\mathcal{C}^{m,\alpha}$, $m \geqslant 3$, K — компакт на M. Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существуют функция $F \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$ и константа $\gamma > 0$ такие, что*

a) $F(z) = 0$ *тогда и только тогда, если* $z \in K$;

b) $\operatorname{Re} F(z) \geqslant \gamma d(z,M)^2$ $(z \in \overline{\mathbb{U}}^n \cap \Omega)$, *где* $d(z,M)$ — *расстояние между* z *и* M;

c) $\overline{\partial} F = O\left[d(z,M)\right]^{m-1+\alpha}$;

d) $|F(z)| \geqslant \gamma d(z,M)$ $(z \in \overline{\mathbb{U}}^n \cap \Omega)$.

Доказательство. Пусть D — строго псевдовыпуклая область с границей класса $\mathcal{C}^{m,\alpha}$, в которую полидиск $\mathbb{U}^n$ вложен следующим образом:

1° $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus \mathbb{T}^n \subset D$,

2° $\mathbb{T}^n \subset \partial D$,

3° $T_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$ для всех $z \in M$,

где $T_z^c(\partial D)$ — комплексная гиперплоскость, содержащаяся в $T_z(\partial D)$. Условие 3° означает, что M является комплексно-касательным подмногообразием ∂D. Способ построения такой области D изложен в [8].

Далее, в работе [6] (см. также [7]) доказано, что в некоторой окрестности Ω компакта K существует «почти аналитическая» функция пика F, удовлетворяющая условиям a) и b) для области D, и, следовательно, для вложенного в D полидиска $\mathbb{U}^n$. Кроме этого, $\overline{\partial} F = 0$ на $\Omega \cap M$ вместе со всеми производными порядка до $m-1$ включительно. Поскольку $\overline{\partial} F \in \mathcal{C}^{m-1,\alpha}(\Omega)$, то $\overline{\partial} F(z) = O\left[d(z,M)\right]^{m-1+\alpha}$, т. е. имеет место c).

Отметим, что $F = u + iv$ обладает также следующим свойством:

$$\operatorname{grad} u(z) = -\frac{\chi_z}{|\chi_z\|^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} v(z) = -\frac{\tau_z}{|\tau_z\|^2}, \tag{2}$$

где χ_z — вещественная нормаль в точке z к границе области D, $\tau_z = J\chi_z$, а J — оператор в $\mathbb{R}^{2n}$, который соответствует умножению на мнимую единицу i в пространстве $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Чтобы доказать свойство d), достаточно показать, что для любой точки $z \in M$ вдоль направления, касательного к остову и ортогонального к $T_z(M)$, производная функции F отлична от нуля.

В самом деле, из условия $M \subset \partial D$ следует, что $T_z(M) \perp \chi_z$. Так как M имеет комплексно-касательное направление на ∂D, то $JT_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$, поэтому $JT_z(M) \perp \chi_z$, или, что то же, $T_z(M) \perp \tau_z$. Очевидно,

$$T_z(\mathbb{T}^n) \perp JT_z(\mathbb{T}^n) \quad \text{и} \quad T_z(\mathbb{T}^n) \bigoplus JT_z(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^{2n}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что $T_z(M) \perp JT_z(M)$ и размерность $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$ составляет $2n-2$. Таким образом, $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$ является ортогональным дополнением в $\mathbb{R}^{2n}$ комплексной нормали $N_z^c = \mathbb{R}[\chi_z] \bigoplus \mathbb{R}[\tau_z]$ к ∂D в точке z.

Пусть вектор ξ касателен к остову в точке z, т. е. $\xi \in T_z(\mathbb{T}^n)$, и ортогонален к $T_z(M)$. Из (3) следует, что ξ ортогонален также и к $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$, поэтому $\xi \in N_z^c$. С другой стороны, $\xi \perp \tau_z$, откуда следует, что вектор ξ параллелен τ_z. Так как, согласно (2), τ_z направлен вдоль градиента v, то $\xi v \neq 0$, следовательно, $\xi F \neq 0$, т. е. вдоль направления ξ производная F отлична от нуля. $\square$

Замечание. Обратим внимание на то, что, в неравенстве d) $d(z, M)$ участвует в первой, а не во второй степени, как это имеет место в случае строго псевдовыпуклой области. Это улучшение оценки является следствием того, что в отличие от границы строго псевдовыпуклой области, остов полидиска не имеет комплексных касательных векторов.

Пусть K — компактное подмножество интерполяционного многообразия M, окрестность Ω и функция F удовлетворяют заключению Теоремы 2. Пусть, далее, λ — вещественная функция класса $\mathcal{C}^\infty$ с носителем внутри Ω такая, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $\lambda = 1$ в некоторой окрестности множества K. Определим $(0,1)$-форму g на $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$

$$g = \begin{cases} \overline{\partial}\left(\lambda \dfrac{1}{F}\right) & \text{в } \Omega, \\ 0 & \text{вне } \Omega. \end{cases}$$

Лемма 2. *В области $\mathbb{U}^n$ уравнение $\overline{\partial} u = g$ имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus M$ и удовлетворяющее условиям:*

1° $\dfrac{\partial^{|p|} u(z)}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n}}$ *ограничена в* $\mathbb{U}^n$ *при* $0 \leqslant |p| \leqslant m-3$;

2° $\dfrac{\partial^{|p|} u(z)}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n}} = O\left[d(z, M)\right]^{m-3-|p|+\alpha}$ *при* $m-2 \leqslant |p| \leqslant m$.

При доказательстве использованы формулы из [9] для решения $\overline{\partial}$-уравнения в полидиске, а также реккурентные формулы для производных, полученные в [10].

Доказательство Теоремы 1. Пусть компакт $K \subset M$. В силу Леммы 1 можно считать, что M имеет размерность $n-1$. Пусть, далее, функции $F(z)$ и $u(z)$ те же, что в Теореме 2 и Лемме 2. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \frac{\lambda(z)}{F(z)} - u(z).$$

Имеем $\overline{\partial} v = \overline{\partial}\dfrac{\lambda}{F} - \overline{\partial} u = g - \overline{\partial} u = 0$, т. е. $v(z)$ голоморфна в области $\mathbb{U}^n$. Далее,

$$\operatorname{Re} v = \lambda \frac{\operatorname{Re} F}{|f|^2} - \operatorname{Re} u. \tag{4}$$

Согласно Лемме 2, функция $u(z)$ ограничена на $\overline{\mathbb{U}}^n$. Поэтому, с учетом пункта b) Теоремы 2 из (4) имеем

$$\operatorname{Re} v(z) \geqslant -\max_{z \in \overline{\mathbb{U}}^n} \operatorname{Re} u(z) > -\infty.$$

Добавив, в случае необходимости, к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0 \ \text{ при } \ z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K. \tag{5}$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \tag{6}$$

является искомой функцией пика. Прежде всего, $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{U}^n$ и, как следует из (5) и (6), $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$. Далее, нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. ввиду пункта a) Теоремы 2, с множеством K. Таким образом, f удовлетворяет условиям (1). Остается проверить, что $f \in A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$. В силу теоремы Харди–Литтлвуда достаточно показать, что $D^j f(z) = O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$ для любого целочисленного вектора j такого, что $|j| = m$. Функция f на множестве $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$ бесконечно дифференцируема, поэтому достаточно рассмотреть ее лишь в окрестности множества K, где имеем

$$f(z) = \frac{F(z)}{1 - u(z)F(z)}.$$

Выражение для $D^j f$ содержит производные $D^p u$, $|p| = 0, 1, \ldots, m$. Согласно Лемме 2, при $0 \leqslant |p| \leqslant m-3$ они ограничены, а при $|p| = m-2$ имеют порядок роста $O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$. С другой стороны, согласно той же лемме, производные $D^p u$ порядка $|p| = m-1$ и $|p| = m$, при подходе к M имеют больший порядок роста, а именно, $O\,[d(z,M)]^{\alpha-2}$ и $O\,[d(z,M)]^{\alpha-3}$ соответственно. Нетрудно убедиться в том, что те слагаемые в выражении $D^j f$, которые содержат эти производные, имеют соответствующие сомножители F и F^2, которые «гасят» излишний рост, поэтому, согласно пункту d) Теоремы 2, указанные слагаемые также имеют порядок роста $O\left[d(z,M)\right]^{\alpha-1}$. □

Следствие. *Всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса $\mathcal{C}^m$, $m \geqslant 4$, на остове полидиска $\mathbb{U}^n$ является множеством пика для $A^{m-2,1}(\mathbb{U}^n)$.*

Далее, доказана следующая интерполяционная

Теорема 3. *Пусть $m \geqslant 3$, $\alpha \in (0,1)$ и пусть K — компактное подмножество интерполяционного подмногообразия гладкости $\mathcal{C}^{m,\alpha}$ на остове $\mathbb{T}^n$ полидиска $\mathbb{U}^n$. Тогда*

(a) *Для заданной $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{T}^n)$ существует функция $F \in A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ такая, что $F|_K = f|_K$.*

(b) *Для заданной $f \in \mathcal{C}^{m-1,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ существует функция $F \in A_n^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ такая, что $F|_K = f|_K$.*

В утверждении (b) под $A_k^{m-1,\alpha}$ подразумевается подмножество функций из A^{m-1}, у которых все производные порядка $m-1$ допускают модуль непрерывности $\gamma\delta^\alpha\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{k-1}$, где γ — некоторая константа. Таким образом, например, $A_1^{m-1,\alpha} = A^{m-1,\alpha}$.

Ереванский Государственный Университет
Институт математики НАН Армении

Ա. Ի. Պետրոսյան

Պոլիդիսկում ողորկ ֆունկցիաների հանրահաշիվների պիկի և միջարկման բազմությունների մասին

Ապացուցվում է, որ $\mathcal{C}^{m,\alpha}$ ողորկություն ունեցող ինտերպոլյացիոն բազմաձևության ամեն մի K կոմպակտ ենթաբազմություն հանդիսանում է պիկի բազմություն $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$-ի համար: Բացի դրանից, ստացվել է հետևյալ արդյունքը՝ ամեն մի $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{T}^n)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $F \in A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ այնպիսին, որ $F|_K = f|_K$. Իսկ եթե f-ը պատկանում է $\mathcal{C}^{m-1,\alpha}(\mathbb{T}^n)$-ին, ապա միջարկող F ֆունկցիան կարելի է ընտրել $A_n^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$-ից:

A. I. Petrosyan

On peak and interpolation sets of algebras of smooth functions in the polydisk

It is proved, that any compact subset K of an interpolation $C^{m,\alpha}$-smooth manifold on the distinguished boundary of unit polydisc $\mathbb{U}^n$ is a peak set for the algebra of smooth functions $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$. Besides the following interpolation result is obtained: given $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{T}^n)$ there is $F \in A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ with $F|_K = f|_K$. If given f belongs to $\mathcal{C}^{m-1,\alpha}(\mathbb{T}^n)$, then the interpolating function F can be chosen from $A_n^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.

Литература

1. *У. Рудин* Теория функций в поликруге. М. Мир. 1974. 160 с.
2. *Taylor B. A., Williams D. L.* – Proc. Amer. Math. Soc. 1970. T. 24. C. 604–606.
3. *Alexander H., Taylor B. A., Williams D. L.* – J. Math. Anal. Appl. 1971. Vol. 36. no. 3. p. 556–566.
4. *Saerens R., Stout E. L.* – Preprint. University of Washington, Seattle, Wash. 1984.
5. *Saerens R.* – Ann. Scuola Norm. Super. Pisa CI. Sci. 1984. V. 11. no. 4. p. 177–211.
6. *Tumanov A. E., Henkin G. M.* – Amer. Math. Soc. Transl. 1980. V. 115. no. 2. p. 74–86.
7. *Chaumat J., Chollet A. M.* – Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 1979. V. 29. no. 3. p. 171–200.
8. *Владимиров В. С., Сергеев А. Г.* – Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. 1985. Т. 8. С. 191–266.
9. *Charpentier P.* – Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1980. V. 30. no. 4. p. 121–154.
10. *Петросян А. И.* – Изв. АН Армении, сер. мат. 1991. Т. 26. no. 2, С. 99–107.