Известия НАН Армении. Математика, **41**, № *4, 2006, 71–81*

О МНОЖЕСТВАХ ПИКА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ

А. И. Петросян

Ереванский Государственный Университет
e-mail: albpet@xter.net

Доказывается, что всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия гладкости $\mathbb{C}^{m,\alpha}$ на остове единичного полидиска $\mathbb{U}^n$ является множеством пика для алгебры гладких функций $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{U}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |z_i| < 1,\ i = 1, \dots, n\}$ — единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$, а $\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \colon |z_i| = 1,\ i = 1, \dots, n\}$ его остов. Для целого числа $m \geq 0$ через $A^m(\mathbb{U}^n)$ обозначается алгебра функций, голоморфных в $\mathbb{U}^n$, у которых все производные порядка не выше m непрерывно продолжаются на $\overline{\mathbb{U}}^n$, а через $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ — подалгебра тех функций из $A^m(\mathbb{U}^n)$, у которых все производные порядка m удовлетворяют в $\mathbb{U}^n$ условию Гельдера с показателем α.

Замкнутое подмножество K остова называется *множеством пика* для $A^m(\mathbb{U}^n)$ (или множеством пика для $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$), если существует функция $f \in A^m(\mathbb{U}^n)$ (или,соответственно, $f \in A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$) такая, что $f|_K \equiv 1$ и $|f| < 1$ на $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$, или, что равносильно,

$$f(z) = 0 \ \text{ при } \ z \in K, \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} f(z) > 0 \ \text{ при } \ z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K. \tag{1}$$

В теории множеств пика наиболее полно изучен случай полидиск-алгебры $A(\mathbb{U}^n) = A^0(\mathbb{U}^n)$. Хорошо известно, что в одномерном случае множества пика для диск-алгебры $A(\mathbb{U})$ суть замкнутые подмножества окружности лебеговой меры 0, а в многомерном случае — нулевые множества ортогональных мер (см., например, [1]).

Для описания множеств пика в случае гладких функций (т. е. для $m \geq 1$), вводится понятие интерполяционного многообразия. Обозначим через C_q замкнутый положительный конус на $T_q(\mathbb{T}^n)$, образованный касательными векторами

$$\partial/\partial\theta_1|_q, \ldots, \partial/\partial\theta_n|_q, \quad \theta_i = \arg z_i.$$

Гладкое подмногообразие M остова называется интерполяционным многообразием, если в каждой точке $q \in M$ касательное пространство $T_q(M)$ пересекается с C_q только в начале координат. Очевидно, размерность M не превышает $n-1$.

В работах [2] и [3] доказано следующее необходимое условие: если K является множеством пика для $A^m(\mathbb{U}^n)$, $m \geq 1$, то в некоторой окрестности множества K существует интерполяционное многообразие M гладкости C^m такое, что $K \subset M$. В [3] исследована также достаточность этого условия и доказано, что *всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса C^m является множеством пика для $A^{m-4}(\mathbb{U}^n)$*.

Основной результат настоящей работы, который сформулирован в теореме 2, утверждает, что *всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса гладкости $C^{m,\alpha}$ является множеством пика для $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$*. Этот результат в предварительной форме был анонсирован в [4].

§ 2. «ПОЧТИ АНАЛИТИЧЕСКАЯ» ФУНКЦИЯ ПИКА

В следующей лемме интерполяционное подмногообразие остова расширяется до интерполяционного подмногообразия максимальной размерности, причем с сохранением гладкости.

Лемма 1. *Пусть M — интерполяционное $C^{m,\alpha}$-гладкое ($m \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$) подмногообразие остова $\mathbb{T}^n$ размерности $k < n-1$. Тогда на $\mathbb{T}^n$ существует $(n-1)$-мерное интерполяционное подмногообразие $\widetilde{M}$ той же гладкости и содержащее M.*

Доказательство. Пусть $p \in M$ и в некоторой ее окрестности U_p M задается как общее множество нулей $C^{m,\alpha}$-гладких функций $f_1, \ldots, f_{n-k}$:

$$M \cap U_p = \{x \in U_p \colon : f_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, n-k\},$$

причем ранг матрицы $(\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k})$ на M равен $n-k$. Поскольку M является интерполяционным подмногообразием, то касательное подпространство к нему в точке p не содержит точек из $\mathbb{R}^n_-$. Поэтому нормальная плоскость, т. е. плоскость, порожденная векторами $\operatorname{grad} f_1(p), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(p)$, содержит вектор

$a_p \in R^n_-$. Пусть

$$a_p = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \mathrm{grad}\, f_i(p). \tag{2}$$

Обозначим

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i f_i(x). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $\mathrm{grad}\, v(p) = a_p \in R^n_-$. Поэтому, в силу непрерывности, можно считать, что

$$\mathrm{grad}\ v(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i\ \mathrm{grad}\ f_i(x) \in \mathbb{R}^n_- \quad \text{для всех} \quad x \in U_p. \tag{4}$$

Пусть, далее, $\{U_j\}$ — локально конечное покрытие множества M окрестностями U_j, удовлетворяющим вышеприведенным условиям, $e_j(x)$ — соответствующее разбиение единицы. Рассмотрим $\widetilde{v}(x) = \sum_j e_j(x) v_j(x)$, где $v_j(x)$ — построенная как в (3) функция для окрестности U_j. Очевидно, что $\widetilde{v}(x) = 0$ при $x \in M$. С другой стороны, с учетом (4) и того, что $e_j(x) \geq 0$ получаем $\mathrm{grad}\ \widetilde{v}(x) = \sum_j e_j(x)\ \mathrm{grad}\ v_j(x) \in \mathbb{R}^n_-$ для всех $x \in M$. Поэтому множество нулей $\widetilde{M}$ функции $\widetilde{v}(x)$ в некоторой окрестности M удовлетворяет условиям леммы.

Следующая теорема посвящена свойствам так называемой «почти аналитической» функции пика в полидиске.

Теорема 1. *Пусть M — интерполяционное подмногообразие размерности $n-1$ остова полидиска класса $C^{m,\alpha}$, $m \geq 3$, K — компакт на M. Тогда в некоторой окрестности Ω этого компакта существуют функция $F \in C^{m,\alpha}(\Omega)$ и константа $\gamma > 0$ такие, что*

a) *$F(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in K$,*

b) *$\mathrm{Re}\ F(z) \geq \gamma d(z, M)^2$ $(z \in \overline{\mathbb{U}}^n \cap \Omega)$, где $d(z, M)$ – расстояние между z и M,*

c) *$\overline{\partial} F = O\,[d(z, M)]^{m-1+\alpha}$,*

d) *$|F(z)| \geq \gamma d(z, M)$ $(z \in \overline{U}^n \cap \Omega)$.*

Доказательство. Пусть D — строго псевдовыпуклая область с границей класса $C^{m,\alpha}$, в которую полидиск U^n вложен следующим образом :

1° $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus \mathbb{T}^n \subset D$,

2° $\mathbb{T}^n \subset \partial D$,

3° $T_z(M) \subset T^c_z(\partial D)$ для всех $z \in M$,

где $T^c_z(\partial D)$ — комплексная плоскость максимальной размерности, содержащаяся в $T_z(\partial D)$. Условие 3° означает, что M является комплексно-касательным подмногообразием ∂D. Способ построения такой области D изложен в [7].

Далее, в работе [5] (см. также [6]) доказано, что в некоторой окрестности Ω компакта K существует почти аналитическая функция пика F, удовлетворяющая условиям a) и b) для области D. Следовательно, F удовлетворяет a) и b) также и для вложенного в D полидиска $\mathbb{U}^n$. Кроме этого, $\overline{\partial}F = 0$ на $\Omega \cap M$ вместе со всеми производными порядка до $\le m-1$ включительно. Поскольку $\overline{\partial}F \in C^{m-1,\alpha}(\Omega)$, то $\overline{\partial}F(z) = O\left[d(z,M)\right]^{m-1+\alpha}$, т. е. имеет место c). Отметим, что $F = u + iv$ обладает также следующим свойством

$$\text{grad}\ \ u(z) = -\chi_z/\|\chi_z\|^2 \quad \text{и} \quad \text{grad}\ \ v(z) = -\tau_z/\|\tau_z\|^2, \tag{5}$$

где χ_z — вещественная нормаль в точке z к границе области D, $\tau_z = J\chi_z$, а J — оператор в $\mathbb{R}^{2n}$, который соответствует умножению на i в пространстве $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Чтобы доказать свойство d), достаточно показать, что для любой точки $z \in M$ вдоль направления, касательного к остову и ортогонального к $T_z(M)$, производная функции F отлична от нуля. В самом деле, из условия $M \subset \partial D$ следует, что $T_z(M) \perp \chi_z$. Так как M имеет комплексно-касательное направление на ∂D, то $JT_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$. Поэтому $JT_z(M) \perp \chi_z$, или, что то же, $T_z(M) \perp \tau_z$. Очевидно,

$$T_z(T^n) \perp JT_z(T^n) \quad \text{и} \quad T_z(T^n) \bigoplus JT_z(T^n) = R^{2n}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $T_z(M) \perp JT_z(M)$ и размерность $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$ составляет $2n-2$. Таким образом, $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$ является ортогональным дополнением в $\mathbb{R}^{2n}$ комплексной нормали $N_z^c = \mathbb{R}[\chi_z] \bigoplus \mathbb{R}[\tau_z]$ к ∂D в точке z.

Пусть вектор ξ касателен к остову в точке z, т. е. $\xi \in T_z(\mathbb{T}^n)$, и ξ ортогонален к $T_z(M)$. Из (6) следует, что ξ ортогонален также и к $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$, поэтому $\xi \in N_z^c$. С другой стороны, $\xi \perp \chi_z$, откуда следует, что вектор ξ параллелен τ_z. Так как, согласно (5), τ_z направлен вдоль градиента v, то $\xi v \ne 0$, следовательно, $\xi F \ne 0$, т. е. вдоль направления ξ производная F отлична от нуля.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что, в неравенстве d) $d(z,M)$ участвует в первой, а не во второй степени, как это имеет место в случае строго псевдовыпуклой области. Это улучшение оценки является следствием того, что в отличие от границы строго псевдовыпуклой области, остов полидиска не имеет комплексных касательных векторов.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПИКА

Пусть K — компактное подмножество интерполяционного многообразия M, окрестность Ω и функция F удовлетворяют заключению теоремы 1. Для целочисленного вектора $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ через D^p обозначается дифференциальный оператор $D_1^{p_1}\dots D_n^{p_n}$, а через $|p|=p_1+p_2+\ldots+p_n$ — его порядок. Пусть, далее λ — вещественная функция класса C^∞ с носителем внутри Ω такая, что

$$0\le\lambda\le 1 \quad \text{и} \quad \lambda=1 \text{ в некоторой окрестности множества } K. \tag{7}$$

Определим $(0,1)$-форму g на $\overline{\mathbb{U}}^n\setminus K$

$$g=\begin{cases}\bar\partial\left(\lambda\dfrac{1}{F}\right) & \text{на } \Omega,\\ 0 & \text{вне } \Omega.\end{cases}$$

Лемма 2. *Уравнение*

$$\overline{\partial}u=g \tag{8}$$

в области $\mathbb{U}^n$ *имеет решение* $u(z)$, *бесконечно дифференцируемое на множестве* $\overline{U}^n\setminus M$ *и удовлетворяющее условиям*

1° $D^pu(z)$ *ограничена в* U^n *при* $0\le|p|\le m-3$,

2° $D^pu(z)=O\left[d(z,M)\right]^{m-3-|p|+\alpha}$ *при* $m-2\le|p|\le m$.

Доказательство. На множестве $\overline{\mathbb{U}}^n\setminus K$ форма g имеет гладкость $C^{m,\alpha}$. Продолжим g, положив ее равной нулю на K. Полученная форма будет непрерывной на $\overline{\mathbb{U}}^n$. В самом деле, в Ω

$$g=\frac{1}{F}\,\overline{\partial}\lambda-\lambda\frac{\overline{\partial}F}{F^2}. \tag{9}$$

Ввиду (7) форма $\overline{\partial}\lambda$ равна нулю в окрестности множества, на котором $1/F$ не определена. Поэтому $\overline{\partial}\lambda/F\in C^{m,\alpha}$ на $\overline{U}^n$ и его носитель находится в $\Omega\setminus K$. Кроме того, согласно c) и d) теоремы 1 в окрестности множества $M\bigcap\Omega$ имеем $\overline{\partial}F=O\left[d(z,M)\right]^{m-1+\alpha}$ и $|F(z)|\ge\gamma d(z,M)$. Следовательно, с учетом того, что $m\ge3$ имеем, что форма $\lambda(\overline{\partial}F/F^2)$ стремится к нулю при $z\to K$, и поэтому непрерывно продолжается на K.

Далее, из (9) с учетом того, что $D^p\left(\overline{\partial}F\right)=O\left[d(z,M)\right]^{m-1-|p|+\alpha}$ получаем

$$D^pg(z)=O\left[d(z,M)\right]^{m-3-|p|+\alpha},\quad p=0,1,\ldots,m. \tag{10}$$

В [9] дана формула $u(z)=R_\kappa[g](z)$ для весового решения уравнения (8). Для простоты рассматривается случай пространства $\mathbb{C}^2$. Мы также ограничимся случаем $\mathbb{C}^2$, где

$$R_\kappa[g](z)=\sum_{j=1}^{5}R_\kappa^j[g](z), \tag{11}$$

где $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2)$, $\kappa_1>0,\ \kappa_2>0$ и

$$R_\kappa^1[g](z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{U}^2}g\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1z_1}\right)^{\kappa_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2z_2}\right)^{\kappa_2}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$R^2_\kappa[g](z)=\frac{\kappa_2}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{U}^2} g\wedge\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\kappa_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{\kappa_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\kappa_2-1}|\zeta_2-z_2|}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{\kappa_2+1}|\zeta-z|^2}d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$R^3_\kappa[g](z)=\frac{\kappa_1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{U}^2} g\wedge\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\kappa_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{\kappa_2}(z_2-\zeta_2)}\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\kappa_1-1}|\zeta_1-z_1|}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{\kappa_1+1}|\zeta-z|^2}d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$R^4_\kappa[g](z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|<1} g_1(\zeta_1,z_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{\kappa_1}\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1}{z_1-\zeta_1},$$

$$R^5_\kappa[g](z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_2|<1} g_2(z_1,\zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{\kappa_2}\frac{d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2}{z_2-\zeta_2}.$$

В работе [8] получены формулы для производных решения $R_\kappa[g]$, которые позволяют свести оценки производных $D^pR_\kappa[g]$ к оценкам $R_\kappa[D^pg]$.

Если $|p|\le m-3$ то, как следует из (10) $D^pg(z)$ ограничена. Поэтому функция $R_\kappa[D^pg](z)$ тоже ограничена (см. [9], теорема II.2). Отсюда следует утверждение 1° леммы.

Пусть $|p|\ge m-2$ и пусть $\{e_j\}$ — разбиение единицы для $\overline{\mathbb{U}}^n$. Тогда $R_\kappa[D^pg]=\sum_j R_\kappa[e_jD^pg]$. Если $\mathrm{Supp}\ \ e_j\bigcap M=\emptyset$, т. е. если носитель e_j не пересекается с множеством особенностей формы D^pg, то e_jD^pg ограничен. Отсюда, как и выше, следует ограниченность $R_\kappa[e_jD^pg]$. Таким образом, остается случай $\mathrm{Supp}\ \ e_j\bigcap M\ne\emptyset$, т. е. когда интегрирование в $R_\kappa[e_jD^pg]$ фактически проводится не по всему полидиску, а по той его части, которая примыкает к M. Чтобы не загромождать обозначениями, будем считать, что указанным свойством обладает $R_\kappa[D^pg]$. Требуемая оценка для него доказывается ниже, в предложении 2, откуда и следует 2°. Лемма доказана.

Следующая теорема является основной.

Теорема 2. *Всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса $C^{m,\alpha}$, $m\ge 3$, на остове полидиска $\mathbb{U}^n$ является множеством пика для $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.*

Доказательство. Пусть компакт $K\subset M$. В силу леммы 1 можно считать, что M имеет максимальную размерность $n-1$. Пусть, далее, функции $F(z)$ и $u(z)$ те же, что в теореме 1 и лемме 2. Рассмотрим функцию

$$v(z)=\frac{\lambda(z)}{F(z)}-u(z).$$

Имеем $\overline\partial v=\overline\partial\dfrac{\lambda}{F}-\overline\partial u=g-\overline\partial u=0$, т. е. $v(z)$ голоморфна в области $\mathbb{U}^n$. Далее,

$$\mathrm{Re}\ \ v=\lambda\frac{\mathrm{Re}\ \ F}{|f|^2}-\mathrm{Re}\ \ u. \tag{12}$$

Согласно лемме 2, функция $u(z)$ ограничена на $\overline{\mathbb{U}}^n$. Поэтому, с учетом пункта b) теоремы 1 и (12) имеем

$$\mathrm{Re}\ v(z) \geq -\max_{z\in\overline{\mathbb{U}}^n} \mathrm{Re}\ u(z) > -\infty.$$

Добавив, в случае необходимости, к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\mathrm{Re}\ v(z) > 0 \ \text{ при } \ z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K. \tag{13}$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \tag{14}$$

является искомой функцией пика. Прежде всего, $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{U}^n$ и, как следует из (13) и (14), $\mathrm{Re}\ f(z) > 0$ при $z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$. Далее, нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т. е. ввиду пункта a) теоремы 1, с множеством K. Таким образом, f удовлетворяет условиям (1).

Остается проверить, что $f \in A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$. В силу теоремы Харди–Литтлвуда достаточно показать, что $D^j f(z) = O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$ для любого целочисленного вектора j такого, что $|j| = m$. Функция f бесконечно дифференцируема на множестве $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$. Поэтому достаточно рассмотреть ее лишь в окрестности множества K, где имеем

$$f(z) = \frac{F(z)}{1 - u(z)F(z)}.$$

Выражение для $D^j f$ содержит производные $D^p u$, $|p| = 0, 1, \ldots, m$. Согласно лемме 2 при $0 \leq |p| \leq m-3$ они ограничены, а при $|p| = m-2$ имеют порядок роста $O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$. С другой стороны, согласно той же лемме, производные $D^p u$ порядка $|p| = m-1$ и $|p| = m$ при подходе к M имеют больший порядок роста, а именно, $O\,[d(z,M)]^{\alpha-2}$ и $O\,[d(z,M)]^{\alpha-3}$ соответственно. Нетрудно убедиться в том, что те слагаемые в выражении $D^j f$, которые содержат эти производные, имеют соответствующие сомножители F и F^2, которые «гасят» излишний рост, поэтому, согласно пункту d) теоремы 1, указанные слагаемые также имеют порядок роста $O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$.

§ 4. ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ

Предложение 1. *Пусть* $\kappa \geq \beta > 0$, $0 < \theta < \pi$ *и* $v = \mathrm{Im}\ w \geq 0$. *Тогда*

$$\frac{v^\kappa}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa\, |w|^\beta} \leq 2^\beta \quad \text{и} \quad \frac{v^{\kappa-\beta}}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa} \leq \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta.$$

Доказательство. Рассмотрим 2 случая:

1° Пусть $|w-e^{i\theta}|<\frac{1}{2}$. Тогда $|w|\geq|e^{i\theta}|-|w-e^{i\theta}|\geq 1-1/2=1/2$. Очевидно

$$|w-e^{-i\theta}|^2=(u-\cos\theta)^2+(v+\sin\theta)^2\geq(v+\sin\theta)^2\,. \qquad (15)$$

Поэтому

$$\frac{v^\kappa}{|w-e^{-i\theta}|^\kappa\,|w|^\beta}\leq\frac{v^\kappa}{(v+\sin\theta)^\kappa}\,2^\beta\leq 2^\beta,$$

$$\frac{v^{\kappa-\beta}}{|w-e^{-i\theta}|^\kappa}=\frac{v^{\kappa-\beta}}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa-\beta}\,|w-e^{-i\theta}|^\beta}\leq\frac{1}{|w-e^{-i\theta}|^\beta}\leq\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^\beta.$$

2° $|w-e^{i\theta}|\geq\frac{1}{2}$. Тогда с учетом того, что $\left|w-e^{-i\theta}\right|\geq\left|w-e^{i\theta}\right|$, а также (15), будем иметь

$$\frac{v^\kappa}{|w-e^{-i\theta}|^\kappa\,|w|^\beta}\leq\frac{v^\kappa}{|w-e^{i\theta}|^\beta\,|w-e^{-i\theta}|^{\kappa-\beta}\,|w|^\beta}\leq 2^\beta\frac{v^{\kappa-\beta}}{(v+\sin\theta)^{\kappa-\beta}}\frac{v^\beta}{|w|^\beta}\leq 2^\beta,$$

$$\frac{v^{\kappa-\beta}}{|w-e^{-i\theta}|^\kappa}=\frac{v^{\kappa-\beta}}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa-\beta}\,|w-e^{-i\theta}|^\beta}\leq 2^\beta.$$

Предложение 2. *Пусть* $\kappa_i\geq 3,\ i=1,2.$ *Тогда*

$$R_\kappa[D^pg](z)=O\left[d(z,M)\right]^{m-3-|p|+\alpha}\quad \textit{при}\ \ m-2\leq|p|\leq m.$$

Доказательство. Согласно (11), $R_\kappa[D^pg](z)=\sum_{j=1}^5 R_\kappa^j[D^pg](z)$. Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Оценка для $R_\kappa^1[D^pg](z)$**.** Сделаем дробно-линейную замену переменных, не нарушая общности, можно предположить, что кривая M перейдет в отрезок $\{\zeta\colon\ \xi_1=\eta_1=\eta_2=0\colon 0\leq\xi_2\leq 1\}$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$J_1(z_1,z_2)=O\left[d(z,M)\right]^{-\beta},\quad \beta=|p|-m+3-\alpha, \qquad (16)$$

где

$$J_1(z_1,z_2)=\int\limits_{[0,1]^4}\frac{1}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta}\frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1-\bar z_1|^{\kappa_1}}\frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2-\bar z_2|^{\kappa_2}}\frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta-z|^3}.$$

Достаточно рассмотреть случаи $z_2=0$ или $z_1=0$. Имеем

$$J_1(z_1,0)=\int\limits_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2|^{\kappa_2}}d\lambda(\zeta_2)\int\limits_{[0,1]^2}\frac{1}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta}\frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1-\bar z_1|^{\kappa_1}}\frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta-z|^3}. \qquad (17)$$

Пусть $z_1=|z_1|e^{i\theta}$. Обозначив внутренний интеграл через $J_1^*(z_1)$ и сделав в нем замену переменной $\zeta_1=|z_1|w=|z_1|(u+iv)$ будем иметь

$$J_1^*(z_1)=\frac{1}{|z_1|^{\beta+1}}\int\int\limits_{\left[0,\frac{1}{|z_1|}\right]^2}\frac{1}{(|w|+\eta_2/|z_1|)^\beta}\frac{v^{\kappa_1}}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_1}}\frac{du\,dv}{(|w-e^{i\theta}|^2+|\zeta_2/z_1|^2)^{3/2}}.$$

Далее, так как $\beta < 3$, то $\kappa_i > \beta$. Применяя предложения 1, будем иметь

$$J_1^*(z_1) \le \frac{2^\beta}{|z_1|^{\beta+1}} \iint\limits_{v>0} \frac{du\,dv}{\left(|w - e^{i\theta}|^2 + |\zeta_2/z_1|^2\right)^{3/2}}.$$

Перейдя к полярным координатам с центром в точке $e^{i\theta}$, получим

$$J_1^*(z_1) \le \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}} \int\limits_0^\infty \frac{r dr}{\left(r^2 + |\zeta_2/z_1|^2\right)^{3/2}} = -\frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}} \left(r^2 + \left|\frac{\zeta_2}{z_1}\right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{r=0}^\infty = \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^\beta |\zeta_2|}.$$

Отсюда и из (17) будем иметь

$$J_1(z_1, 0) \le \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^\beta} \iint\limits_{[0,1]^2} \frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2|^{\kappa_2}} \frac{d\lambda(\zeta_2)}{|\zeta_2|} \le \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^\beta} \iint\limits_{[0,1]^2} \frac{d\lambda(\zeta_2)}{|\zeta_2|} = \frac{\gamma_1}{|z_1|^\beta}.$$

Здесь и ниже через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ обозначаются константы. Учитывая, что в рассматриваем случае $d(z, M) = |z_1|$, отсюда имеем оценку (16). Далее,

$$J_1(0, z_2) = \int\limits_{[0,1]^2} \frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1|^{\kappa_1}} d\lambda(\zeta_1) \int\limits_{[0,1]^2} \frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2 - \bar{z}_2|^{\kappa_2}} \frac{d\lambda(\zeta_2)}{\left(|\zeta_1| + \eta_2\right)^\beta |\zeta - z|^3}. \tag{18}$$

Пусть $z_2 = |z_2| e^{i\theta}$. Обозначим внутренний интеграл через $J_1^{**}(z_2)$ и сделаем в нем замену переменной $\zeta_2 = |z_2| w = |z_2|(u + iv)$. Получим

$$J_1^{**}(z_2) \le \frac{1}{|z_2|^{\beta+1}} \int\limits_{\left[0, \frac{1}{|z_1|}\right]^2} \int \frac{v^{\kappa_2}\, du\, dv}{|w - e^{-i\theta}|^{\kappa_2}\, v^\beta \left(|\zeta_1/z_2|^2 + |w - e^{i\theta}|^2\right)^{3/2}}.$$

Применяя предложение 1, получим

$$J_1^{**}(z_2) \le \frac{1}{|z_2|^{\beta+1}} \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta \int\limits_{\left[0, \frac{1}{|z_2|}\right]^2} \int \frac{du\, dv}{\left(|\zeta_1/z_2|^2 + |w - e^{i\theta}|^2\right)^{3/2}}.$$

Переходя к полярным координатам

$$J_1^{**}(z_2) \le \frac{2\pi}{|z_2|^{\beta+1}} \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta \int_0^\infty \frac{r\, dr}{\left(|\zeta_1/z_2|^2 + r^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{|z_2|^{\beta+1}} \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta \frac{|z_2|}{|\zeta_1|} = \frac{\gamma_2}{|y_2|^\beta |\zeta_1|}.$$

Подставив это выражение в (18), получим

$$J_1(0, z_2) \le \frac{\gamma_2}{|y_2|^\beta} \int\limits_{[0,1]^2} \frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta_1|} = \frac{\gamma_3}{|y_2|^\beta},$$

что дает оценку (16) для $J_1(0,z_2)$, если учесть, что $d(z,M)=|y_2|$.

Оценка для $R^2_\kappa[D^p g](z)$ **и** $R^3_\kappa[D^p g](z)$**.** Как и выше, вопрос сводится к оценке интеграла

$$J_2(z_1,z_2)=\int\limits_{[0,1]^4}\frac{1}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta}\frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1-\bar z_1|^{\kappa_1}|\zeta_1-z_1|}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}}{|\zeta_2-\bar z_2|^{\kappa_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}d\lambda(\zeta).$$

Имеем

$$J_2(z_1,0)=\int\limits_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}}{|\zeta_2|^{\kappa_2-1}}d\lambda(\zeta_2)\int\limits_{[0,1]^2}\frac{\eta_1^{\kappa_1}\,d\lambda(\zeta_1)}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta|\zeta_1-\bar z_1|^{\kappa_1}|\zeta_1-z_1|\,|\zeta-z|^2}. \tag{19}$$

Пусть $z_1=|z_1|e^{i\theta}$. Обозначив внутренний интеграл через $J_2^*(z_1)$, сделав в нем замену переменной $\zeta_1=|z_1|w=|z_1|(u+iv)$, с учетом предложения 1, будем иметь

$$J_2^*(z_1)\le\frac{1}{|z_1|^{\beta+1}}\iint\limits_{[0,\infty]^2}\frac{v^{\kappa_1}\,du\,dv}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_1}|w|^\beta|w-e^{i\theta}|\,(|w-e^{i\theta}|^2+|\zeta_2/z_1|^2)}\le$$
$$\le\frac{2^\beta}{|z_1|^{\beta+1}}\iint\limits_{[0,\infty]^2}\frac{du\,dv}{|w-e^{i\theta}|\,(|w-e^{i\theta}|^2+|\zeta_2/z_1|^2)}.$$

Переходя к полярным координатам с центром в точке $e^{i\theta}$, будем иметь

$$J_2^*(z_1)\le\frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}}\int_0^\infty\frac{dr}{r^2+|\zeta_2/z_1|^2}=\frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}}\left|\frac{z_1}{\zeta_2}\right|\arctan\frac{r|z|}{|\zeta_2|}\Bigg|_{r=0}^{\infty}=\frac{\gamma_4}{|z_1|^\beta|\zeta_2|}.$$

Подставив это неравенство в (19), получим оценку (16) для $J_2(z_1,0)$:

$$J_2(z_1,0)\le\frac{\gamma_4}{|z_1|^\beta}\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}|\zeta_2|^2}{|\zeta_2|^{\kappa_2+1}}d\lambda(\zeta_2)\le\frac{\gamma_4}{|z_1|^\beta}\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{d\lambda(\zeta_2)}{|\zeta_2|}=\frac{\gamma_5}{|z_1|^\beta}.$$

Далее, имеем

$$J_2(0,z_2)=\int\limits_{[0,1]^2}\left|\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right|^{\kappa_1}\frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta_1|}\int\limits_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}}{|\zeta_2-\bar z_2|^{\kappa_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2\,d\lambda(\zeta_2)}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta|\zeta-z|^2}. \tag{20}$$

Пусть $z_2=|z_2|e^{i\theta}$. Сделав во внутреннем интеграле $J_2^{**}(z_2)$ замену переменной $\zeta_2=|z_2|w=|z_2|(u+iv)$, будем иметь

$$J_2^{**}(z_2)=\frac{1}{|z_2|^\beta}\int\int\limits_{\left[0,\frac{1}{|z_2|}\right]^2}\frac{v^{\kappa_2-1}}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_2+1}(|\zeta_1/z_2|+v)^\beta}\frac{|w-e^{i\theta}|^2\,du\,dv}{(|\zeta_1/z_2|^2+|w-e^{i\theta}|^2)}.$$

Применяя предложение 1, получим

$$J_2^{**}(z_2) \leq \frac{1}{|z_2|^\beta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^\beta \int\limits_{\left[0,\frac{1}{|z_2|}\right]^2}\int \frac{1}{|w-e^{-i\theta}|^2}\,\frac{|w-e^{i\theta}|^2 du\,dv}{|\zeta_1/z_2|^2+|w-e^{i\theta}|^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z_2|^\beta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^\beta \int\limits_{\left[0,\frac{1}{|z_2|}\right]^2}\int \frac{du\,dv}{|\zeta_1/z_2|^2+|w-e^{i\theta}|^2}.$$

Перейдя к полярным координатам с центром в точке $e^{i\theta}$, получим

$$J_2^{**}(z_2) \leq \frac{2\pi}{|y_2|^\beta}\int\limits_0^{\frac{1}{|z_2|}} \frac{rdr}{|r|^2+|\zeta_1/z_2|^2} = \frac{2\pi}{|y_2|^\beta}\ln\left(1+\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right).$$

Отсюда и из (20) будем иметь

$$J_2(0,z_2) \leq \frac{2\pi}{|y_2|^\beta}\int\limits_{[0,1]^2}\int \left|\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right|^{\kappa_1}\ln\left(1+\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta_1|} = \frac{\gamma_6}{|y_2|^\beta}.$$

Так как теперь $d(z,M)=|y_2|$, оценка (16) для $J_2(0,z_2)$ доказана.

Оценка для $R^4_\kappa[D^p g](z)$ и $R^5_\kappa[D^p g](z)$ проводится аналогично, с очевидными упрощениями.

ABSTRACT. It is proved, that any compact subset of an interpolation $C^{m,\alpha}$-smooth manifold on the distinguished boundary of the unit polydisc $\mathbb{U}^n$ is a peak set for the algebra of smooth functions $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. У. Рудин, Теория функций в поликруге, Мир, Москва, 1974.
2. R. Saerens, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa CI. Sci. (4), vol. 11, pp. 177–211, 1984.
3. R. Saerens and E. L. Stout, Preprint, University of Washington, Seattle, Wash., 1984.
4. А. И. Петросян, «Множества пика и интерполяции алгебр гладких функций в полидиске и в трубе будущего», ДАН СССР, том 304, № 4, стр. 800–802, 1989.
5. А. Е. Туманов, Г. М. Хенкин, Теория функций и функциональный анализ, Центр. Эконом.-мат. инст. АН СССР, Москва (1976), стр. 74–86.
6. J. Chaumat and A. M. Chollet, «Ensembles pic pour $A^\infty(D)$», Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 29, № 3, pp. 171–200, 1979.
7. В. С. Владимиров, А. Г Сергеев, «Комплексный анализ в трубе будущего», Сб. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Москва, том 8, стр. 191–266, 1985.
8. А. И. Петросян, «Оценка в C^m-норме минимальных решений $\overline{\partial}$-уравнения в полидиске», Изв. НАН Армении, Математика, том 26, № 2, стр. 99–107, 1991.
9. P. Charpentier, «Formules explecites pour les solutions minimales de l'equation $\overline{\partial}u=f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$», Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 30, № 4, pp. 121–154, 1980.

Поступила 13 января 2006