

УДК 519.65

А. В. Погосян

L₂-сходимость некоторых
 полиномиально-периодических интерполяций

(Представлено академиком А.Б. Нерсисяном 8/II 2004)

1. Введение. В работах [1,2] рассмотрен обширный класс ортогональных разложений и интерполяций, основанных на некоторой последовательности $\{\theta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Разложение по вейвлетам (в частности, сплайн-аппроксимации) соответствует определенному выбору этой последовательности. В работе [3,4] изучена полиномиально-периодическая аппроксимация и исследована *L₂*-сходимость для различных классов функции $\theta(x)$ при выборе $\theta_n = \theta\left(\frac{n}{N}\right)$. В данной работе изучаются интерполяции, соответствующие функциям $\theta(x)$ из других классов.

Ниже используются следующие обозначения: штрих над знаком суммирования (Σ') означает, что нулевой член отсутствует; $[x]$ - целая часть x ; \mathbb{Z} - множество целых чисел. Положим также

$$\sum_n^N = \sum_{n=-[N/2]}^{-[N/2]+N-1}, \quad \sum_{n \neq 0}^N = \sum_{n=-[N/2]}^{-[N/2]+N-1},$$

где $N \geq 1$ - целое.

Если $f \in C[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, то через $\omega(\varepsilon, f)$ обозначим модуль непрерывности функции f

$$\omega(\varepsilon, f) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [a, b], \quad |x_1 - x_2| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим параметрическую интерполяцию [2,3] для $f \in C[-1, 1]$

$$I_N(f, \delta) = \sum_n^N \frac{\check{f}_n}{d\left(\frac{n}{N}\right)} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \theta\left(\frac{n}{N} + s\right) e^{i\pi(n+sN)x} e^{-i\pi s \delta}, \quad (1)$$

где кусочно-непрерывная функция θ такая, что $\sum_{s \in \mathbf{Z}} |\theta(x+s)| < \infty$, $d(x) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \theta(x+s) \neq 0$ и

$$\check{f}_n = \frac{1}{N} \sum_k^N f(x_k) e^{-i\pi n x_k}, \quad x_k = \frac{2k + \delta}{N}.$$

Здесь $0 \leq \delta \leq 2$, если N четное и $-1 \leq \delta \leq 1$, если N – нечетное.

Если аппроксимируемая функция $f \in C^q[-1, 1]$ ($q \geq 0$) не имеет достаточно гладкого 2-периодического продолжения на всю ось $(-\infty, \infty)$, то (см. [7]) возникает проблема ускорения сходимости интерполяции (1). Один из возможных путей решения этой проблемы – использование полиномов Бернулли по следующей схеме [5,6].

Обозначим

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \dots, q \quad (2)$$

и назовем *полиномиально-периодической* интерполяцию

$$I_{q,N}(f, \delta) = I_N \left(f(x) - \sum_{k=0}^q A_k(f) B_k(x), \delta \right) + \sum_{k=0}^q A_k(f) B_k(x), \quad (3)$$

где полиномы Бернулли B_k определяются рекуррентными соотношениями

$$B_0(x) = x/2, \quad B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \quad \int_{-1}^1 B_k(x) dx = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Наша цель – получение точных асимптотических L_2 -констант для интерполяции $I_{q,N}(f, \delta)$.

2. Асимптотические L_2 -константы. Пусть $\{f_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – коэффициенты Фурье функции f

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi n x} dx.$$

Через $\|\cdot\|$ обозначим норму в пространстве $L_2(-1, 1)$, и пусть

$$d(x) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \theta(x+s), \quad \alpha(x) = \frac{\sum_{s \in \mathbf{Z}}' \theta(x+s)}{d(x)},$$

$$\beta(x) = \frac{\sum_{s \in \mathbf{Z}}' |\theta(x+s)|^2}{|d(x)|^2}, \quad \gamma(x) = |\alpha(x)|^2 + \beta(x).$$

Доказательство следующих двух лемм можно найти в [2]. Отметим только, что оно основано на очевидном асимптотическом разложении

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^q \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{\varepsilon_n}{2(i\pi n)^{q+2}}, \quad \varepsilon_n = \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть $f \in C^{q+1}[-1, 1]$, $f^{(q+2)} \in L_2(-1, 1)$, $A_s(f) = 0$, $s = 0, \dots, q + 1$, $q \geq 0$. Тогда

$$\sum'_{r \in \mathbb{Z}} f_{n+rN} e^{i\pi r \delta} = o(N^{-q-2}), \quad N \rightarrow \infty, \quad -[N/2] \leq n \leq -[N/2] + N - 1. \quad (5)$$

Определение 1. Скажем, что $\theta = \theta(x) \in \mathbf{T}_q(\mu)$, если выполнены следующие условия:

(i) θ -кусочно непрерывная функция на R , для определенности нормированная условием $\theta(x) = 1/2(\theta(x+0) + \theta(x-0))$;

(ii) ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} \theta(x+s)$ абсолютно сходится на $[-1/2, 1/2]$;

(iii) $\gamma(x)$ ограничена на $[-1/2, 1/2]$;

(iv) существует монотонная на $(-1/2, 0)$, а также на $(0, 1/2)$, интегрируемая неотрицательная функция μ такая, что

$$|\alpha(x)|^2 x^{-2q-4} \leq \mu(x), \quad \beta(x) x^{-2q-4} \leq \mu(x).$$

Лемма 2. Пусть $\theta \in \mathbf{T}_q(\mu)$ и верны условия леммы 1. Тогда

$$\|f - I_N(f, \delta)\| = o(N^{-q-1.5}), \quad N \rightarrow \infty.$$

На основе этих лемм в [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\theta \in \mathbf{T}_q(\mu)$, $f \in C^{q+1}[-1, 1]$, $f^{(q+2)} \in L_2(-1, 1)$, $q \geq 0$, тогда

$$N^{2q+3} \|f - I_{q,N}(f, \delta)\|^2 \rightarrow \frac{|A_{q+1}(f)|^2}{2\pi^{2q+4}} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left| \frac{(-1)^{r\sigma} e^{i\pi r \delta}}{(x+r)^{q+2}} - \frac{\theta(x+r)}{d(x)} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{s\sigma} e^{i\pi s \delta}}{(x+s)^{q+2}} \right|^2 dx, \quad (6)$$

если $N \rightarrow \infty$, оставаясь четной ($\sigma = 0$) или нечетной ($\sigma = 1$).

Изучим теперь интерполяцию $I_{q,N}(f, \delta)$ для двух других классов $\theta(x)$.

Определение 2. Мы скажем, что $\theta \in \mathbf{U}_q(B, \mu)$, если выполнены условия

(i)-(iii) определения 1 и

(iv) существует константа $0 < B < \infty$ и монотонная на $(-1/2, 0)$, а также на $(0, 1/2)$ и интегрируемая на $(-1/2, 1/2)$ неотрицательная функция μ такая, что

$$\left| \frac{\gamma(x) x^{-2q-3} - B}{x} \right| \leq \mu(x),$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \int_{\varepsilon < |x| \leq 1/2} \mu(x) dx = 0.$$

Определение 3. Мы скажем, что $\theta \in \mathbf{V}_{q,p}(C)$, если выполнены условия (i)-(iii) определения 1 и, кроме того, для некоторого $p < q + 1.5$ существует конечный предел

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) x^{-2p} = C, \quad 0 < C < \infty.$$

Лемма 3. Пусть $\theta \in U_q(B, \mu)$, $q \geq 0$. Тогда ($t_n = n/N$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln N} \sum_{n \neq 0}^N \frac{\gamma(t_n) t_n^{-2q-3}}{n} = B.$$

Доказательство. Положим $\eta(x) = \gamma(x) x^{-2q-3}$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \ln N} \sum_{n \neq 0}^N \frac{\eta(t_n)}{n} - B \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \ln N} \sum_{n=1}^N \frac{\eta(t_n) - \eta(-t_n) - 2B}{n} \right) \leq \\ &\text{const} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\omega \left(\frac{[\sqrt{N}]}{N}, \eta \right) + \frac{1}{2N \ln N} \sum_{[\sqrt{N}] < n} \mu(t_n) \right) \leq \\ &\text{const} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\omega \left(\frac{[\sqrt{N}]}{N}, \eta \right) + \frac{1}{\ln N} \int_{[\sqrt{N}]/N < x < 1/2} \mu(x) dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $\theta \in U_q(B, \mu)$, $q \geq 0$, $f \in C^{q+1}[-1, 1]$, $f^{(q+2)} \in L_2(-1, 1)$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{2q+3}}{\ln N} \|f - I_{q,N}(f, \delta)\|^2 = \frac{|A_{q+1}(f)|^2}{\pi^{2q+4}} B. \quad (7)$$

Доказательство. Имеем

$$\|f - I_{q,N}(f, \delta)\| = \|F - I_N(F, \delta)\|,$$

где (согласно разложению (4))

$$F = F_1 + F_2, \quad (8)$$

$$F_1(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}}' F_{1,n} e^{i\pi n x}, \quad F_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{A_{q+1}(f)}{(i\pi n)^{q+2}}, \quad n \neq 0,$$

$$F_2(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}}' F_{2,n} e^{i\pi n x}, \quad F_{2,n} = \frac{1}{2(i\pi n)^{q+2}} \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Воспользовавшись неравенством треугольника, из леммы 2 получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{2q+3}}{\ln N} \|F_2 - I_N(F_2, \delta)\|^2 = 0.$$

Легко проверить следующую формулу:

$$\|f - I_N(f, \delta)\|^2 = 2 \sum_n^N \sum_{r \in \mathbf{Z}} \left| f_{n+rN} e^{i\pi r \delta} - \frac{\theta \left(\frac{n}{N} + r \right)}{d \left(\frac{n}{N} \right)} \sum_{s \in \mathbf{Z}} f_{n+sN} e^{i\pi s \delta} \right|^2. \quad (9)$$

Отсюда, с помощью леммы 1, получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{2q+3}}{\ln N} \|F_1 - I_N(F_1, \delta)\|^2 = \frac{|A_{q+1}(f)|^2}{\pi^{2q+4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln N} \sum_n^N \frac{\gamma(t_n)}{t_n^{2q+3}} \frac{1}{n}.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 3.

Заметим, что, в отличие от теоремы 1, в теореме 2 возникает величина $\ln N$, что приводит к меньшей точности, по сравнению с теоремой 1. Кроме того, L_2 -константа в теореме 2 уже не зависит от четности N и значения параметра сдвига δ .

Лемма 4. Пусть функция λ определена и ограничена на отрезке $[-1/2, 1/2]$ и, кроме того, существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = C$. Если ряд $\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N u_n \lambda\left(\frac{n}{N}\right) = C \sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\left| C \sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n - \sum_n^N u_n \lambda\left(\frac{n}{N}\right) \right| \leq \sum_{|n| \leq [\sqrt{N}]} \left| C - \lambda\left(\frac{n}{N}\right) \right| |u_n| + \text{const} \sum_{[\sqrt{N}] < |n|} |u_n| \leq$$

$$\omega([\sqrt{N}]/N, \lambda) \sum_{n \in \mathbf{Z}} |u_n| + \text{const} \sum_{|n| > [\sqrt{N}]} |u_n| = o(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Пусть $f \in C^{q+1}[-1, 1]$, $f^{(q+2)} \in L_1[-1, 1]$, $q \geq 0$ и $\theta \in V_{q,p}(\mathbf{C})$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2p} \|f - I_{q,N}(f, \delta)\|^2 = \frac{C}{2\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}}' \frac{1}{|n|^{2q+2-2p}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \quad (10)$$

Доказательство. Имеем

$$\|f(x) - I_{q,N}(f, \delta)\| = \|F(x) - I_N(F, \delta)\|, \quad (11)$$

где, согласно разложению (4),

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}}' F_n e^{i\pi n x}, \quad F_n = \frac{\varepsilon_n}{2(i\pi n)^{q+1}}, \quad \varepsilon_n = \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx.$$

Воспользовавшись теперь формулой (9), после несложных оценок, получим ($t_n = n/N$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2p} \|f - I_{q,N}(f, \delta)\|^2 = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} N^{2p} \sum_{n \neq 0}^N |F_n|^2 \gamma(t_n) =$$

$$\frac{1}{2\pi^{2q+2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \neq 0}^N \frac{\gamma(t_n)}{|t_n|^{2p}} \frac{|\varepsilon_n|^2}{|n|^{2q+2-2p}}.$$

Доказательство завершается применением леммы 4 с $\lambda(t) = \gamma(t)/|t|^{2p}$.

Здесь также, как и в теореме 2, не имеет значения четность N и значение параметра сдвига δ . Качественное отличие этого результата от предыдущих состоит в использовании глобальных свойств функции f (интегралы справа в (10)).

Для того, чтобы разъяснить характер приведенных результатов, рассмотрим следующий простой пример:

$$\theta(x) = \begin{cases} \cos^s \frac{\pi}{2} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad s > 0. \quad (12)$$

и вычислим функции d, α, β и γ ($x \in [-1/2, 1/2]$)

$$d(x) = \cos^s \frac{\pi}{2} x + \sin^s \frac{\pi}{2} |x|,$$

$$\alpha(x) = \frac{\sin^s \frac{\pi}{2} |x|}{\cos^s \frac{\pi}{2} x + \sin^s \frac{\pi}{2} |x|}, \quad \beta(x) = \frac{\sin^{2s} \frac{\pi}{2} |x|}{(\cos^s \frac{\pi}{2} x + \sin^s \frac{\pi}{2} |x|)^2}, \quad \gamma(x) = 2\alpha^2(x).$$

Таким образом, если $s > q + 1.5$ то $\theta \in \mathbf{T}_q(\mu)$, где $\mu(x) = \frac{const}{|x|^{2q+4-2s}}$. Поэтому можно применить теорему 1, откуда

$$N^{q+1.5} \|f - I_{q,N}(f, \delta)\| \rightarrow |A_{q+1}(f)| b(q, \sigma, \delta, s), \quad N \rightarrow \infty,$$

где

$$b(q, \sigma, \delta, s) = \frac{1}{\pi^{q+2}} \left[\int_0^1 \left| \frac{\alpha(x)}{x^{q+2}} - (1 - \alpha(x)) \sum'_{r \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^{r\sigma} e^{i\pi r \delta}}{(x+r)^{q+2}} \right|^2 dx + \frac{1}{2q+3} \right]^{1/2}.$$

Этот случай детально рассмотрен в [4], где показано, что надлежащим выбором параметра s можно получить более эффективную интерполяцию по сравнению с классической, при которой, как известно,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 1/2, & x = \pm 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Например, в случае $q = 7$ и $s = 11.397712$, $\delta = 1$ интерполяция $I_{q,N}(f, \delta)$ при нечетных N дает в 85 раз более точную интерполяцию.

Заметим, что при $s \leq q + 1.5$ функция (12) уже не принадлежит классу $\mathbf{T}_q(\mu)$, так как при $x \rightarrow 0$, $|\alpha(x)|^2 x^{-2q-4} \sim x^{-2q-4+2s}$ и условие (iv) определения 1 не выполняется. В частности, если $s = q + 1.5$, то $\theta \in \mathbf{U}_q(B, \mu)$, где $B = 2(\pi/2)^{2q+3}$, $\mu(x) = \text{const } |x|$. Тогда, согласно теореме 2,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{q+1.5}}{(\ln N)^{\frac{1}{2}}} \|f - I_{q,N}(f, \delta)\| = \frac{|A_{q+1}|}{2^{q+1} \sqrt{\pi}}.$$

В случае же $s < q + 1.5$ невозможно применить и теорему 2, из-за условия (iv) определения 2, но выполнены условия теоремы 3 с $p = s$ и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^s \|f - I_{q,N}(f, \delta)\| = \frac{1}{2^s \pi^{q+1-s}} \left(\sum'_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{|n|^{2q+2-2s}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2 \right)^{1/2}.$$

В общем же случае нетрудно убедиться, что классы $T_q(\mu)$, $\theta \in U_q(B, \mu)$, $\theta \in V_{q,p}(C)$ не пересекаются из-за условий (iv).

В заключение заметим, что для определения скачков $A_k(f)$ (см. (2)), в практическом плане, необязательно вычислять непосредственно производные $f(x)$ при $x = \pm 1$. Из известного асимптотического разложения (4) следует (см. [5,6]), что скачки $A_k(f)$ можно восстановить с точностью $O(N^{-q+k-2})$, $k = 0, \dots, q+1$, $N \rightarrow \infty$, решив систему уравнений с матрицей Вандермонда

$$f_{n_s} = \frac{(-1)^{n_s+1}}{2} \sum_{k=0}^q \frac{A_k(f)}{(i\pi n_s)^{k+1}}, \quad s = 0, 1, \dots, q,$$

для $(q+1)$ различных значений $\{n_s\}$, при $\text{const} N \leq |n_s| \leq N$, $N \rightarrow \infty$.

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Ա. Վ. Պողոսյան

Որոշ բազմանդամապարբերական ինտերպոլյացիաների L_2 -զուգամիությունը

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է բազմանդամապարբերական ինտերպոլյացիաների մի ընդանիք, որտեղ $\{\theta_n\}$ հաջորդականությունը հանդես է գալիս պարամետրի դերում: Ներազուգված է այդպիսի ինտերպոլյացիաների L_2 -զուգամիությունը կախված $\theta(x)$ ֆունկցիայի հարկություններից, երբ $\theta_n = \theta\left(\frac{n}{N}\right)$: Մտազուգվել են մտարկման սխալների սահմափակողական փոսակներից ճշգրիտ գնահատականներ:

Литература

1. *Нерсисян А.Б.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. N 1. С. 23-30.
2. *Nersessian A.B.* - Numer. Functional Anal. and Optimization. 2000. V. 21. N. 1-2.
3. *Нерсисян А.Б., Погосян А.В.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2001. Т. 36. N 3. С. 59-77.
4. *Nersessian A.B., Poghosyan A.V.* To be published in Proceedings of ISAAC IV Conference of Complex Analysis, Differential Equations and Related Topics. September 17-21. 2002. Yerevan Armenia.
5. *Eckhoff K.S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671 - 690.
6. *Eckhoff K.S., Wasberg C.E.* Thesis of Carl Erik Wasberg, Department of Mathematics, University of Bergen, Norway, 1996.
7. *Крылов А.* Лекции по приближенным вычислениям. Л. Изд. АН СССР. 1933.