ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 105 2005 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

Академик А. Б. Нерсесян, А. В. Погосян

Асимптотические оценки для одного нелинейного метода ускоренной сходимости рядов Фурье

(Представлено 28/II 2005)

1. Хорошо известно, что классический ряд Фурье на отрезке $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, сходится медленно, если разлагаемая функция $f(x)$, продолженная на всю действительную ось $(b-a)$ – периодически, не обладает достаточной гладкостью. Это, прежде всего, относится к кусочно-гладким функциям.

Решение практически важной проблемы ускорения сходимости разложений таких функций в ряд Фурье, - по-видимому впервые, - предложил А. Крылов в 1907 г. (см. [1]). Начало систематическому обоснованию такого подхода положила в 1964 г. работа [2] Ланцоша (см. также [3-7]). Практически эффективные алгоритмы были разработаны за последние 15 лет, главным образом, в работах К. Экгофа и Д. Готтлиба с соавторами (см., например, [8-11]).

Упомянутый подход, связанный с применением полиномов Бернулли (см. ниже, п.2), будем называть B-методом.

В работе [12] (см. также ниже, п.3), был разработан другой, нелинейный метод ускорения сходимости рядов Фурье, основанный на применении аппроксимантов Паде, что привело к еще более точным и устойчивым алгоритмам. К тому же стало возможным эффективно выявлять колебания произвольной частоты (в том числе затухающие или нарастающие), являющиеся "скрытыми" компонентами разлагаемой функции.

Ниже приводятся некоторые теоретические оценки и явные формулы, связанные с последним подходом.

2. Приведем краткое описание B-метода в случае, когда $f \in C^p[-1,1]$. Рассмотрим коэффициенты Фурье этой функции

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\pi nt}dt, \ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots. \quad (1)$$

Интегрированием по частям нетрудно получить следующую асимптотическую формулу ($n \neq 0$):

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^{q+1}} \int_{-1}^{1} f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \ q \leq p-1, \qquad (2)$$

где обозначено $A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)$, $k = 0, \cdots, q$. Если $k < 0$, то примем $A_k = 0$.

Рассмотрим теперь многочлены Бернулли, определяемые рекуррентной формулой

$$B_0(x) = \frac{x}{2}, \ B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \ x \in [-1, 1], \ k = 1, 2, \cdots,$$

где константа интегрирования вычисляется из условия $\int_{-1}^{1} B_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \cdots$. На всю действительную ось многочлены $\{B_k(x)\}$ продолжаются периодически, с периодом 2, и являются кусочно-гладкими функциями с коэффициентами Фурье $B_{k,n} = 1/2\,(-1)^{n+1}/(i\pi n)^{k+1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Формула (2) позволяет представить функцию f в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k(x) A_k + F(x), \qquad (3)$$

где $F(x)$ - некоторая q раз непрерывно дифференцируемая на действительной оси и 2-периодическая функция. Очевидно, коэффициенты Фурье $\{F_n\}$ функции $F(x)$ имеют порядок убывания, равный, по меньшей мере, $o(n^{-q-1})$, $n \to \infty$. Отсюда следует, что аппроксимационная формула

$$S_{N,q}(x) = \sum_{k=0}^{q} B_k(x) A_k + \sum_{n=-N}^{N} F_n e^{i\pi n x} \qquad (4)$$

сходится к f со скоростью порядка $o(N^{-q})$, $N \to \infty$.

Обозначим $R_{N,q}(x) = f(x) - S_{N,q}(x)$. Если $q \leq p-1$, то имеет место следующая асимптотическая формула:

$$R_{N,q}(x) = A_{q+1} \sum_{|n|>N} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+2}} e^{i\pi n x} + o(N^{-q-1}), \ N \to \infty. \qquad (5)$$

Прикладное значение B-метода основано на возможности приближенного определения скачков $\{A_k\}, k = 0, 1, ..., q$, решением связанной с формулой (2) линейной системы (см., например, [10]).

3. Переходя к описанию метода работы [12], рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\theta := \{\theta_k\}_{k=1}^{p}, p \geq 1$ и обозначим

$$\Delta_k^0(\theta) = A_k, \ \Delta_k^s(\theta) = \Delta_k^{s-1}(\theta) + \theta_s \Delta_{k-1}^{s-1}(\theta), \ k \geq 1. \qquad (6)$$

Если $k < 0$, то примем $\Delta_k^s(\theta) = 0$.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^p[-1,1]$ и $q \le p-1$. Тогда для любого $m \ge 1$ имеет место следующее разложение ($n \ne 0$):*

$$f_n = Q_n + P_n, \tag{7}$$

где

$$Q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{q-m}\frac{A_k}{(i\pi n)^{k+1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q-m+2}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\theta_k \Delta_{q-m}^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\frac{\theta_s}{i\pi n})}, \tag{8}$$

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+2}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\frac{\theta_s}{i\pi n})} + \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{k=1}^{m}(1+\frac{\theta_k}{i\pi n})}\sum_{k=q-m+1}^{q}\frac{\Delta_k^m(\theta)}{2(i\pi n)^{k+1}} +$$

$$+\frac{1}{2(i\pi n)^{q+1}}\int_{-1}^{1} f^{(q+1)}(t)\, e^{-i\pi n t}dt. \tag{9}$$

Доказательство. Пользуясь преобразованием Абеля, нетрудно доказать следующее тождество ($x \ne -\theta_1^{-1}$):

$$\sum_{k=q-m+1}^{q} A_k x^k = x^{q+1}\theta_1\frac{A_q - A_{q-m}x^{-m}}{1+\theta_1 x} + \frac{1}{1+\theta_1 x}\sum_{k=q-m+1}^{q}(A_k + \theta_1 A_{k-1})x^k. \tag{10}$$

После m-кратного применения того же преобразования придем к формуле

$$\sum_{k=q-m+1}^{q} A_k x^k = -x^{q-m+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{\theta_k \Delta_{q-m}^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s x)} + x^{q+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{\theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s x)} +$$

$$+\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(1+\theta_k x)}\sum_{k=q-m+1}^{q}\Delta_k^m(\theta)x^k,\ x \notin \{-\theta_k^{-1}\}. \tag{11}$$

Доказательство завершается, если главную часть формулы (2) перепишем в следующей форме:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{q-m}\frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=q-m+1}^{q}\frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}}$$

и к последней сумме применим преобразование (11) с заменой x на $(i\pi n)^{-1}$. Нам понадобится также следующий результат.

Лемма 2 [12]. *Пусть $\{\alpha_s\}, s = 1, ..., l, 1 \le l < \infty$ - некоторое конечное множество комплексных чисел и $\Upsilon \subseteq \{\alpha_s\}$ - его подмножество целых чисел (возможно, пустое). Справедлива формула*

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\notin\Upsilon}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}p(k)\exp(i\pi k x)}{\prod_{s=1}^{l}(k-\alpha_s)^{\beta_s}} = \pi\sum_{r=1}^{l}\underset{z=\alpha_r}{Res}\,\frac{p(z)\exp i\pi z x^{\ddagger}}{sin(\pi z)\prod_{s=1}^{l}(z-\alpha_s)^{\beta_s}},$$

где $\{\beta_s\}, (s = 1, ..., l)$ - множество положительных целых чисел, $p(z)$ - многочлен степени не выше $\sum_{s=1}^{l}\beta_s - 1$ и принято обозначение $x^{\ddagger} = (x+1)\,(mod2) - 1$, $-1 <$

$x^{\ddagger} < 1$.

Из приведенных лемм следует, что функцию f можно представить в виде

$$f(x) = Q(x) + P(x), \ Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{i\pi n x}, \ P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\pi n x}, \tag{12}$$

где $Q(x)$ - квазиполином, т.е. конечная линейная комбинация из функций вида $b(x)\, e^{\beta x}$, где $b(x)$ - многочлен, $\beta =$const$\in \mathbb{C}$. Если же вектор θ в разложении (7) определить из системы

$$\Delta_k^m(\theta) = 0, \ k = q - m + 1, \cdots, q, \tag{13}$$

то $P(x)$ станет q раз непрерывно дифференцируемой на действительной оси и 2-периодической функцией. В этом случае аппроксимационная формула

$$S_{N,q,m}(x) = Q(x) + \sum_{n=-N}^{N} P_n e^{i\pi n x} \tag{14}$$

сходится к f со скоростью порядка $o(N^{-q})$, $N \to \infty$. По сути, мы применили к асимптотическому степенному (по $z = (i\pi n)^{-1}$) ряду (2) аппроксимацию Паде порядка $[(q-m)/m]$ (см. [13]).

Как и в [12], назовем этот алгоритм квазиполиномиальным (QP) методом.

4. Обозначим теперь $U_r^m = [A_{k-s+r}]$, $k, \ s = 1, \cdots, m$ и заметим, что

$$\Delta_k^m(\theta) = \sum_{s=0}^{m} \gamma_s(m) A_{k-s},$$

где обозначения $\gamma_s(m)$ соответствуют соотношению

$$\prod_{k=1}^{m} (1 + \theta_k x) \equiv \sum_{k=0}^{m} \gamma_k(m) x^k.$$

Поэтому систему (13) можно записать в виде

$$A_{k+q-m} + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s(m) A_{k-s+q-m} = 0, \ k = 1, \cdots, m. \tag{15}$$

Она однозначно разрешима, если $detU_{q-m}^m \neq 0$.

Теорема. *Если $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_1[-1,1]$ и $detU_{q-m}^m \neq 0$, то имеет место асимптотическая формула ($N \to \infty$)*

$$R_{N,q,m}(x) = f(x) - S_{N,q,m}(x) = (-1)^m \frac{detU_{q-m+1}^{m+1}}{detU_{q-m}^m} \sum_{|n|>N} \frac{(-1)^{n+1} e^{i\pi n x}}{2(i\pi n)^{q+2}} + o(N^{-q-1}). \tag{16}$$

Доказательство. Из (12) и (14) имеем

$$R_{N,q,m}(x) = \sum_{|n|>N} P_n e^{i\pi n x}. \tag{17}$$

Интеграл в правой части (9) можно еще раз проинтегрировать по частям, поэтому ($N \to \infty$)

$$R_{N,q,m}(x) = \sum_{|n|>N} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+2}} \left(A_{q+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}\left(1+\frac{\theta_s}{i\pi n}\right)} \right) e^{i\pi n x} + o(N^{-q-1}). \qquad (18)$$

Отбрасывая члены малого порядка, получим

$$R_{N,q,m}(x) = \Delta_{q+1}^{m}(\theta) \sum_{|n|>N} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+2}} e^{i\pi n x} + o(N^{-q-1}),\ N \to \infty. \qquad (19)$$

Здесь мы использовали соотношения (см. (6))

$$\Delta_{q+1}^{m}(\theta) = \Delta_{q+1}^{m-1}(\theta) + \theta_m \Delta_q^{m-1}(\theta) = \Delta_{q+1}^{m-2}(\theta) + \theta_{m-1}\Delta_q^{m-2}(\theta) +$$

$$\theta_m \Delta_q^{m-1}(\theta) = \Delta_{q+1}^{0}(\theta) + \sum_{k=1}^{m} \theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta) = A_{q+1} + \sum_{k=1}^{m} \theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta).$$

По формулам Крамера $\gamma_s(m) = M_s/detU_{q-m}^{m}$, $s = 1, \cdots, m$, где $\{M_s\}$ - соответствующие определители. Отсюда

$$\Delta_{q+1}^{m}(\theta) = A_{q+1} + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s(m) A_{q+1-s} = A_{q+1} + \frac{1}{detU_{q-m}^{m}} \sum_{s=1}^{m} M_s A_{q+1-s}. \qquad (20)$$

Разложив теперь определитель $detU_{1-m+1}^{m+1}$ по последней строке, нетрудно заметить, что выражение $(-1)^{m+2} detU_{q-m+1}^{m+1}/detU_{q-m}^{m}$ совпадает с (20).

5. С помощью леммы 2 нетрудно получить явный вид квазиполинома $Q(x)$. Например при $\{m,q\} = \{1,1\}$ и $\{m,q\} = \{1,2\}$ соответственно получим ($A_k \neq 0$, $k = 0,1,2$)

$$Q(x) = \frac{e^{\frac{A_1}{A_0}x} A_0}{2\, sh\frac{A_1}{A_0}} - \frac{A_0^2}{2A_1} \quad \text{и} \quad Q(x) = \frac{e^{\frac{A_2}{A_1}x} A_1^2}{2\, A_2\, sh\frac{A_2}{A_1}} - \frac{A_1^3}{2A_2^2} + x\frac{A_0 A_2 - A_1^2}{2A_2}.$$

Опишем случай, когда (как выше слева) $Q(x)$ состоит только из экспонент.

Пусть $f \in C^p[-1,1]$ и $q = 2m-1, m \leq p/2$. К разложению (2) применим квазидиагональную аппроксимацию Паде порядка [(m-1)/m] (см. (11)). Предположим, что все $\{\theta_k\}$ различны и не равны нулю. Нетрудно убедиться, что в этом случае

$$Q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\prod_{k=1}^{m}(i\pi n + \theta_k)} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k^m(\theta)(i\pi n)^{m-k-1}.$$

Восстановив функцию $Q(x)$ по лемме 2, получим

$$Q(x) = \frac{\Delta_{m-1}^{m}(\theta)}{2\prod_{k=1}^{m}\theta_k} + \sum_{s=1}^{m} \frac{e^{-\theta_s x}}{2sh\,\theta_s\, \prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p}(\theta_k - \theta_s)} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j(m) \sum_{k=s}^{m-1} (-1)^{m-k}\theta_s^{m-k-1} A_{k-j}. \qquad (21)$$

Эта формула важна по следующим причинам. Во-первых, в приложениях значения $\{\theta_k\}$, $k = 1, \cdots, m$ определяются приближенно, как корни соответствующего многочлена (см. [12]). Понятно, что случай $\theta_k = \theta_r, k \neq r$ практически не встречается.

Во-вторых, формула (21) оптимальна с точки зрения выявления характера "скрытых" периодичностей функции $f(x)$ (см. [12]).

6. Сравнив формулы (4) и (14), мы видим, что, - при использовании тех же скачков $\{A_k\}_{k=1}^q$, - порядок сходимости $S_{N,q}$ и $S_{N,q,p}$ к f одинаков. Однако применение предлагаемой нелинейной аппроксимации потенциально предпочтительней по той простой причине, что она точная (при достаточно больших q, m и точном определении скачков) для квазиполиномов, в то время как B-метод точен только для полиномов. Численные эксперименты полностью подтверждают это преимущество (см. [12]). Конкретная оценка преимущества QP-метода перед B-методом, основанная непосредственно на формулах (5) и (6), зависит от скачков $\{A_k\}$ функции f. Как уже отмечалось, преимущество это очевидно, если f - квазиполином. В этом случае рост скачков оценивается как $|A_k| \leq c^k$, $k = 1, 2 \cdots$; $c =$const. Рассмотрим теперь две функции, не являющиеся квазиполиномами:

$$f_1(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{5}\right) - x}, \quad f_2(x) = J_0(14x - 1). \tag{22}$$

В приведенной таблице отношение $a_m(f) = |A_{q+1} det U_{q-m}^m / det U_{q-m+1}^{m+1}|$ характеризует асимптотическое преимущество QP-метода перед B-методом в случае применения формулы (21) к функциям f_1, f_2.

Интересно сравнить данные табл.1 с приведенными в табл.2 данными, полученными в ходе эксперимента на компьютере с процессором Pentium 4, 512 RAM с применением системы MATHEMATICA [14]. Здесь приведено полученное из эксперимента отношение $\tilde{a}_m(f) = ||\tilde{R}_{N,q}||/||\tilde{R}_{N,q,m}||$ в равномерной метрике. Как видим, при $m \leq 3$ данные таблиц практически совпадают. Однако при $m \geq 5$ B-метод демонстрирует плохую устойчивость и уступает QP-методу со все большей (с ростом m) разницей. При $m \geq 7$ B-алгоритм становится практически неприменимым.

Таблица 1

Округленная теоретическая величина $a_m(f)$ для функций f_1 и f_2 при $q = 2m - 1$

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
$a_m(f_1)$	2.0	6.1	20.6	72.7	2.6×10^2	9.6×10^2	3.6×10^3	1.3×10^4
$a_m(f_2)$	0.7	42.1	30.7	271.1	2.1×10^2	8.6×10^2	7.9×10^2	2.4×10^3

Таблица 2

Округленная экспериментальная величина $\widetilde{a}_m(f)$ для функций f_1 и f_2 при $q = 2m - 1$

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
$\widetilde{a}_m(f_1)$	2.0	6.1	20.3	42.1	6.9×10^4	$4.8 \cdot 10^8$	3.6×10^{11}	2.2×10^{14}
$\widetilde{a}_m(f_2)$	0.8	40.0	34.7	399.7	2.9×10^4	1.5×10^6	3.1×10^7	3.8×10^8

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսիսյան, Ա. Վ. Պողոսյան

Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության արագացման մի ոչ գծային մեթոդի ասիմպտոտիկ գնահատականներ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության արագացման մի ոչ գծային եղանակ, որն առաջարկվել է նախկինում [12]։ Ներկայացվում են մոտարկման սխալի ասիմպտոտիկ գնահատականներ, եվ դրանք համեմատվում են Բեռնուլիի բազմանդամներով իրականացվող արագացման եղանակի հետ։ Ցույց է տրվում, որ արագացումն իրականացվում է քվազիբազմանդամների օգնությամբ։ Մասնավոր դեպքում ներկայացվում է քվազիբազմանդամների բացահայտ տեսքը։

Academician A. B. Nersessian, A. V. Poghosyan

Asymptotic Estimates for a Nonlinear Acceleration Method of Fourier Series

Nonlinear acceleration method of Fourier series based on Pade approximation is investigated (see also [12]). Asymptotic estimates of approximation error is represented and comparison with known Bernoulli-acceleration method is given. It is shown that acceleration executes by the quasipolynomials. In an important particular case an obvious form of quasipolynomials is represented.

Литература

1. *Крылов А.* О приближенных вычислениях. Типолитогр. К. Биркенфельда. 1907.

2. *Lanczos C.* – J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal. 1964. V. 1. P. 76-85.

3. *Lanczos C.* Discourse of Fourier Series. Hafner. N.-Y. 1966.

4. *Jones W. B., Hardy G.* — Math. Comp. 1970. V. 24. P. 47-60.

5. *Lyness J. N.* — Math. Comp. 1974. V. 28. P. 81-123.

6. *Tasche M.* — Math. Nachr. 1979. V. 90. P. 123-134.

7. *Baszenski G., Delvos F. J., Tasche M.* — Computers and Mathematics with Applications 1995. V. 30. N 3-6. P 33-49.

8. *Gottlieb D., Shu C. W.* — Math. Comp. 1992. V. 43. P. 81-92.

9. *Eckhoff K. S.* — Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671 - 690.

10. *Eckhoff K. S., Wasberg C. E.* Report no. 99. Dept. of Math. University of Bergen. 1995. P. 1-38.

11. *Gelb A., Gottlieb D.* — Computers Math. Applic. 1997. V. 33. N 11. P. 35-58.

12. *Нерсесян А. Б.* — ДНАН Армении. 2004. Т. 104. N. 4. С. 186-191.

13. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. Мир. М. 1986. 502 с.

14. *Wolfram S.* The MATHEMATICA book. Fourth Edition. Wolfram Media. Cambridge University Press. 1999. 1468 p.