ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 106 2006 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.58

А. В. Погосян

Об одной линейной рационально-тригонометрической интерполяции гладких функций

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 11/III 2005)

Ключевые слова: *тригонометрическая интерполяция, рациональная аппроксимация, минимизация ошибки*

1. Восстановление гладкой на конечном отрезке $[-1,1]$ функции f по ее коэффициентам Фурье [1]

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\pi n x}dx, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm N, \ N \geq 1 \tag{1}$$

или по дискретным коэффициентам Фурье [2,3]

$$\check{f}_n = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} f(x_k)e^{-i\pi n x_k}, \ x_k = \frac{2k}{2N+1}, \ |n| \leq N, \ N \geq 1 \tag{2}$$

практически неэффективно, если разлагаемая функция, продолженная на всю числовую ось 2-периодически, не обладает достаточной гладкостью.

Одним из методов ускорения сходимости рядов Фурье является нелинейный алгоритм Фурье - Паде [4,5].

В настоящей работе предлагается линейный метод ускорения сходимости классической тригонометрической интерполяции, также основанный на идее метода Паде. Для дополнительного ускорения сходимости применяется так называемая "полная интерполяция" [6]. Изучается L_2-сходимость полученных параметрических интерполяций. Решается задача минимизации L_2-ошибки с нахождением оптимальных значений параметров.

Рассмотрим формулу

$$f(x) \approx I_N(f,x,\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n(x)\check{f}_n. \tag{3}$$

Для определения функций $a_n(x)$ потребуем, чтобы формула (3) была точной для системы $\{e^{i\pi nx}\}_{n=-N+1}^{N-1} \cup \{\varphi(x), \overline{\varphi}(x)\}$, где

$$\varphi(x) = e^{i\pi Nx} - \theta\frac{e^{i\pi(N+1)x}}{1+\theta e^{i\pi x}}, \quad -1 < \theta < 1. \tag{4}$$

После несложных вычислений получим

$$I_N(f,x,\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n e^{i\pi nx} + \theta\frac{e^{-i\pi Nx} - e^{i\pi(N+1)x}}{1+2\theta\cos\pi x+\theta^2}\check{f}_N + \theta\frac{e^{i\pi Nx} - e^{-i\pi(N+1)x}}{1+2\theta\cos\pi x+\theta^2}\check{f}_{-N}. \tag{5}$$

Заметим, что выражение

$$I_N(f,x,0) = \sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n e^{i\pi nx} \tag{6}$$

является классической тригонометрической интерполяцией.

Теорема 1. *Для $f \in C[-1,1]$ и любого $-1 < \theta < 1$ формула (5) интерполяционная на сети $\{x_k\}$ (см. (2)), т.е.*

$$I_N(f,x_k,\theta) = f(x_k), \ |k| \le N. \tag{7}$$

Доказательство проводится прямой проверкой.

2. Через $||\cdot||$ обозначим норму в пространстве $L_2(-1,1)$

$$||f|| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

и для $f \in C^q[-1,1]$ обозначим $A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \ k = 0,\cdots,q$. Далее

$$\Phi_q(x) = {\sum_{s=-\infty}^{\infty}}' \frac{(-1)^s}{(x+s)^{q+1}}, \ |x| \le \frac{1}{2}, \ q \ge 0,$$

где штрих у знака суммы означает, что нулевой член отсутствует. Заметим, что

$$\Phi_0(x) = \frac{\pi x - \sin\pi x}{x\sin\pi x} \qquad \text{и} \qquad \Phi_q(x) = \frac{(-1)^q}{q!}\Phi_0^{(q)}(x).$$

Оценим асимптотическое поведение ошибки $R_N(f,x,\theta) = f(x) - I_N(f,x,\theta)$ в L_2-метрике. Сначала изучим случай $\theta = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^q[-1,1]$, $f^{(q+1)} \in L_1[-1,1]$, $q \geq 1$ *и* $A_j(f) = 0$ *для* $j = 0, \cdots, q-1$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{q+\frac{1}{2}} ||R_N(f,x,0)|| = c_q |A_q(f)|, \tag{8}$$

$$c_q = \frac{1}{\pi^{q+1}} \left(\frac{2^{2q+1}}{2q+1} + \int_0^{1/2} \Phi_q^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Доказательство непосредственно следует из известного асимптотического разложения коэффициентов Фурье

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{A_q(f)}{(i\pi n)^{q+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^{q+1}} \int_{-1}^{1} f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \tag{9}$$

с учетом формулы

$$\check{f}_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_{n+s(2N+1)}, \ |n| \leq N. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь случай $\theta \neq 0$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_1[-1,1]$, $q \geq 1$ *и* $A_j(f) = 0$, $j = 0, \cdots, q-1$. *Тогда для*

$$\theta = 1 - \frac{\tau}{N}, \ \tau > 0 \tag{11}$$

имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{q+\frac{1}{2}} ||R_N(f,x,\theta)|| = c_{q,\tau} |A_q(f)|, \tag{12}$$

где для четных значений q

$$c_{q,\tau} = \frac{1}{\pi^{q+1}} \left(\int_{1/2}^{\infty} \left| \frac{1}{x^{q+1}} - e^{-2\tau x} ch(\tau)(\Phi_q(1/2) + 2^{q+1}) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1/2} \left|\Phi_q(x) - e^{-\tau} sh(2\tau x)(\Phi_q(1/2) + 2^{q+1})\right|^2 \right)^{1/2}$$

и для нечетных значений q

$$c_{q,\tau} = \frac{1}{\pi^{q+1}} \left(\int_{1/2}^{\infty} \left| \frac{1}{x^{q+1}} - e^{-2\tau x} ch(\tau) \frac{q+1}{2\tau} (\Phi_{q+1}(1/2) + 2^{q+2}) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1/2} \left| \Phi_q(x) + e^{-\tau} ch(2\tau x) \frac{q+1}{2\tau} (\Phi_{q+1}(1/2) + 2^{q+2}) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Для $N > \tau$ имеем

$$||R_N(f,x,\theta)|| = 2\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left|f_n - \check{f}_n - (-1)^{n+N}\frac{\theta^{N+1}}{1-\theta^2}\left(\theta^n\Delta_N(\theta)+\theta^{-n}\Delta_{-N}(\theta)\right)\right|^2 +$$

$$+2\sum_{n=N}^{\infty}\left|f_n - (-1)^{n+N}\frac{\theta^n}{1-\theta^2}\Delta_N(\theta)(\theta^{N+1}+\theta^{-N})\right|^2 +$$

$$+2\sum_{n=-\infty}^{-N}\left|f_n - (-1)^{n+N}\frac{\theta^{-n}}{1-\theta^2}\Delta_{-N}(\theta)(\theta^{N+1}+\theta^{-N})\right|^2, \qquad (13)$$

где

$$\Delta_N(\theta) = \check{f}_N + \theta\check{f}_{-N} \quad \text{и} \quad \Delta_{-N}(\theta) = \check{f}_{-N} + \theta\check{f}_N.$$

С учетом (10) и (9) получим ($N \to \infty$)

$$\check{f}_N = \frac{A_q(f)(-1)^N}{2(i\pi)^{q+1}}\left(\frac{\zeta(q)}{N^{q+1}} - \frac{q+1}{2}\frac{\zeta(q)-\zeta(q+1)}{N^{q+2}}\right) + \frac{A_{q+1}(f)(-1)^N}{2(i\pi)^{q+2}}\frac{\zeta(q+1)}{N^{q+2}} + o(N^{-q-2}).$$

Отсюда для четных q имеем

$$\Delta_N(\theta) = \frac{A_q(f)(q+1)(-1)^{N+1}}{2(2N+1)^{q+2}(i\pi)^{q+1}}\zeta(q+1) + o(N^{-q-2}),\ N\to\infty,\ \ \Delta_{-N}(\theta) = \Delta_N(\theta) \qquad (14)$$

и для нечетных

$$\Delta_N(\theta) = \frac{A_q(f)(-1)^{N+1}\tau}{(2N+1)^{q+2}(i\pi)^{q+1}}\zeta(q) + o(N^{-q-2}),\ N\to\infty,\ \ \Delta_{-N}(\theta) = -\Delta_N(\theta). \qquad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (13), получим требуемое.

Абсолютные константы c_q и $c_{q,\tau}$ в теоремах 2, 3 характеризуют сходимость $I_N(f,x,\theta)$ по норме $||\cdot||$. Заметим, что константа $c_{q,\tau}$ зависит от τ и естественно ее минимизировать. Соответствующие результаты, с точностью до 3 знаков после запятой, представлены в табл. 1. Отношение $c_q/c_{q,\tau}$ характеризует коэффициент эффективности оптимальной интерполяции по сравнению с классической.

Таблица 1

Приближенные значения констант c_q и $c_{q,\tau}$ при оптимальном значении параметра τ

q	1	2	3	4	5	6
c_q	0.2372	0.1074	0.0627	0.0345	0.0201	0.0117
$c_{q,\tau}$	0.0434	0.0122	0.0079	0.0019	0.0017	0.0005
τ	1.8081	2.4581	3.7303	4.3705	5.7525	6.2959
$c_q/c_{q,\tau}$	5.5	8.8	7.9	18.1	11.8	23.4

Рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = (1 - x^2)^2 \sin(33x - 0.5). \tag{16}$$

На рис. 1 показано сравнение результатов аппроксимации функции (16) классической тригонометрической интерполяцией и оптимальной рациональной интерполяцией. Оптимальные значения параметра τ выбраны согласно табл. 1.

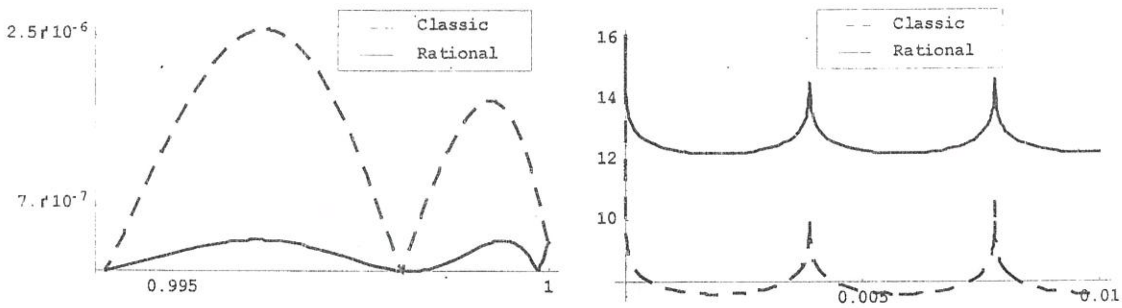

Рис. 1. Графики функций $|R_N(f,x,0)|$–(Classic), $|R_N(f,x,\theta)|$–(Rational) в окрестности точки $x = 1$ (слева) и $-\log_{10}|R_N(f,x,0)|$, $-\log_{10}|R_N(f,x,\theta)|$ в интервале $[0, 0.01]$ (справа) для $N = 256$.

3. Заметим теперь, что в интерполяции $I_N(f,x,\theta)$ используются значения функции f только в интервале $[-2N/(2N+1), 2N/(2N+1)]$ и ошибка аппроксимации максимальна вблизи концов отрезка. Для уменьшения этой ошибки можно, следуя подходу работы [6] к функции

$$f^*(x) = f\left(\frac{2N+1}{2N}x\right), \;\; x \in [-\frac{2N}{2N+1}, \frac{2N}{2N+1}],$$

применить интерполяцию $I_N(f^*,x,\theta)$, где значения $f^*(x)$ при $[-(2N+1)/2N, -1]$, $[1, (2N+1)/2N]$ не используются. Сделав обратную замену, получим так называемую полную интерполяцию $I_N^*(f,x,\theta)$ на сети $x_k^* = \frac{k}{N}$

$$I_N^*(f,x,\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n^* e^{i\pi n \frac{2N}{2N+1}x} +$$

$$+\theta \frac{e^{-i\pi N\frac{2N}{2N+1}x} - e^{i\pi(N+1)\frac{2N}{2N+1}x}}{1 + 2\theta\cos\pi\frac{2N}{2N+1}x + \theta^2}\check{f}_N^* + \theta\frac{e^{i\pi N\frac{2N}{2N+1}x} - e^{-i\pi(N+1)\frac{2N}{2N+1}x}}{1 + 2\theta\cos\pi\frac{2N}{2N+1}x + \theta^2}\check{f}_{-N}^*. \tag{17}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение ошибки $R_N^*(f,x,\theta) = f(x) - I_N^*(f,x,\theta)$ по метрике $||\cdot||$. Доказательство следующих двух теорем непосредственно следует из легко проверяемой формулы

$$||R_N^*(f,x,\theta)||^2 = \frac{2N+1}{2N}||R_N(f^*,x,\theta)||^2 - \frac{1}{2N}\int_0^1 \left|R_N\left(f^*, 1 - \frac{h}{2N+1}, \theta\right)\right|^2 dh -$$

$$-\frac{1}{2N}\int_0^1 \left| R_N\left(f^*, -1-\frac{h}{2N+1}, \theta\right)\right|^2 dh.$$

Теорема 4. *Пусть $f \in C^q[-1,1]$, $f^{(q+1)} \in L_1[-1,1]$, $q \geq 1$ и $A_j(f) = 0$, $j = 0, \cdots, q-1$. Тогда имеет место формула*

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{q+\frac{1}{2}} ||R_N^*(f,x,0)|| = c_q^* |A_q(f)|, \tag{18}$$

где

$$c_q^* = \left(c_q^2 - 2\int_0^1 |\ell_q(h)|^2 dh\right)^{1/2},$$

$$\ell_q(h) = \frac{1}{\pi^{q+1}}\int_0^{1/2} \sin\pi\left(xh+\frac{q}{2}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^s}{(x+s)^{q+1}} dx - \frac{1}{\pi^{q+1}}\int_{1/2}^{\infty} \frac{\sin\pi\left(xh+\frac{q}{2}\right)}{x^{q+1}} dx.$$

Теорема 5. *Пусть $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_1[-1,1]$, $q \geq 1$ и $A_j(f) = 0$, $j = 0, \cdots, q-1$. Тогда для*

$$\theta = 1 - \frac{\tau}{N},\ \tau > 0 \tag{19}$$

имеет место формула

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{q+\frac{1}{2}} ||R_N^*(f,x,\theta)|| = c_{q,\tau}^* |A_q(f)|, \tag{20}$$

где

$$c_{q,\tau}^* = \left(c_{q,\tau}^2 - 2\int_0^1 |\ell_{q,\tau}(h)|^2 dh\right)^{1/2}$$

и для четных q

$$\ell_{q,\tau}(h) = \ell_q(h) + (-1)^{q/2} \frac{h\cos(\frac{\pi h}{2})}{\pi^q(4\tau^2+\pi^2h^2)}\zeta(q),$$

для нечетных q

$$\ell_{q,\tau}(h) = \ell_q(h) - (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{(q+1)\cos(\frac{\pi h}{2})}{\pi^{q+1}(4\tau^2+\pi^2h^2)}\zeta(q+1).$$

Здесь также параметр τ определяется из условия минимизации константы $c_{q,\tau}^*$. Соответствующие результаты представлены в табл. 2. Отношение c_q/c_q^* показывает эффективность полной интерполяции по сравнению с классической интерполяцией, а отношение $c_{q,\tau'}/c_{q,\tau}^*$ показывает эффективность полной рациональной интерполяции по сравнению с рациональной, где τ' выбран согласно табл. 1. Как видим, полная интерполяция эффективна при $q \leq 3$.

На рис. 2 показаны результаты аппроксимации функции (16) посредством рациональной и полной рациональной интерполяций.

Corrected results see in:

L. Poghosyan, and A. Poghosyan, Asymptotic Estimates for the QP Interpolations, AJM 5(1), 34–57, 2013.

Таблица 2

Приближенные значения констант c_q^* и $c_{q,\tau}^*$ для оптимальных τ. Параметр τ' взят согласно табл. 1

q	1	2	3	4	5	6
c_q^*	0.0737	0.1031	0.0383	0.0342	0.0154	0.0117
c_q/c_q^*	3.2	1.04	1.63	1.007	1.3	1.002
$c_{q,\tau}^*$	0.0032	0.0036	0.0019	0.0015	0.0008	0.0005
τ	2.6540	2.7268	4.2723	4.4243	6.0581	6.3139
$c_{q,\tau'}/c_{q,\tau}^*$	13.6	3.4	4.1	1.3	1.9	1

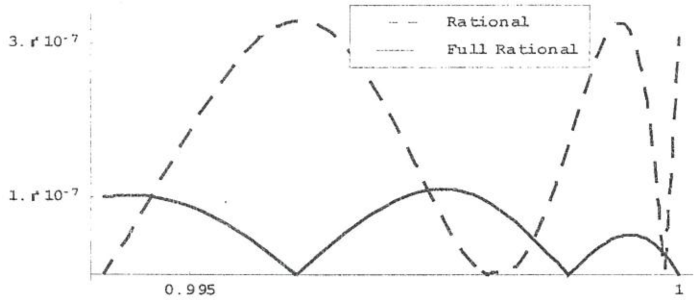

Рис. 2. $|R_N(f,x,\theta)|$ и $R_N^*(f,x,\theta)|$ для $N = 256$ с оптимальными параметрами $\theta = 1 - \frac{\tau}{N}$, взятыми из табл. 1, 2.

Из приведенных и многих других экспериментальных результатов следует, что рациональная интерполяция значительно более эффективна по сравнению с классической, а при $q \leq 3$ полная интерполяция еще более эффективна.

В заключение отметим, что оптимальные значения параметра τ в табл. 1 и 2 получены применением системы MATHEMATICA [7].

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Ա. Վ. Պողոսյան

Ողորկ ֆունկցիաների ռացիոնալ-եռանկյունաչափական գծային մոտարկման մասին

Աշխատանքում առաջարկվում և ուսումնասիրվում է ռացիոնալ ֆունկցիաներով ինտերպոլյացիա: Հետազոտված է մոտարկման L_2-սխալը, և լուծված է համապատասխան

օպտիմիզացիայի խնդիրը։ Արդյունքները համեմատվում են դասական եռանկյունաչափական ինտերպոլյացիայով իրականացվող մոտարկման հետ։ Մոտարկման զուգամիտության լրացուցիչ արագացման համար կիրառվում է, այսպես կոչված, «լրիվ» ինտերպոլյացիայի մեթոդը։

A. V. Poghosyan

On a Rational-Trigonometric Linear Interpolation of Smooth Functions

Rational linear interpolation of smooth function is introduced and investigated. Exact formulae for L_2-error of interpolations are derived and optimization problem is solved. For additional acceleration of convergence a so called full interpolation is applied.

Литература

1. *Zygmund A.* Trigonometric Series. 1959. V. 1. Cambridge Univ. Press.
2. *Nersessian A.* Theory of functions and applications. Collection of Works Dedicated to the Memory of Mkhitar M. Djrbashian. "Louys" Publishing House. 1995. P. 133-138.
3. *Nersessian A., Hovhannisian N.* - Journal of contemporary mathematical analysis. Matematika. 2002. V. 37. N 5. P. 48-62.
4. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. Мир. 1986. 502 с.
5. *Geer J.* - Journal of Scientific Computing. 1995. V. 10. N. 3. P. 325-356.
6. *Нерсесян А. Б., Оганесян Н. В.* - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. N 2. С. 12-15.
7. *Wolfram S.* The MATHEMATICA book. Fourth Edition, Wolfram Media. 1999. Cambridge University Press.