ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.62, 519.64

Академик НАН Армении **А. Б. Нерсесян, А. В. Погосян, К. П. Саакян**

Численное решение уравнений сверточного типа

(Представлено 18/XI 1997)

В работе (1) предложен метод параметрической интерполяции для приближенного символического решения некоторых типов уравнений. В частности, речь шла о схеме решения операторных уравнений вида $Lu(x)=f(x)$, удовлетворяющих условию $L(e^{i\lambda x})=l(\lambda)e^{i\lambda x}$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, $x\in[-1,1]$.

Ниже этот подход применен к интегро-дифференциальным уравнениям определенного типа. В отличие от схемы заметки (1), здесь приведены подробные выкладки и разъяснения.

1. Рассмотрим начальную задачу

$$Ly(x)\overset{def}{=}\sum_{n=0}^{p}\left[q_n\frac{d^n}{dx^n}y(x)+\int_{-1}^{1}K_n(x-z)\frac{d^n}{dz^n}y(z)dz\right]=f(x),\qquad(1)$$
$$x\in[-1,1],\quad y^{(n)}(t)=Y_n,\quad n=0,1,\dots,p-1,$$

где q_n $(n=0,\dots,p)$ от x не зависят, функции $K_n(x)$ $(n=0,\dots,p)$ $|x|\le 2$ предполагаются периодическими $(K_n(x+2)=K_n(x))$ и непрерывными, $t\in[-1,1]$ – фиксированное число. Предполагается, что эта задача корректна в $C^p[-1,1]$.

Пусть $N\ge 1$ – целое, $\{\theta_n(N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_m(N)\}_{m=1}^{p}$, $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{p}$ заданные последовательности такие, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n n^{2p}$ сходится абсолютно, $\varphi_m\in C^p[-1,1]$ $m=1,\dots,p$ а система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{p}\cup\{e^{i\pi n x}\}_{n=-N}^{N}$ линейно независима на $[-1,1]$.

Обозначим

$$y(f,N,x)=\sum_{k=-N}^{N}a_k(x)f(x_k)+\sum_{k=0}^{p-1}b_k(x)Y_k,\qquad(2)$$

$$R_N(y(x)) = y(x) - y(f,N,x), \tag{3}$$

где $x_k = \dfrac{2k}{2N+1}$, $k = 0,\pm1,\ldots,\pm N$. В каждой точке $x \in [-1,1]$ коэффициенты $\{a_k(x)\}_{k=-N}^{N}$ и $\{b_k(x)\}_{k=0}^{p-1}$ определим из условия безусловной минимизации следующего функционала (см. ([1])):

$$I(a(x),b(x)) \overset{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \left| R_N(e^{i\pi nx}) \right|^2 + \sum_{m=1}^{p} \mu_m \left| R_N(\varphi_m(x)) \right|^2 \to \min.$$

Вектор-функции $a(x) = (a_{-N}(x),\ldots,a_N(x))^T$ и $b(x) = (b_0(x),\ldots,b_{p-1}(x))^T$, определяются как решения системы

$$\frac{\partial I}{\partial a_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \left[e^{i\pi nx} - l_n \sum_{k=-N}^{N} a_k(x) e^{i\pi nx_k} - e^{i\pi nt} \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x)(i\pi n)^k \right] \times$$

$$\times \overline{l_n} e^{-i\pi nx_s} + \sum_{m=1}^{p} \mu_m \left[\varphi_m(x) - g_m(x) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) \varphi_m^{(k)}(t) \right] \overline{r_m(x_s)} = 0 \ , \tag{4}$$

$$s = 0,\pm1,\ldots,\pm N,$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \left[e^{i\pi nx} - l_n \sum_{k=-N}^{N} a_k(x) e^{i\pi nx_k} - e^{i\pi nt} \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x)(i\pi n)^k \right] \times$$

$$\times (-i\pi n)^l e^{-i\pi nt} + \sum_{m=1}^{p} \mu_m \left[\varphi_m(x) - g_m(x) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) \varphi_m^{(k)}(t) \right] \overline{\varphi_m^{(l)}(t)} = 0 \ , \tag{5}$$

$$l = 0,\ldots,p-1,$$

где

$$l_n = \sum_{k=0}^{p} (i\pi n)^k \left[q_k + \int_{-1}^{1} K_k(z) e^{-i\pi nz} dz \right], \quad n = 0,\pm1,\ldots,\pm N,$$

$$r_m(x) = \sum_{k=0}^{p} \left[q_k \varphi_m^{(k)}(x) + \int_{-1}^{1} K_k(x-z) \varphi_m^{(k)}(z) dz \right], \quad m = 1,\ldots,p, \tag{6}$$

$$g_m(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k(x) r_m(x_k), \quad m = 1,\ldots,p.$$

Можно показать, что если числа

$$d_s = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_{s+(2N+1)r} \left| l_{s+(2N+1)r} \right|^2, \quad s = 0,\pm1,\ldots,\pm N,$$

не равны нулю, то вектор-функция $a(x)$ выразится через вектор-функции $b(x)$ и $g(x) = (g_1(x),\ldots,g_p(x))^T$ следующим образом (см. также ([1])):

$$a_k(x)=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\frac{e^{-i\pi n x_k}}{d_n}\left[h_n(x)-\sum_{s=0}^{p-1}b_s(x)h_n^{(s)}(t)+\sum_{m=1}^{p}X_{nm}\mu_m\{\varphi_m(x)-\right.$$
$$\left.-g_m(x)-\sum_{s=0}^{p-1}b_s(x)\varphi_m^{(s)}(t)\}\right],\quad k=0,\pm1,\dots,\pm N, \tag{7}$$

где $h_n(x)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\theta_{n+(2N+1)r}\bar{l}_{n+(2N+1)r}e^{i\pi(n+(2N+1)r)x}$,

$$X_{nm}=\frac{1}{2N+1}\sum_{s=-N}^{N}\overline{r_m(x_s)}e^{i\pi n x_s},\quad n=0,\pm1,\dots,\pm N,\quad m=1,\dots,p.$$

Используя (5) и (6), получим следующую систему для определения $b(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{p}A_{\tau m}g_m(x)+\sum_{k=0}^{p-1}B_{\tau k}b_k(x)=E_\tau(x),\quad \tau=1,\dots,p,\\&\sum_{m=1}^{p}C_{lm}g_m(x)+\sum_{k=0}^{p-1}D_{lk}b_k(x)=F_l(x),\quad l=0,\dots,p-1,\end{aligned} \tag{8}$$

где приняты следующие обозначения ($\left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=1}^{p}$ – единичная матрица):

$$E_\tau(x)=\sum_{s=-N}^{N}\frac{\overline{X_{s\tau}}}{d_s}\left[h_s(x)+\sum_{m=1}^{p}X_{sm}\mu_m\varphi_m(x)\right],\quad \tau=1,\dots,p.$$

$$F_l(x)=\sum_{s=-N}^{N}\frac{\overline{h_s^{(l)}(t)}}{d_s}\left[h_s(x)+\sum_{m=1}^{p}X_{sm}\mu_m\varphi_m(x)\right]-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n(-i\pi n)^l e^{i\pi n(x-t)}-$$
$$-\sum_{m=1}^{p}\mu_m\overline{\varphi_m^{(l)}(t)}\varphi_m(x),\quad l=0,\dots,p-1,$$

$$A_{\tau m}=\delta_{\tau m}+\mu_m\sum_{s=-N}^{N}\frac{\overline{X_{s\tau}}}{d_s}X_{sm},\quad \tau,m=1,\dots,p,$$

$$B_{\tau k}=\sum_{s=-N}^{N}\frac{\overline{X_{s\tau}}}{d_s}\left[h_s^{(k)}(t)+\sum_{m=1}^{p}X_{sm}\mu_m\varphi_m^{(k)}(t)\right],\quad \tau=1,\dots,p,\quad k=0,\dots,p-1$$

$$C_{lm}=\mu_m\sum_{s=-N}^{N}\frac{\overline{h_s^{(l)}(t)}}{d_s}X_{sm}-\mu_m\overline{\varphi_m^{(l)}(t)},\quad l=0,\dots,p-1,\quad m=1,\dots,p,$$

$$D_{lk}=\sum_{s=-N}^{N}\frac{\overline{h_s^{(l)}(t)}}{d_s}\left[h_s^{(k)}(t)+\sum_{m=1}^{p}X_{sm}\mu_m\varphi_m^{(k)}(t)\right]-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n(-i\pi n)^l(i\pi n)^k-$$
$$-\sum_{m=1}^{p}\mu_m\varphi_m^{(k)}(t)\overline{\varphi_m^{(l)}(t)},\quad l,k=0,\dots,p-1.$$

Теорема 1. *Пусть функции* $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{p}$ *таковы, что система (8) имеет единственное решение. Тогда для любых* N, $\{\theta_n(N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_m(N)\}_{m=1}^{p}$ *функция* $y(f,N,x)$ *удовлетворяет начальным условиям задачи (1).*

Доказательство. Продифференцируем систему (8) по x j раз, $j=0,\dots,p-1$. Так как $E_\tau^{(j)}(t)=B_{\tau j}$, $F_l^{(j)}(t)=D_{lj}$, $\tau=1,\dots,p$, $j=0,\dots,p-1$, $l=0,\dots,p-1$, то вектор-функции $b(x)$ и $g(x)$ должны иметь следующие свойства:

$$g_m^{(j)}(t)=0,\ b_k^{(j)}(t)=\delta_{kj}\quad m=1,\dots,p,\ \ k=0,\dots,p-1,\ \ j=0,\dots,p-1. \quad (9)$$

Из (2), (7) и (9) следует, что $a_k^{(j)}(t)=0$, $y^{(j)}(f,N,t)=Y_j$, $j=0,\dots,p-1$, $k=0,\pm1,\dots,\pm N$.

2. Рассмотрим простейший частный случай, когда $\theta_n=1$, при $|n|\le N$ и $\theta_n=0$, при $|n|>N$. Из (2), (7) и (8) имеем

$$y(f,N,x)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{f_n}{l_n}\left[e^{i\pi nx}-e^{i\pi nt}\sum_{s=0}^{p-1}b_s(x)(i\pi n)^s\right]+\sum_{s=0}^{p-1}b_s(x)Y_s, \quad (10)$$

здесь $f_n=\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}f(x_k)e^{-i\pi nx_k}$, $n=0,\pm1,\dots,\pm N$, а

$$b_s(x)=\sum_{m=1}^{p}Q_{sm}G_m(x),\ \ s=0,\dots,p-1, \quad (11)$$

где $Q=\left\|Q_{sm}\right\|_{s=0\ m=1}^{p-1\ p}$ – обратная матрица к $\left\|G_m^{(s)}(t)\right\|_{m=1\ s=0}^{p\ p-1}$, а

$$G_m(x)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{\overline{X_{nm}}}{l_n}e^{i\pi nx}-\varphi_m(x),\ \ m=1,\dots,p. \quad (12)$$

Замечание 1. Легко проверить, что $Ly(f,N,x_k)=f(x_k)$, $k=0,\pm1,\dots,\pm N$, $Ly(\varphi_m(x),N,x)=\varphi_m(x)$, $m=1,\dots,p$, $Ly(e^{i\pi nx},N,x)=$ $=e^{i\pi nx}$, $n=0,\pm1,\dots,\pm N$, для таких $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{p}$, что матрица Q существует.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_m(x)$ $(m=1,\dots,p)$ *такие, что существует матрица* Q, *равномерно ограниченная по евклидовой норме числом, не зависящим от* N.

Тогда $b_s(x)\to y(x)$ $(N\to\infty)$ $s=0,\dots,p-1$ *равномерно по* $x\in[-1,1]$, *где* $y(x)$ – *решение однородной задачи (1).*

Доказательство. Из (11) и (12) имеем

$$\|Lb_s(x)\|_{L_2}^2 \le \text{Const} \max_{1\le m\le p}\|LG_m(x)\|_{L_2}^2 \to 0,\ (N\to\infty),\quad s=0,\dots,p-1.$$

Из корректности задачи (1) следует, что соответствующий обратный оператор L^{-1} – интегральный.

Теорема 3. *Пусть $f\in L_2(-1,1)$ и выполнены условия теоремы 2.*

Тогда $R_N(y(x))\to 0$ $(N\to\infty)$ равномерно по $x\in[-1,1]$.

Доказательство достаточно провести для случая, когда $Y_s=0$ $(s=0,\dots,p-1)$. Из (3) и (10) имеем, согласно теореме 2,

$$\|LR_N(y(x))\|_{L_2}^2 \le \text{Const}\left(\sum_{n=-N}^{n}{}' \frac{|f_n|}{|n|}\right)^2 \max_{0\le s\le p-1}\|Lb_s(x)\|_{L_2}^2 +$$

$$+\left\|\sum_{|n|>N} f_n e^{i\pi nx}\right\|_{L_2}^2 \to 0,\ (N\to\infty).$$

3. Численный пример. Пусть $y(x)=\dfrac{\cos 9x}{0{,}3+x^2}$. Рассмотрим следующую задачу:

$$y'''+y''+y'+2y+\int_{-1}^{1} e^{\sin\pi(x-t)}y(t)dt+\int_{-1}^{1} Ln(2+\cos\pi(x-t))y'(t)dt+$$
$$+2\int_{-1}^{1} y''(t)dt+\int_{-1}^{1}(1-\sin 2\pi(x-t))y'''(t)dt=f(x). \tag{13}$$

Функция f вычисляется явно и

$$y(0)=3{,}3,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=-292{,}2.$$

N	$\varepsilon_1(s)$	$s_1(s)$	$\varepsilon_2(s)$	$s_2(s)$	$a(s)$
5	110	–	200	–	–
9	17	6,5	35	5,7	1
17	0,036	460	0,08	437,5	2,3
33	0,02	1,8	0,05	1,6	2,5
65	0,0048	4,1	0,012	4,1	2,5
129	0,0012	4	0,003	4	3,3
257	0,0003	4	0,0007	4,2	3,5
513	0,000076	4	0,000175	4	3,7
1025	0,000019	4	0,000043	4	4

Эта задача решалась на системе MATHEMATICA 3.0 (см. [2]), согласно формулам (10), (11), (12), где в качестве $\varphi_m(x)$ $m=1,\dots,p$, были взяты функции e^{mx}, $m=1,\dots,p$. Приводится таблица ошибок, где приняты следующие обозначения

$$N=2^{s+1}+1,\quad \varepsilon_1(s)=\|R_N\|_{L_2},\quad \varepsilon_2(s)=\max_{-1\le x\le 1}|R_N|,\quad s=1,2,\ldots$$

$$s_1(s)=\frac{\varepsilon_1(s-1)}{\varepsilon_1(s)},\quad s_2(s)=\frac{\varepsilon_2(s-1)}{\varepsilon_2(s)},\quad a(s)=\frac{t(s)}{t(s-1)},\quad s=2,3,\ldots,$$

где $t(s)$ – время, затраченное на вычисления при данном s.

Как видим, в данном случае алгоритм имеет порядок $0(1/N^2)(N\to\infty)$, что свидетельствует о достаточной эффективности метода.

Институт математики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս **Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ,**
Ա. Վ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Կ. Պ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Փաքեթի տիպի հավասարումների թվային լուծում

Առաջարկվում է եղանակ, որի միջոցով գտնվում են փաթեթի տիպի ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների և համապատասխան եզրային խնդիրների մոտավոր լուծումները:

Նշված եղանակը աշխատում է արդյունավետ և հնարավորություն է տալիս լուծել խնդիրներ՝ պարամետրներից կախված տվյալներով: Հոդվածում տեղ գտած բանաձևերը առաջին հայացքից մեծածավալ են, սակայն նրանց ծրագրային սպասարկումը շատ պարզ է, եթե օգտագործվեն MATHEMATICA 3.0 *ծրագրային փաթեթի սիմվոլիկ և հաշվողական հնարավորությունները, մասնավորապես, Ֆուրյեի արագ ձևափոխության ալգորիթմը և գործողությունների արագությունը մատրիցների հետ աշխատելիս: Ներկայացված բանաձևերը ունեն ազատության աստիճաններ, որոնք կարելի է հարմարեցնել կոնկրետ խնդրի պայմաններին:*

Մանրամասն ուսումնասիրված է մի մասնավոր դեպք, ապացուցված են համապատասխան թեորեմներ, իսկ առաջարկված բանաձևերը ստուգված են բազմաթիվ օրինակների վրա: Հոդվածի վերջում նկարագրված է տիպիկ օրինակներից մեկը, իսկ արդյունքները ներկայացված են աղյուսակում, որն էլ վկայում է մեթոդի արդյունավետությունը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А.Б.Нерсесян*, ДНАН Армении, т.98, №1, с.23-30 (1998). [2] *S.Wolfram*, The MATHEMATICA Book. Thirg Edition, Wolfram Media, 1996.