



DYNAMIC SYSTEMS AND COMPUTER SCIENCE
**DYSC
2024**



ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2024)

Материалы 6-й Международной конференции
Иркутск, 18–23 сентября 2024 г.

ISBN 978-5-9624-2309-8

УДК 004
ББК 32.973
Д91

Редакционная коллегия:

В. Г. Антоник, канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. ред.)
А. В. Арзучинцев, д-р физ.-мат. наук, проф.
М. В. Фалалеев, д-р физ.-мат. наук, проф.

Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024): материалы 6-й Международной конференции. Иркутск, 16–20 сентября 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; [отв. ред. В. Г. Антоник]. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

<https://doi.org/10.26516/978-5-9624-2309-8.2024.1-224>

ISBN 978-5-9624-2309-8

Представлены материалы, отражающие качественные вопросы теории дифференциальных и операторных уравнений, системного анализа и управления динамическими системами, информационных технологий, теории дискретных функций, комбинаторных и стохастических проблем иерархических структур, прикладных задач математического и компьютерного моделирования.

Для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Иркутский государственный университет»

664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. +7 (3952) 51-19-00

Издательство ИГУ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124

тел. +7 (3952) 52-18-53; e-mail: izdat@lawinstitut.ru

Подписано к использованию 27.09.2024. Тираж 13 экз. Объем 52 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше



DYSC
2024



ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2024)

Материалы 6-й Международной конференции
Иркутск, 18–23 сентября 2024 г.

ISBN 978-5-9624-2309-8



DYNAMIC SYSTEMS AND COMPUTER SCIENCE

**DYSC
2024**



ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2024)

Материалы 6-й Международной конференции
Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.

ISBN 978-5-9624-2309-8

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2024)

Материалы 6-й Международной конференции

Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.



УДК 004
ББК 32.973
Д91

Редакционная коллегия:

В. Г. Антоник, канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. ред.)

А. В. Аргучинцев, д-р физ.-мат. наук, проф.

М. В. Фалалеев, д-р физ.-мат. наук, проф.

Д91 **Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024)** : материалы 6-й Международной конференции. Иркутск, 16–20 сентября 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; [отв. ред. В. Г. Антоник]. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

<https://doi.org/10.26516/978-5-9624-2309-8.2024.1-224>

ISBN 978-5-9624-2309-8

Представлены материалы, отражающие качественные вопросы теории дифференциальных и операторных уравнений, системного анализа и управления динамическими системами, информационных технологий, теории дискретных функций, комбинаторных и стохастических проблем иерархических структур, прикладных задач математического и компьютерного моделирования.

Для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

УДК 004
ББК 32.973



**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2024)
Материалы 6-й Международной конференции**

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 10

**1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И
ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Бжеумихова О. И.

Классические краевые задачи для одного эллиптического уравнения
с инволютивным отклонением аргумента 11

Буланов С. Г.

Анализ устойчивости по Ляпунову систем нелинейных обыкновенных
дифференциальных уравнений на основе аддитивных преобразований разностных схем 13

Головко Е. А., Тренева Г. А.

Видоизмененная задача Дирихле для одной эллиптической системы
с переменными коэффициентами 17

Гончаров Н. С., Загребина С. А., Свиридчук Г. А.

Анализ стохастической системы Вентцеля уравнений свободной фильтрации
жидкости в шаре и на его границе 20

Гражданцева Е. Ю.

Решение типа бегущей волны одной смешанной задачи для системы
дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейностью типа «модуль» 22

Донцова М. В.

Условия разрешимости системы дифференциальных уравнений с нулевыми
правыми частями 24

Дрегля Сидоров Л. Р. Д., Сидоров Н. А.

Задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом 26

Жамцаев Н. С.

Алгоритм и численное решение линейного смешанного дифференциального
уравнения в пакете Python 29

Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н.

Исследование класса задач с относительно ограниченным пучком операторов
со случайным начальным состоянием 31

Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.

Точные и приближенные решения нелинейной параболической системы «хищник – жертва» 33

Кожанов А. И.

Определение параметров в математических моделях 37

Кожанов А. И., Телешева Л. А.

О некоторых задачах идентификации постоянного коэффициента
в линеаризованном уравнении Линя – Рейснера – Цзяня 38

Кузнецов П. А. О некоторых точных решениях типа волн для нелинейной параболической системы «хищник – жертва»	41
Леонтьев Р. Ю., Фалалеев М. В. Вполне непрерывные операторы в некоторых задачах математического моделирования	43
Мамедов Ю. А., Ахмедов Х. И. Об одной смешанной задаче для уравнения параболического типа	48
Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю. Классическая матрица рассеяния для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием	50
Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю. Потери энергии быстрой цветной частицы в неабелевой плазме в рамках гамильтонова формализма	55
Намсараева Г. В. Разрешимость обратных задач для параболического уравнения с правой частью комбинированного типа	60
Николаев О. Ю. Нелинейная обратная задача с интегральным переопределением для псевдопараболического уравнения	62
Орлик Л. К. Об экспоненциальной характеристике дифференциально-разностного уравнения с почти периодическими коэффициентами в банаховом пространстве	64
Пластинина В. М. Вычислительная модель для двухмерного парабола-гиперболического уравнения теплопроводности по неявной схеме	67
Торсян В. С., Погосян А. В. Об исследовании характерных закономерностей изменения скачков на границе прямоугольника в одной известной задаче теории упругости	70
Фалалеев М. В., Захарова И. В. О разрешимости и предельных свойствах некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в главной части	74
Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Математическая модель нелинейного по коэффициенту теплопроводности гипербола-параболического уравнения для ограниченных пластин	79
Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Численное решение начально-краевой задачи для смешанного оператора теплопроводности с нелинейным источником тепла	82
Шлапунов А. А., Полковников А. Н. Обобщенные уравнения Навье – Стокса, ассоциированные с комплексом Дольбо	74
Шорохов С. Г. О вариационной формулировке краевой задачи для бесконечномерной динамической системы	88

2. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Алиева С. Т.

Необходимые условия оптимальности для разностных уравнения
дробного порядка с запаздыванием 92

Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.

Необходимое условие оптимальности гладких управлений в модели,
описывающей динамику взаимодействующих популяций 95

Барсегян В. Р., Солодуша С. В.

О задачах оптимального граничного управления колебаниями струны
с заданными промежуточными значениями скоростей при минимизации
граничной энергии 99

Добринец И. М., Тетерина Е. А., Викулова Е. Р.

О задаче оптимального управления микросервисной архитектурой
с использованием стохастических дифференциальных уравнений 103

Дыхта В. А.

Метод опорных мажорант в задачах оптимального управления
с терминальными ограничениями 106

Казаков А. Л., Лемперт А. А., Нгуен Д. М.

О построении покрытия эллипсоида равными шарами 111

Колесников И. А.

Сплайн-интерполяционное решение задачи оптимальных динамических измерений 114

Копылов Д. Е., Карпенков М. А., Щурик М. В.

Обзор библиотек языка Python для решения задач оптимального управления 117

Лутошкин И. В., Рыбина М. С.

Метод параметризации в задаче ОУ с управляемым разрывом фазовой траектории 121

Мансимзаде А. Ф., Мансимов К. Б.

К необходимым условиям оптимальности двухступенчатой задаче
оптимального управления с интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра ... 125

Мансимов К. Б., Керимова А. В.

Об одной негладкой ступенчатой задаче управления разностными уравнениями
типа Вольтерра 128

Марданов М. Д., Меликов Т. К.

Необходимые условия минимума в вариационных задачах с запаздыванием
при наличии вырождений 131

Масталиев Р. О.

Об оптимальности особых управлений в одной задаче оптимального
управления стохастическими гиперболическими уравнениями первого порядка 135

Моржин О. В.

Об оптимизации когерентного и некогерентного управлений в некоторых
открытых квантовых системах 138

Самсолюк О. Н.

Импульсное управление процессом выметания 141

Самсолюк О. Н., Солодуша С. В., Солодуша П. Ю., Скурыгина М. А.

Приложение теории оптимального транспорта к исследованию семантического
сходства текстов 144

Срочко В. А. Еще раз о линейно-квадратичной задаче оптимального управления.....	146
Хамисов О. В. Вычислительная эффективность взаимодействия методов непрерывной и дискретной оптимизации.....	149

3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ. КОМБИНАТОРНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Балагура А. А., Кузьмин О. В. Алгоритмы перечисления решеточных путей с ограничениями и корневых деревьев по различным параметрам.....	153
Во В. Ч., Нойягдам С., Сидоров Д. Н. Решение четырехмерной системы спроса и предложения энергии с использованием нейронных сетей глубокого обучения.....	157
Галиакберов Р. Р. Обзор нейросетей в задачах решения дифференциальных уравнений.....	161
Гарашенко А. А. Применение методов слияния данных и построения N-мерных сплайнов для распознавания внешней границы аврорального овала.....	165
Колокольникова Н. А. Распределение, выражаемое через числа Лаха.....	169
Кузьмин О. В., Стрихарь М. В. Комбинаторный алгоритм перечисления и пересчета композиций натурального числа с ограничениями на значения его натуральных частей.....	173
Куликов С. М., Суримова В. А. Простой алгоритм разделения секрета (3,2), основанный на матричных кодирующих книгах особой симметричной формы.....	177
Парамонов В. В., Шигаров А. О. Обзор таксономий веб-таблиц.....	180
Петрушин И. С., Оверченко Ю. А., Маркова Ю. А. Веб-приложение для определения морфологических показателей клеточных культур методами компьютерного зрения.....	184
Попов М. А., Кононенко Р. В. Прогноз качества флотационного процесса с применением методов регрессионного анализа.....	187
Попова В. А. Программный комплекс для статической проверки типов конфигураций «1С:Предприятия».....	190
Рябец Л. В., Зинченко А. С. О вопросах обмена данными с мобильным приложением на платформе «1С: Предприятие».....	192
Синичкин О. И. О методах оптимизации моделей глубокого обучения: квантование, дистилляция и поиск архитектур.....	196

4. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Барсегян В. Р., Мкртчян М. Г., Матевосян А. Г. Об одной задаче управления БПЛА по линии визирования	199
Вшивков Ю. Ф., Намаконов А. Ю., Хойлов В. В. Решение навигационной задачи мобильного робота, оснащенного лазерным дальномером	203
Дао М. Х., Сидоров Д. Н. Оценка состояния заряда накопителей энергии с помощью сетей Колмогорова – Арнольда	206
Захарченко В. С., Шеломенцева Н. Н. К построению модели взаимодействия жителей многоквартирного дома и управляющей компании	210
Лукьянцев Д. С., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б. Численное моделирование эффекта Шапиро в поле тяготения группы астрофизических объектов	213
Миронов В. Л., Миронов С. В. Модель вихревого плоского течения неньютоновской жидкости	217
Носырев О. Д. Тепловая машина на вращающихся фуллеренах	221



**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2024)**
Материалы 6-й Международной конференции
С. 10–10

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник содержит тексты докладов, представленных на 6-ю Международную конференцию «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (г. Иркутск, Иркутский государственный университет, 16–20 сентября 2024 г.). Данная серия конференций проводится ежегодно с 2019 г.

В программу конференции включены доклады ученых из 14 регионов России, а также ряда зарубежных стран.

Конференция посвящена 105-летию математического образования в Восточной Сибири и 85-летию со дня рождения профессора О. В. Васильева.

Иркутский государственный университет (ИГУ), образованный в октябре 1918 г., был первым российским университетом на территории Восточной Сибири и Дальнего Востока. В январе 1919 г. было принято решение о создании в ИГУ физико-математического факультета. В течение почти полувека подготовка основных математических кадров региона осуществлялась на базе математического отделения этого факультета. В декабре 1965 г. приказом министра высшего и среднего специального образования РСФСР факультет был разделен на два: математический (ныне Институт математики и информационных технологий) и физический факультеты.

Профессор **Олег Владимирович Васильев** (1939–2002) — основатель иркутской научной школы оптимального управления, первый директор Института математики и экономики, первый заведующий кафедрой методов оптимизации ИГУ.

Сборник включает четыре секции: «Качественные вопросы теории дифференциальных и операторных уравнений», «Системный анализ и управление динамическими системами», «Информационные технологии. Теория дискретных функций. Комбинаторные и стохастические проблемы иерархических структур», «Прикладные задачи математического и компьютерного моделирования». Пленарные доклады включены в соответствующие секции.

Тексты докладов публикуются в авторской редакции. Лишь в отдельных случаях редакционная коллегия позволила себе внести необходимые лексические и грамматические правки.

Предназначается для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. В. Г. Антоник (ответственный редактор);
д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Аргучинцев;
д-р физ.-мат. наук, проф. М. В. Фалалеев



КЛАССИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

© 2024 г. О. И. БЖЕУМИХОВА

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для линейного эллиптического уравнения с инволюцией по временной переменной в младших слагаемых. Для исследуемых задач в пространствах Соболева доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, инволюция, краевая задача, регулярные решения, существование, единственность.

AMS Subject Classification: 35J40, 35P05

Исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных с инволюцией посвящено много работ (см., например, [1, 2, 6–12]). Однако заметим, что большинство работ посвящены одномерным задачам для уравнений с постоянными коэффициентами и с линейной инволюцией, в которых основным методом исследования был метод Фурье. Изучаемые в настоящей работе дифференциальные уравнения с инволюцией, а также методы исследования краевых задач для них имеют существенные отличия от изученных ранее предшественниками.

Пусть Ω – ограниченная область из пространства R^n переменных x_1, x_2, \dots, x_n с гладкой границей Γ . В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt}(x, t) + \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x, \varphi(t)) = f(x, t), \quad (1)$$

где $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $f(x, t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $\varphi(t)$ – заданная на отрезке $[0, T]$ инволюция, Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным x_1, x_2, \dots, x_n .

Задача 1. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Q , удовлетворяющее условиям:

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где $S = \Gamma \times (0, T)$.

Задача 2. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Q , удовлетворяющее (2), а также условиям:

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Представленные задачи достаточно хорошо изучены в случае $b(x, t) = 0$ [3].

Пусть $w(x)$ есть функция из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq c_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx$$

с постоянной c_0 , определяющейся лишь областью Ω [4].

Основные научные результаты сформулированы в виде двух теорем:

Исследование выполнено при финансовой поддержке Внутреннего гранта КБГУ (Договор № 8).

Теорема 1. Пусть для функций $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $\varphi(t)$ выполняются условия:

$$a(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad \varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad (3)$$

$$a(x, t) < 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}, \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(t) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad (4)$$

$$\frac{1}{c_0} + \frac{2}{T^2} - \min_{\overline{Q}} a(x, t) - \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |b(x, t)| > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ задача 1 имеет единственное решение $u(x, t) \in W_2^2(Q)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (3), (4), а также условие

$$\frac{1}{c_0} - \min_{\overline{Q}} a(x, t) - \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |b(x, t)| > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ задача 2 имеет единственное решение $u(x, t) \in W_2^2(Q)$.

Доказательство теорем проведено методом продолжения по параметру и с помощью априорных оценок [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витер И. Я. Дифференциальные уравнения с инволюциями // Дифференциальные уравнения. 1969. 5, № 6. С. 1131–1137.
2. Витер И. Я. Дифференциальные уравнения в частных производных с инволюциями // Дифференциальные уравнения. 1970. 6, № 7. С. 1320–1322.
3. Ладженская О. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988. 336 с.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 495 с.
6. Турметов Б. Х. Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа // Челябинский физико-математический журнал. 2019. 4, № 1. С. 33–41.
7. Ashyralyev A., Sarsenbi A. M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. 2015, № 284. P. 1–8.
8. Baskakov A. G., Uskova N. B. Fourier method for first order differential equations with involution and groups of operators // Ufa Mathematical Journal. 2018. 10, № 3. P. 11–34.
9. Cabada A., Tojo F. A. F. Differential Equations with Involutions. Amsterdam-Paris-Beijing : Atlantic Press, 2015. 154 p.
10. Iskakova U. A., Torebek B. T. Certain method of solving ill-posed Cauchy-Robin problem for the Laplace operator // Of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series. 2016. 6, № 310. P. 115–120.
11. Kozhanov A. I., Bzheumikhova O. I. Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives // Mathematics. 2022. 10, № 18:3325. P. 1–10.
12. Yarka U., Fedushko S., Veselý P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation // Mathematics. 2020. 8, № 12: 2108. P. 1–13.

Бжеумихова Оксана Игоревна

Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова

E-mail: bzhoksana@gmail.com



АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ АДДИТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

© 2024 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Приводятся необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерии получены на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования и теоремы Лагранжа о среднем. Аналитические оценки устойчивости строятся на основе поведения правой части системы без ее преобразования и построения функции Ляпунова. Математическая конструкция критериев влечет возможность программной реализации.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, анализ устойчивости, критерии устойчивости.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений остается актуальным направлением исследований [6, 7]. Традиционно разработка методов исследования устойчивости основана на построении функций Ляпунова [8]. Вместе с тем необходимость выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени требует построения компьютеризируемых методов. В работе предлагается подход к анализу устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на основе рекуррентных преобразований разностных схем в аддитивной форме. Результатом преобразований должны стать критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий. Далее с помощью аддитивных преобразований формулы конечных приращений конструируются новые разновидности критериев. Необходимо, чтобы форма получаемых критериев допускала программную реализацию.

2. Критерии устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нелинейную систему ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что в области $R : \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0\}$ для (1) выполнены все условия существования и единственности решения, функция $F(t, Y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t [5]. Требуется получить критерии устойчивости по Ляпунову для системы (1) на основе аддитивных преобразований разностных схем и формулы конечных приращений.

Представим точное решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где q_{ki} – остаточные члены формулы Тейлора для k -й компоненты решения. Шаг h предполагается равномерным, для произвольно выбранной независимой переменной $t \in [t_0, \infty)$ имеют место соотношения $h = \frac{t-t_0}{i+1}, i = 0, 1, \dots, t_{j+1} = t_j + h, 0 \leq j \leq i$ [1].

Преобразование выражения (2) в аддитивной форме влечет соотношение

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-1)} + hf_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki},$$

или $y_{k(i+1)} = y_{k0} + \sum_{\ell=0}^i h f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^i q_{k(i-\ell)}$, $y_{k0} = y_k(t_0)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

С учетом оценки остаточных членов, величина возмущения решения на промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения [2]

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h (f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell})), \quad (3)$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), k = 1, 2, \dots, n.$$

Выделим в (3) возмущение начальных данных в виде множителя:

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h (f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0))$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 1. Для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно существование Δ , $0 < \Delta \leq \delta$ такого, что $\forall \tilde{Y}(t) : 0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h (f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}_1, \tilde{c}_1 = \text{const},$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), k = 1, 2, \dots, n.$$

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1 \leq \Delta$, такое, что неравенство $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h (f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

Далее конструируются критерии устойчивости на основе аддитивных преобразований формулы конечных приращений.

Пусть на полуоси последовательными индексами отмечены равные по длине отрезки с общими границами

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, t_{i+1}], t_{i+1} = t_i + h_c, h_c = \text{const}, i = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где h_c задается произвольно. Построение критериев устойчивости опирается на теорему Лагранжа о среднем, применяемую к каждому отрезку из (4).

Рассмотрим следующие разновидности формул средних значений

$$y_k(t_{\ell+1}) - y_k(t_\ell) = f_k(\xi_{k\ell}, Y(\xi_{k\ell}))(t_{\ell+1} - t_\ell), \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \quad (5)$$

$\forall \ell = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, n$, и

$$y_k(t) - y_k(t_\ell) = f_k(\theta_{k\ell}, Y(\theta_{k\ell}))(t - t_\ell), \forall t \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \quad (6)$$

$\theta_{k\ell} \in (t_\ell, t), \forall \ell = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, n$.

Введем обозначения $\Delta f_k(\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell}) = f_k(\tilde{\xi}_{k\ell}, \tilde{Y}(\tilde{\xi}_{k\ell})) - f_k(\xi_{k\ell}, Y(\xi_{k\ell}))$,

$\Delta f_k(\tilde{\theta}_{k\ell}, \theta_{k\ell}) = f_k(\tilde{\theta}_{k\ell}, \tilde{Y}(\tilde{\theta}_{k\ell})) - f_k(\theta_{k\ell}, Y(\theta_{k\ell}))$.

Имеет место

Теорема 2. Решение системы (1) устойчиво, если при любом выборе $h_c = \text{const}$, $\exists \Delta > 0$, такое, что $\forall \tilde{Y}(t) : 0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\sum_{\ell=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq c_1, c_1 = \text{const}, \tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell} \text{ из (5)}, \text{ и}$$

$$\left| \frac{\Delta f_k(\tilde{\theta}_{k\ell}, \theta_{k\ell})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq c_2, c_2 = \text{const}, \tilde{\theta}_{k\ell}, \theta_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \forall t \in (t_\ell, t_{\ell+1}), t_{\ell+1} - t_\ell = h_c,$$

$\forall \ell = 0, 1, \dots, i, \forall i = 0, 1, \dots, \tilde{\theta}_{k\ell}, \theta_{k\ell}$ из (6).

Теорема 3. Решение системы (1) асимптотически устойчиво, если выполнены условия теоремы 2 и $\exists \Delta_1 > 0$, $0 < \Delta_1 \leq \Delta$, такое, что при любом выборе $h_c = \text{const}$ из (4), $\forall \tilde{Y}(t) : 0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$, выполняются соотношения

$$\frac{h_c \sum_{\ell=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, t \in [t_i, t_{i+1}), \forall i = 0, 1, \dots, (i \rightarrow \infty),$$

$\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \forall \ell = 0, 1, \dots, i, \forall k = 1, 2, \dots, n$, где $\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell}$ из (5), и $\tilde{y}_k(t) - y_k \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно $\exists \Delta > 0$, такого что $\forall \tilde{Y}(t) : 0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, имеет место соотношение

$$\left| \frac{\Delta f_k(\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)})(t - t_{i+1}) + h_c \sum_{\ell=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1 \right| \leq \tilde{c}_2, c_2 = \text{const} \quad (7)$$

$\forall t \in [t_0, \infty), t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \forall i = 0, 1, \dots, \tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2}), \tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \forall \ell = 0, 1, \dots, i$, где $\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)}$ из (6) при $\ell = i + 1$, $\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell}$ - из (5).

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (7) и $\exists \Delta_1$, $0 < \Delta_1 \leq \Delta$, такое, что $\forall \tilde{Y}(t) : 0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ выполняются соотношения

$$\Delta f_k(\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)})(t - t_{i+1}) + h_c \sum_{\ell=0}^i \Delta f_k(\tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell}) + \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) \rightarrow 0, \quad (8)$$

$t \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty), \tilde{\xi}_{k\ell}, \xi_{k\ell} \in (t_\ell, t_{\ell+1}), \tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2}) \forall k = 1, 2, \dots, n$.

Практическая реализация критериев (7), (8) заключается в возможности определить значения $\xi_{k\ell}$ в $f_k(\xi_{k\ell}, Y(\xi_{k\ell}))$ с высокой точностью. Из (5) $\frac{y_k(t_{\ell+1}) - y_k(t_\ell)}{h_c} = f_k(\xi_{k\ell}, Y(\xi_{k\ell}))$, что равносильно $h_c^{-1}(y_k(t_{\ell+1}) - y_k(t_\ell)) - f_k(\xi_{k\ell}, Y(\xi_{k\ell})) = 0$.

Для нахождения значений решения и правой части системы (1) можно использовать кусочно-интерполяционный метод с итерационным уточнением [3]. На каждом подынтервале строятся интерполирующие компоненты решения и правой части системы (1) в виде алгебраических полиномов фиксированной степени от одной переменной t . Они непрерывно склеиваются на каждой границе смежных подынтервалов. В результате получается непрерывное приближение функцией одной переменной каждого компонента решения и правой части системы (1) на всем отрезке решения.

На этой основе можно найти $\xi_{k\ell}$ как минимум модуля левой части равенства

$$\min_{\xi_{k\ell} \in [t_\ell, t_{\ell+1}]} |h_c^{-1}(y_k(t_{\ell+1}) - y_k(t_\ell)) - f_k(\xi_{k\ell}, Y(\xi_{k\ell}))| = 0.$$

Минимум модуля любой функции на любом конечном отрезке с высокой точностью определяется с помощью программы на основе алгоритма сортировки [4].

3. Заключение. Представлены критерии устойчивости по Ляпунову систем нелинейных ОДУ в форме необходимых и достаточных условий. Критерии получены на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования в условиях существования и единственности решения, непрерывности и непрерывной дифференцируемости правой части системы. Приводятся критерии устойчивости на основе теоремы Лагранжа о среднем при произвольном шаге между узловыми точками. Все разновидности критериев допускают программную реализацию, что влечет возможность компьютеризации анализа устойчивости по Ляпунову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланов С. Г. Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. 225. С. 28–37.
2. Буланов С. Г. Критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в мультипликативной и аддитивной форме // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2024. 234. С. 108–117.
3. Джануцц Г. А., Ромм Я. Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. 57, № 10. С. 1641–1660.
4. Ромм Я. Е. О границах идентификации корней полиномов на основе устойчивой адресной сортировки // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 12. С. 84–108.
5. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 7. С. 42–60.
6. Akhmet M. U., Arugaslan D., Yilmaz E. Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2011. 235. P. 4554–4560.
7. Sené N. Exponential form for Lyapunov function and stability analysis of the fractional differential equations // J. Math. Computer Sci. 2018. 18, № 4. P. 388–397.
8. Okereke R. N. Lyapunov stability analysis of certain third order nonlinear differential equations // Applied Mathematics. 2016. 7. P. 1971–1977.

Буланов Сергей Георгиевич

Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)»

E-mail: bulanovtspi@mail.ru



ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2024 г. Е. А. ГОЛОВКО, Г. А. ТРЕНЕВА

Аннотация. Рассмотрена видоизмененная задача Дирихле в шаре для эллиптической системы с переменными коэффициентами. Система является эллиптической везде, кроме начала координат и некоторой сферы, на которой происходит параболическое вырождение. Изучено влияние такого вырождения на характер разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: многомерные эллиптические системы, задача Дирихле, видоизмененная задача Дирихле, системы с переменными коэффициентами, характеристический определитель, задача о наклонной производной.

AMS Subject Classification: 35J57

Эллиптические системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами можно разбить на классы, относя к одному классу такие системы, которые можно продеформировать друг в друга, непрерывно изменяя коэффициенты как параметры. Причем в процессе деформации система сохраняет эллиптичность. Системы, попадающие в один и тот же класс, гомотопны. Поэтому такое разбиение эллиптических систем на классы называют гомотопической классификацией. Если система с переменными коэффициентами эллиптика в некоторой области, то все системы с постоянными коэффициентами, которые получаются из данной системы фиксированием значений коэффициентов в некоторой точке области, гомотопны друг другу. Система с переменными коэффициентами, при фиксировании коэффициентов которой в двух различных точках области получаются негомотопные системы с постоянными коэффициентами, обязательно вырождается на некотором множестве, разбивающем область. Задача гомотопической классификации полностью решена только для систем с двумя независимыми переменными. Представляет интерес исследование влияния вырождения на характер разрешимости граничных задач [2], [3].

В трехмерном пространстве рассмотрим систему

$$\begin{aligned} -(x^2 + y^2 + z^2)\Delta u + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) &= 0; \\ -(x^2 + y^2 + z^2)\Delta v + \lambda \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) &= 0; \\ -(x^2 + y^2 + z^2)\Delta w + \lambda \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ – неизвестные функции, $\lambda > 0$ – вещественный параметр.

Характеристический определитель системы (1) имеет вид

$$\det = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \lambda)(\xi^2 + \eta^2 + \mu^2)^3.$$

Поэтому система (1) эллиптика везде, кроме начала координат и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, где происходит параболическое вырождение. Пусть $D : \{x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$, причем $R^2 > \lambda$. То есть D – шар, содержащий сферу вырождения. $\Gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ – граница этого шара.

Рассмотрим задачу Дирихле в следующей постановке: найти регулярные в шаре D решения системы (1), удовлетворяющие на границе Γ условиям

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma} &= f_1; \\ v|_{\Gamma} &= f_2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$w|_{\delta\Gamma} = f_3, \quad (3)$$

где $\delta\Gamma : \{z = 0, x^2 + y^2 = R^2\}$.

Введем обозначение

$$u_x + v_y + w_z = H.$$

Тогда систему (1) можно переписать так

$$\begin{aligned} -(x^2 + y^2 + z^2)\Delta u + \lambda \frac{\partial H}{\partial x} &= 0; \\ -(x^2 + y^2 + z^2)\Delta v + \lambda \frac{\partial H}{\partial y} &= 0; \\ -(x^2 + y^2 + z^2)\Delta w + \lambda \frac{\partial H}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4) по x , второе — по y , третье — по z и сложим результаты дифференцирований. Учитывая выражения для $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, которые можно получить из системы (1), будем иметь

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \lambda)\Delta H + 2\lambda \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} + z \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$(\rho - \lambda)\Delta H + \frac{2\lambda}{\rho} \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} + z \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0.$$

Последнее уравнение можно записать иначе

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((\rho - \lambda) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\rho - \lambda) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\rho - \lambda) \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \\ + \frac{2(\lambda - \rho)}{\rho} \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} + z \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножим уравнение (6) на H и после преобразований получим

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((\rho - \lambda) H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\rho - \lambda) H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\rho - \lambda) H \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda - r^2}{r} \right) H^2 + \\ + (\lambda - \rho) \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\lambda + r^2}{r^2} H^2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Проинтегрируем уравнение (7) по шару $D_\lambda : \{x^2 + y^2 + z^2 = \lambda\}$

$$\begin{aligned} \int_{D_\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((\rho - \lambda) H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\rho - \lambda) H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\rho - \lambda) H \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] dx dy dz + \\ + \int_{D_\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda - r^2}{r} \right) H^2 dx dy dz + \\ + \int_{D_\lambda} \left[(\lambda - \rho) \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\lambda + r^2}{r^2} H^2 \right] dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью формулы Остроградского – Гаусса можно показать, что каждый из первых двух интегралов уравнения (9) равен нулю. Тогда получим равенство

$$\int_{D_\lambda} \left[(\lambda - \rho) \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\lambda + r^2}{r^2} H^2 \right] dx dy dz = 0,$$

которое возможно только при $H = 0$.

Мы показали, что в шаре D_λ уравнение (5) имеет только нулевое решение $H = 0$. Покажем, что и вне этого шара $H = 0$. Будем искать решения уравнения (5) в виде

$$H_i = F_i(\rho)\omega_i(x, y, z),$$

где ω_i — однородный гармонический полином степени i :

$$\Delta\omega_i = 0, \quad x \frac{\partial\omega_i}{\partial x} + y \frac{\partial\omega_i}{\partial y} + z \frac{\partial\omega_i}{\partial z} = i\omega_i.$$

Для определения функций $F_i(\rho)$ получены уравнения Римана

$$F_i'' + \left(\frac{i+1/2}{\rho} + \frac{1}{\rho-\lambda} \right) F_i' + \frac{\lambda i}{2\rho} \frac{1}{\rho-\lambda} F_i = 0. \quad (9)$$

В работе показано, что при $R^2 > \lambda$ уравнение (5) имеет только нулевое решение

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(\rho) \omega_i(x, y, z) \equiv 0.$$

Из системы (1) имеем

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\lambda}{x^2+y^2+z^2} \frac{\partial H}{\partial x} = 0; \\ \Delta v &= \frac{\lambda}{x^2+y^2+z^2} \frac{\partial H}{\partial y} = 0; \\ \Delta w &= \frac{\lambda}{x^2+y^2+z^2} \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

т. е. функции u , v , w являются гармоническими. Функции u и v находятся единственным образом из задач Дирихле в шаре D [1]

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad u|_{\Gamma} = f_1; \\ \Delta v &= 0, \quad v|_{\Gamma} = f_2. \end{aligned}$$

Для гармонической функции w получаем задачу о наклонной производной

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{\Gamma} &= - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = \Phi(x, y, z). \end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид $w = p(x, y) \varphi(x, y, z)$, где $\varphi(x, y, z)$ — регулярная в шаре D гармоническая функция, однозначно определяемая функцией $\Phi(x, y, z)$, а гармоническая в D функция $p(x, y)$ однозначно определяется условием (4) [4]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Видоизмененная задача Дирихле для системы (1) с условиями (2), (3) имеет единственное решение в классе функций, ограниченных на бесконечности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1977.
2. Руткаускас С. О задаче типа Дирихле для эллиптических систем с вырождением на прямой // Математические заметки. 2016. 100, № 2. С. 270–278.
3. Янушаускас А. И. Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. Вильнюс : Мокслас, 1990.
4. Янушаускас А. И. Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

Головко Елена Анатольевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: elena-golovko@mail.ru

Тренева Галина Александровна
Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ)
E-mail: galkatren@gmail.com



АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ШАРЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

© 2024 г. Н. С. ГОНЧАРОВ, С. А. ЗАГРЕБИНА, Г. А. СВИРИДЮК

Аннотация. Впервые изучены детерминированная и стохастическая системы Вентцеля уравнений свободной фильтрации жидкости в шаре и на его границе. В детерминированном случае установлена однозначная разрешимость начальной задачи для системы Вентцеля в специфическом построенном гильбертовом пространстве. В случае стохастической гидродинамической системы используется теория производной Нельсона – Гликлиха и строится решение, которое позволяет определять количественного изменения геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации. Отметим, что для изучаемой системы фильтрации рассматривалось неклассическое условие Вентцеля, поскольку оно представлено уравнением с оператором Лапласа – Бельтрами, заданным на границе области, понимаемой как гладкое компактное риманово многообразие без края, причем внешнее воздействие представлено нормальной производной функции, заданной в области.

Ключевые слова: система уравнений Вентцеля, уравнение свободной фильтрации, производная Нельсона – Гликлиха.

AMS Subject Classification: 35G15

1. Постановка задачи. Для $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r \in [0, R), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$ — шар в \mathbb{R}^3 , с границей $\Gamma = \{(\theta, \varphi) : \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$ на компакте $\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему уравнений Вентцеля, моделирующих эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости,

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha_0 \Delta_{r,\theta,\varphi} u - \beta_0 \Delta_{r,\theta,\varphi}^2 u - \gamma_0 u, \quad u = u(t, r, \theta, \varphi), \quad (t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (1)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \alpha_1 \Delta_{\theta,\varphi} v - \beta_1 \Delta_{\theta,\varphi}^2 v + \partial_R u - \gamma_1 v, \quad v = v(t, R, \theta, \varphi), \quad (t, R, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (2)$$

где операторы $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ и $\Delta_{\theta,\varphi}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\varphi} &= (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (3)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения

$$tr \quad u = v \quad \text{на } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (4)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta, \varphi) = u_0(r, \theta, \varphi), \quad v(0, R, \theta, \varphi) = v_0(R, \theta, \varphi). \quad (5)$$

Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в сферической системе координат содержат специальные функции, здесь символом Δ в (1) обозначен модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами в области Ω , а в (2) тем же символом обозначен модифицированный оператор Лапласа

– Бельтрами на Γ . Символом $\nu = \nu(t, r, \theta, \varphi)$, $(t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma$, обозначена внешняя нормаль к $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Параметры $\alpha_0, \alpha_1, \lambda, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Решение задачи (1)–(5) назовем детерминированным решением системы Вентцеля. Если заменить функции u и v , определяемые Ω и Γ соответственно, на $\eta = \eta(t)$ и $\kappa = \kappa(t)$ стохастическими процессами на интервале $(0, \tau)$, то получим стохастическую систему уравнений Вентцеля, где под производной стохастических процессов понимается производная Нельсона – Гликлиха от стохастического процесса. Решение соответствующей задачи будем называть стохастическим решением системы Вентцеля.

Целью нашей работы является показать разрешимость системы Вентцеля уравнений свободной фильтрации в шаре и на его границе. В первой части доклада рассматривается существование и единственность детерминированной системы уравнений Вентцеля в шаре и на его границе. Во второй части проводятся абстрактные рассуждения, заключающиеся в построении пространства и доказательстве существования и единственности решения для стохастической системы Вентцеля уравнений в шаре и на его границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзекцер Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Доклады Академии наук СССР. 1972. 202, № 5. С. 1031–1033.
2. Favini A., Sviridyuk G. A., Zamyshlyayeva A. A. One class of sobolev type equations of higher order with additive white noise // Communications on Pure and Applied Analysis. 2016. 15, № 1. P. 185–196.
3. Goncharov N. S., Zagrebina S. A., Sviridyuk G. A. Non-uniqueness of solutions to boundary value problems with Wentzell condition // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. 2021. 14, № 4. P. 102–105.
4. Goncharov N. S., Sviridyuk G. A. Analysis of the Wentzell Stochastic System Composed of the Equations of Unpressurised Filtration in the Hemisphere and at Its Boundary // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. 2024. 17, № 1. P. 86–96.
5. Goncharov N. S., Sviridyuk G. A., Zagrebina S. A. The Showalter – Sidorov and Cauchy problems for the linear Dzekcer equation with Wentzell and Robin boundary conditions in a bounded domain // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. 2022. 14, № 1. P. 50–63.
6. Goncharov N. S. Stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina model on the interval with Wentzell boundary conditions // Global and Stochastic Analysis. 2020. 7, № 1. P. 11–23.
7. Lions J. L., Magenes E. Problems aux limites non homogenes et applications. Paris : Dunod, 1968.
8. Wentzell A. D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes // Theory of Probability and its Applications. 1959. 4. P. 164–177.

Гончаров Никита Сергеевич

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

E-mail: Goncharov.NS.krm@yandex.ru

Загребина Софья Александровна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

E-mail: zagrebinasa@susu.ru

Свиридюк Георгий Анатольевич

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

E-mail: sviridyukga@susu.ru



РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА «МОДУЛЬ»

© 2024 г. Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА

Аннотация. В работе предложено решение типа бегущей волны одной смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейностью типа «модуль».

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, частные производные, смешанная задача.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Дифференциальными уравнениями в частных производных и системами дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа описывают множество физических процессов, например, всевозможные волновые процессы, происходящие в жидкости, в электромагнитном поле и тому подобные. В связи с этим интерес к таким уравнениям и системам не ослабевает, библиография, посвященная исследованиям таких уравнений и систем обширна. Появляются новые подходы к получению решений подобных уравнений и систем, а также задач с ними связанных (например, [1–7]).

Данная работа посвящена построению решения типа бегущей волны одной смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейностью типа «модуль».

2. Основные результаты. Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ - функции свободных переменных x и y , дифференцируемые по каждой переменной и по совокупности переменных $\forall(x, y) \in D \subset R$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами a, b, c , такими, что $a \in R \setminus \{0\}$, $b \in R \setminus \{0\}$, $c \in R \setminus \{0\}$, вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + b|v|v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

в которой функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$v(x_0, 0) = \varphi, \quad u(x_0, 0) = \psi, \quad (2)$$

$$v(x_*, y_0) = f, \quad u(x_*, y_0) = g, \quad (3)$$

где $x_0, x_*, y_0, \varphi, \psi, f, g$ – действительные числа. Таким образом получаем смешанную задачу (1)–(3), для которой справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $x_0, x_*, y_0, \varphi, \psi, f, g, a, b, c$ – действительные числа такие, что $x_0 \neq x_*$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, ac > 0$ удовлетворяют условиям

$$a(\varphi - f)^2 \neq c(g - \psi)^2, \quad (4)$$

$$\varphi fb(y_0(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* - x_0)) = a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2.$$

Тогда функции вида

$$v = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK},$$

$$u = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}v + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f},$$

где $v = v(x, y)$, $u = u(x, y)$,

$$K = K(x, y) = (\varphi - f)^2 y + c(\varphi - f)(g - \psi)x + y_0 f(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* f - x_0 \varphi), \quad (5)$$

являются решением задачи (1)- (3).

Теорема 2. Пусть $x_0, x_*, y_0, \varphi, \psi, f, g, a, b, c$ - действительные числа такие, что $x_0 \neq x_*$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, ac > 0$ удовлетворяют условию (4) и справедливо равенство

$$-\varphi fb(y_0(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* - x_0)) = a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2.$$

Тогда функции вида

$$v = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK},$$

$$u = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}v + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f},$$

где $v = v(x, y)$, $u = u(x, y)$, и $K = K(x, y)$ имеет вид (5), являются решением задачи (1)- (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронова Ю. Г. О задаче Коши для одной линейной гиперболической системы уравнений // Известия Уфимского научного центра РАН. 2012. № 6. С. 5–9.
2. Гражданцева Е. Ю. О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2022. 27, № 140. С. 328–338.
3. Корниенко Д. В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. 42, № 1. С. 91–100; Differ. Equ. 2006. 42, № 1. P. 101–111.
4. Сафиулова Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида // Математические заметки ЯГУ. 2008. 15, № 2. С. 48–68.
5. Сидлер И. В., Новицкий Н. Н., Гражданцева Е. Ю. Альтернативные методы решения гиперболической системы уравнений в упрощенной задаче гидравлического удара // Автоматизация и информатизация ТЭК. 2023. № 9(602). С. 53–60.
6. Федотов Е. М. Неконформные схемы МКЭ для гиперболических систем линейных уравнений // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. Казань : Изд-во Казанского ун-та, 2010. 152. С. 245–254.
7. Sartabanov Zh. A., Zhumagazyev A. Kh., Abdikalikova G. A. Multiperiodic solution of linear hiperbolic in the Narrow sense system with constant coefficients // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2020. № 2(98). P. 125-140.

Гражданцева Елена Юрьевна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: grelyur@mail.ru



УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2024 г. М. В. ДОНЦОВА

Аннотация. Определены условия разрешимости системы дифференциальных уравнений с нулевыми правыми частями.

Ключевые слова: задача Коши, система.

AMS Subject Classification: 35F50

В данной работе определяем условия разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (au(t, x) + bv(t, x) + h_1)\partial_x u(t, x) = 0, \\ \partial_t v(t, x) + (cu(t, x) + gv(t, x))\partial_x v(t, x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t, x)$, $v(t, x)$ — неизвестные функции, a , b , c , g — известные положительные константы, h_1 — известная константа, с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x) \quad (2)$$

в области

$$\Omega_T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Получена система интегральных уравнений [2], [1]:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\tau), \quad (3)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (cw_4 + gw_2)d\tau), \quad (4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \int_s^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\tau), \quad (5)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \int_s^t (cw_4 + gw_2)d\tau). \quad (6)$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ — пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t , дважды дифференцируемых функций по переменной x , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T .

Итогом исследования является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ и выполняются условия:

1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $g > 0$, h_1 — константа,

2) $\varphi_1'(x) \geq 0$, $\varphi_2'(x) \geq 0$ на R .

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение

$$u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Донцова М. В.* Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. 19, № 4. С. 23–32.
2. *Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н.* К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. 379, № 1. С. 16–21.

Донцова Марина Владимировна

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru



ЗАДАЧА КОШИ С ПАРАМЕТРОМ, ВОЗМУЩЕННАЯ ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

© 2024 г. Л. Р. Д. ДРЕГЛЯ СИДОРОВ, Н. А. СИДОРОВ

Аннотация. Рассматривается задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом. При любом значении параметра задача имеет тривиальное решение. Получены необходимые и достаточные условия на значения параметра в окрестности которых существуют нетривиальные решения в классе вещественных непрерывных функций. Указан способ построения таких решений.

Ключевые слова: линейный функционал, точка бифуркации, задача Коши, диаграмма Ньютона.

AMS Subject Classification: 47J15

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} = a(t, \lambda)x_\alpha(\lambda) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t, \lambda)x^i(t, \lambda), & t \in [0, T], \lambda \in \mathbb{R} \\ x(t, \lambda)|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ сходится равномерно в окрестности нуля, коэффициенты $a(t, \lambda), a_i(t, \lambda)$ — непрерывные по t и достаточно гладкие по λ . Линейный функционал, называемый в приложениях *нагрузкой*, определяется интегралами Стильесса:

$$x_\alpha(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} x(t, \lambda) d\alpha_i(t), \quad [a_i, b_i] \subset (0, T]. \quad (2)$$

Поэтому нагрузка может иметь локальные и интегральные слагаемые. Отметим, что задача Коши (1) при любом λ имеет тривиальное решение: $x(t, \lambda) = 0, x_\alpha(\lambda) = 0$. В данной работе находятся условия при которых точка λ_0 является точкой бифуркации, то есть в её окрестности существует нетривиальное решение. Для других классов уравнений подобная задача рассматривалась нами ранее в работе [1], путём построения и исследования уравнения относительно линейного функционала и параметра, называемого уравнением разветвления. Аналогичная техника применена здесь.

2. **Построение уравнения разветвления, необходимое условие бифуркации.** Построим решение методом неопределенных коэффициентов при $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1, |x_\alpha| \leq \rho_2$ в виде ряда:

$$x(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, \lambda)x_\alpha(\lambda)^n, \quad (3)$$

коэффициенты которого строятся рекуррентно:

$$\begin{cases} k_1(t, \lambda) = \int_0^t a(\tau, \lambda) d\tau, \\ k_2 = \dots = k_{l-1} = 0, \\ k_l = \int_0^t a_l(\tau, \lambda) k_1^l(\tau, \lambda) d\tau, \\ \dots \end{cases}$$

Мы строим малое решение $x(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, поэтому и $x_\alpha \rightarrow 0$. Ряд (3) сходится равномерно при достаточно малом ρ_2 . Применим к нему линейный функционал x_α . Получим искомое уравнение разветвления:

$$L_1(\lambda)x_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(\lambda)x_\alpha^n = 0 \quad (4)$$

Коэффициенты L_i определены следующим образом:

$$\begin{cases} L_1(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} k_1(t, \lambda) d\alpha_i(t) - 1 \\ L_2 = \dots = L_{l-1} = 0 \\ L_n(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} k_n(t, \lambda) d\alpha_i(t) \quad n \geq l. \end{cases}$$

Точка λ_0 будет точкой бифуркации задачи Коши (1) в том и только в том случае, когда λ_0 — точка бифуркации уравнения разветвления (4). Если $L_1(\lambda_0) \neq 0$ то, по теореме о неявной функции, уравнение разветвления в окрестности λ_0 не имеет малых нетривиальных решений. Формула (3) устанавливает биекцию между малыми решениями исходной задачи Коши и уравнения разветвления. Поэтому справедливы следствия.

Следствие 1 (Необходимое условие бифуркации). *Для того чтобы λ_0 была точкой бифуркации задачи Коши (1), необходимо $L_1(\lambda_0) = 0$.*

Следствие 2 (c -параметрическая бифуркация). *Пусть в уравнении разветвления (4) все $L_i(\lambda_0) = 0$, тогда λ_0 будет точкой бифуркации. Более того, задача Коши (1) при λ_0 имеет c -параметрическое нетривиальное решение $x(t, c)$, зависящее от малого параметра c . При $0 < |\lambda - \lambda_0| < \rho_1$ других малых решений нет.*

3. Достаточные условия. Введем два условия на коэффициенты уравнения разветвления:

- Число λ_0 является корнем кратностей p_i коэффициентов $L_i(\lambda)$, где $i = 1, l, l+1, \dots, n-1$.
- Коэффициент $L_n(\lambda_0) \neq 0$, поэтому кратность $p_n = 0$. На основании формулы Тейлора при $\mu = \lambda - \lambda_0 \rightarrow 0$ справедливы асимптотики:

$$L_i(\lambda_0 + \mu) \sim \frac{1}{p_i!} L_i^{(p_i)}(\lambda_0) \mu^{p_i}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Следуя данным условиям нанесем на координатную плоскость i, p точки $(1, p_1), (2, p_2), \dots, (n-1, p_{n-1}), (n, 0)$ и построим диаграмму Ньютона. Для определенности, пусть $p_1 = 1$. Тогда диаграмма Ньютона состоит из одного отрезка, φ — угол наклона этого отрезка к отрицательному направлению оси абсцисс.

Так как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{n-1}$, то следует искать решение уравнения разветвления в форме:

$$x_\alpha = (c_0 + o(|\mu|)) \mu^{\frac{1}{n-1}}, \quad c_0 \neq 0.$$

Главный член c_0 удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{sgn} \mu \cdot \frac{dL_1}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0} + L_n(\lambda_0) c_0^{n-1} = 0,$$

зависящему от знака $\mu = \lambda - \lambda_0$. Значит,

$$c_0 = \left(-\frac{\operatorname{sgn} \mu \frac{dL_1}{d\mu} |_{\lambda_0}}{L_n(\lambda_0)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Таким образом,

- при чётных n существует ровно одно малое вещественное решение, определенное в окрестности λ_0 ;
- при нечетных n существует ровно два малых вещественных решения определенных в полуокрестности, где

$$\operatorname{sgn}(\mu)L_n(\lambda_0)L_1'(\lambda_0) < 0. \quad (5)$$

Ряд (3) устанавливает биекцию между решением задачи Коши (1) и решением уравнения разветвления (4). Поэтому справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть $L_1(\lambda_0) = 0$, $L_1'(\lambda_0) \neq 0$, $L_n(\lambda_0) \neq 0$, тогда при:

- четном n число λ_0 будет точкой бифуркации задачи Коши (1), причем в окрестности λ_0 существует ровно одно малое вещественное нетривиальное решение;
- нечетном n существует ровно два малых вещественных решения, определенных в полуокрестности точки λ_0 , в которой выполнено неравенство (5).

4. Замечание. Если $p_1 \geq 2$, то диаграмма Ньютона может иметь несколько граней [1], для каждой грани можно сформулировать свои достаточные условия существования точек бифуркации исходной задачи Коши (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. 43. С. 78–90.

Дрегля Сидоров Лев Раян Денисович
 Московский государственный университет (МГУ)
 E-mail: lev-raian.dreglia-sidorov@math.msu.ru

Сидоров Николай Александрович
 Иркутский государственный университет (ИГУ)
 E-mail: sidorovisu@gmail.com



АЛГОРИТМ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО СМЕШАННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПАКЕТЕ PYTHON

© 2024 г. Н. С. ЖАМЦАЕВ

Аннотация. В докладе рассматривается математическая модель для смешанного уравнения теплопроводности. Для нее разработаны алгоритм и программа численного решения в пакете программирования Python, с использованием неявных конечно-разностных схем и краевых условий первого рода.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, метод конечных разностей, уравнения смешанного типа, краевые условия первого рода.

AMS Subject Classification: 65M06, 80-10

В работах [3, 4] приводятся математические модели для численного решения гиперболо-параболических уравнений теплопроводности с созданием программ в пакете программирования Mathcad-15, широко применяемом в инженерной среде. В данном докладе исследуется аналогичная линейная постановка этих начально-краевых задач, но с созданием существенно нового алгоритма и метода численного решения по неявной разностной схеме в языке программирования Python с использованием графического пакета Matplotlib.

Сформулируем математическую модель для одномерного гиперболо-параболического уравнения в частных производных:

$$b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

где $b(x, t)$ — коэффициент тепловой релаксации, $a(x, t)$ — произведение коэффициента удельной плотности на коэффициент удельной теплоемкости, $\lambda(t)$ — коэффициент теплопроводности, $c(x, t)$ — коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности, $f(x, t)$ — внутренний источник тепла.

Граничные условия первого рода задают температуру левого и правого концов стержня:

$$u(0, t) = g_0(t), u(X, t) = g_1(t), 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Зададим также начальное условие:

$$u(x, 0) = u^0(x), 0 \leq x \leq X. \quad (3)$$

При $0 < t \leq T/2$, $b(x, t) = 0$ и уравнение (1) принимает вид параболического уравнения:

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t)u + f(x, t). \quad (4)$$

При $T/2 < t \leq T$, $b(x, t) > 0$ и уравнение (1) имеет вид гиперболического уравнения.

В докладе приводится алгоритм и численное решение поставленной начально-краевой задачи (1,2,3), где проведена дискретизация по переменным x и t и введена дискретная функция U_i^j . Составим для уравнения (4) конечно-разностное уравнение для этой функции. В этом случае, неявная разностная схема будет выглядеть следующим образом:

$$a(x_i, t_{j+1}) \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = \lambda(t_{j+1}) \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} + c(x_i, t_{j+1})U_i^{j+1} + f(x_i, t_{j+1}). \quad (5)$$

Аналогично, как для параболического этапа (4,5), составляются уравнения для гиперболического этапа и проводятся расчеты этих неявных разностных схем по методу прогонки [1, 2].

Полученные графики полей температуры хорошо согласуются с визуализацией работ [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. Учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. М. : Высш. школа, 1990. 207 с.
2. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 400 с.
3. Ханхасаев В. Н., Муляев С. И.. Численное решение третьей краевой задачи для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 14–21.
4. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2024. № 1. С. 37–45.

Жамцаев Никита Сергеевич

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова (БГУ)

E-mail: nikita91797@gmail.com



ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССА ЗАДАЧ С ОТНОСИТЕЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМ ПУЧКОМ ОПЕРАТОРОВ СО СЛУЧАЙНЫМ НАЧАЛЬНЫМ СОСТОЯНИЕМ

© 2024 г. А. А. ЗАМЫШЛЯЕВА, О. Н. ЦЫПЛЕНКОВА

Аннотация. В данной работе были построены пространства «шумов» для исследования оптимального управления решениями задачи Шоултера – Сидорова для уравнения соболевского типа высокого порядка. Доказано существование и единственность сильного решения задачи Шоултера – Сидорова для этого уравнения. Получены достаточные условия существования и единственности оптимального управления такими решениями. Для дифференцирования аддитивного «шума» была использована производная от случайного процесса в смысле Нельсона – Гликлиха.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, оптимальное управление, аддитивный «шум».

AMS Subject Classification: 49K20

В последнее время исследования уравнений соболевского типа значительно расширились [1]. Уравнение соболевского типа

$$Av^{(n)} = B_{n-1}v^{n-1} + \dots + B_0v + f, \quad (1)$$

в предположении $\ker A \neq \{0\}$, изучалось в различных аспектах для $n \geq 1$, например в [2]. Здесь операторы A, B_{n-1}, \dots, B_0 линейные и непрерывные, действующие из банахова пространства \mathfrak{V} в \mathfrak{G} , функция $f = f(t)$ моделирует внешнюю силу.

Недостаток уравнений с детерминированным свободным членом состоит в том, что в натуральных экспериментах система подвержена случайному возмущению, например в форме белого шума. В настоящее время активно изучаются стохастические дифференциальные уравнения с различными аддитивными случайными процессами и случайным начальным состоянием.

Первые результаты, касающиеся стохастических уравнений соболевского типа высокого порядка, можно найти в [3]. Рассмотрим полное стохастическое уравнение соболевского типа высокого порядка:

$$A \overset{\circ}{\eta}^{(n)} = B_{n-1}\eta^{n-1} + \dots + B_0\eta + w, \quad (2)$$

где w — стохастический процесс. Требуется найти случайный процесс $\eta(t)$, удовлетворяющий (в некотором смысле) уравнению (2) и начальным условиям

$$\overset{\circ}{\eta}^{(m)}(0) = \xi_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

где ξ_m — случайные величины.

Сначала под w понимался белый шум, который является обобщенной производной винеровского процесса. Позднее появился новый активно развивающийся подход к исследованию уравнения (2), где «белый шум» означает производную Нельсона – Гликлиха винеровского процесса.

Особый интерес представляет задача оптимального управления. Рассмотрим стохастическое уравнение соболевского типа

$$A \overset{\circ}{\eta}^{(n)} = B_{n-1}\eta + \dots + B_0\eta + w + Cu, \quad (4)$$

где $\eta = \eta(t)$ — стохастический процесс, $\overset{o}{\eta}$ — производная Нельсона – Гликлиха процесса η , а $w = w(t)$ — случайный процесс, который отвечает за внешнее воздействие; u — неизвестная функция управления из гильбертова пространства \mathfrak{U} , оператор C линейный и непрерывный, действующий из \mathfrak{U} в \mathfrak{G} .

Рассмотрим (4) с начальными условиями Шоултера – Сидорова

$$P \left(\overset{o}{\eta}^{(m)}(0) - \xi_m \right) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (5)$$

Исследуем задачу оптимального управления: необходимо найти пару $(\hat{\eta}, \hat{u})$, где $\hat{\eta}$ — решение задачи (4), (5), и управление \hat{u} из $\mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ удовлетворяет соотношению

$$J(\hat{\eta}, \hat{u}) = \min_{(\eta, u)} J(\eta, u).$$

Здесь $J(\eta, u)$ — специальным образом построенный функционал \mathfrak{U}_{ad} — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве \mathfrak{U} управлений.

В данной работе доказано существование и единственность сильного решения задачи Шоултера – Сидорова для уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно ограниченным пучком операторов в пространствах стохастических процессов, а также теорема об однозначной разрешимости задачи оптимального управления для такого уравнения. Теоретические результаты, полученные в этой статье, были применены к исследованию задачи управления в модели Буссинеска – Лява. Кроме того, в дальнейшем возможно применение полученных теоретических результатов к исследованию задачи управления в модели гидродинамики со случайными начальными состояниями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Favini A., Zamyshlyayeva A. A., Manakova N. A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise" // Communications on Pure and Applied Analysis. 2016. 1, № 15. P. 185–196.
2. Zamyshlyayeva A. A., Manakova N. A., Tsyplenkova O. N. Optimal control in linear Sobolev type mathematical Models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020. 13, № 1. P. 5–27.
3. Zamyshlyayeva A. A. The Higher-Order Sobolev-Type Models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2014. 7, № 2. P. 5–28.

Замышляева Алена Александровна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))

E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru

Цыпенкова Ольга Николаевна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))

E-mail: tcyplenkovaon@susu.ru



ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА»

© 2024 г. А. Л. КАЗАКОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. Рассматривается проблема нахождения вырождающихся точных и приближенных решений квазилинейной параболической системы второго порядка, известной в литературе как система «хищник – жертва». Предложенный численный алгоритм включает метод коллокаций через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций и разностную аппроксимацию по времени. Точные решения строятся в виде многочлена по степеням пространственной переменной с коэффициентами, зависящими от времени. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, вырождение, точное решение, метод коллокаций, вычислительный эксперимент.

AMS Subject Classification: 35K55, 35K65

1. **Введение.** Рассмотрим систему двух квазилинейных уравнений параболического [5] типа

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + u_x v_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x) + g(u, v). \quad (1)$$

Здесь u, v — искомые функции; t (время) и x (координата) — независимые переменные; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — константы, $\alpha_1 \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Известные функции $f(u, v), g(u, v)$ являются достаточно гладкими. Система (1) предложена в классической монографии [7] в качестве математической модели взаимодействия двух популяций, в которой u — численность популяции «жертв», v — «хищников». Работы других авторов, в которых рассматриваются такие же постановки в точности, нам не известны, однако нелинейные параболические уравнения и системы используются для математического описания различных процессов в физике [2], биологии [8], гидрологии [1] и т.д.

2. **Постановка задачи.** Главным (хотя и не единственным) интересующим нас объектом являются нетривиальные решения системы (1) с нулевыми фронтами, т. е. удовлетворяющие условиям

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0, \quad (2)$$

где функции $a(t), b(t)$ предполагаются достаточно гладкими. Можно видеть, что на каждом нулевом фронте обращается в нуль множитель перед (хотя бы) одной из старших производных, т. е. параболический тип системы вырождается. Отметим, что ранее для случая $a(t) = b(t)$ была доказана теорема существования и единственности [4] нетривиального решения задачи (1), (2).

Примем, что $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Это обуславливает наличие у системы (1) решения $u \equiv 0, v \equiv 0$, и позволяет рассматривать решение с нулевым фронтом как часть *диффузионной волны* [6].

3. **Построение численного решения.** Найти аналитическое решение задачи (1), (2) на заданном промежутке времени в общем случае вряд ли возможно вследствие вырождения. Поэтому мы традиционно построим пошаговый численный алгоритм, сосредоточившись, в отличие от наших предыдущих работ, на рассмотрении случая, когда в каждый момент времени $t > 0$ графики функций u и v в некоторой точке между нулевыми фронтами $a(t)$ и $b(t)$ пересекаются и имеют разные направления монотонности (см. графики в примерах ниже). Тогда решение естественным образом интерпретируется как динамика численности двух конкурирующих популяций. Примем для определенности, что $a(0) = b(0), a(t) < b(t)$ при $t > 0$, и решение будем искать в области взаимодействия двух популяций, $x \in [a(t), b(t)]$.

Представим (1) в следующем виде:

$$u_{xx} = \frac{\alpha_2 v_x - \beta_2 u_x v_x - v_t + g(u, v)}{\beta_2 v}, \quad v_{xx} = \frac{-\alpha_1 u_x - \beta_1 u_x v_x + u_t - f(u, v)}{\beta_1 u}. \quad (3)$$

Из условий (2) с учетом уравнений (1) следует, что

$$u_x|_{x=b(t)} = \bar{U}(t) = \frac{\alpha_2 - b'(t) - g(u(b(t), 0))}{\beta_2}, \quad v_x|_{x=a(t)} = \bar{V}(t) = -\frac{\alpha_1 + a'(t) + f(0, v(a(t)))}{\beta_1}. \quad (4)$$

На каждом шаге $t_k = kh$, где h — размер шага, решение задачи (3), (2), (4) будем искать на отрезке $x \in [l_k, L_k]$, $l_k = a(t_k)$, $L_k = b(t_k)$, в виде

$$u(t_k, x) = u_p(x) + u_h(x), \quad v(t_k, x) = v_p(x) + v_h(x), \quad (5)$$

где $u_p(x)$, $v_p(x)$ — частное решение системы (3), $u_h(x)$, $v_h(x)$ — решение подходящей задачи для однородной системы,

$$\begin{aligned} u_h'' &= 0, & u_h(l_k) &= -u_p(l_k), & u_h'(L_k) &= \bar{U}(t_k) - u_p'(L_k); \\ v_h'' &= 0, & v_h(L_k) &= -v_p(L_k), & v_h'(l_k) &= \bar{V}(t_k) - v_p'(l_k). \end{aligned} \quad (6)$$

При известном частном решении задача (6) имеет решение вида

$$u_h = u_h'(x - l_k) - u_p(l_k), \quad v_h = v_h'(L_k)(x - L_k) - v_p(L_k). \quad (7)$$

Здесь значения u_h' , v_h' — решение системы уравнений, получаемой из условий (4) после нижеследующих подстановок с учетом (7):

$$u = u_p + u_h, \quad v = v_p + v_h, \quad u_x = u_p' + u_h', \quad v_x = v_p' + v_h'.$$

Итерационная процедура на шаге t_k выглядит следующим образом. Задаем тривиальное частное решение на начальной итерации:

$$u_p(0) \equiv 0, \quad v_p(0) \equiv 0. \quad (8)$$

На n -й итерации, при известном частном решении, находим решение задачи (6),

$$u_h(n) = u_h'(n)(x - l_k) - u_p(n)(l_k), \quad v_h(n) = v_h'(n)(x - L_k) - v_p(n)(L_k), \quad (9)$$

и соответствующее решение задачи (3), (2), (4):

$$u^{(n)} = u_p(n) + u_h(n), \quad v^{(n)} = v_p(n) + v_h(n). \quad (10)$$

Далее находим следующую итерацию частного решения — как решение системы

$$\begin{aligned} u_{p(n+1)}'' &= \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}}, \\ v_{p(n+1)}'' &= \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $u^{(n)}$, $u_p(n)$, $u_h(n)$, $v^{(n)}$, $v_p(n)$, $v_h(n)$ — (n) -е итерации решений. Система (11) может быть решена методом коллокаций через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций. Производные по времени при этом вычисляются методом конечных разностей.

Итерационный процесс (8)–(11) останавливается, если $(n + 1)$ -я итерация достаточно близка к n -й. В результате мы получим решение задачи (1), (2) в момент времени $t = t_k$, непрерывное по x на отрезке $x \in [l_k, L_k]$:

$$u(t_k, x) = u_{p(n+1)}(x) + u_{h(n+1)}(x), \quad v(t_k, x) = v_{p(n+1)}(x) + v_{h(n+1)}(x). \quad (12)$$

4. Пример численного решения. Рассмотрим частный случай (1), когда

$$f(u, v) = \sigma_1 u - \delta_1 uv, \quad g(u, v) = -\sigma_2 v + \delta_2 uv, \quad (13)$$

что приводит, если нет зависимости от x , к известной модели Вольтерра-Лотки. На рис. 1 показаны графики найденного с помощью предложенного алгоритма решения в различные моменты времени при $a(t) = t$, $b(t) = 1.5t$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$; $\beta_1 = \beta_2 = 1$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$; $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

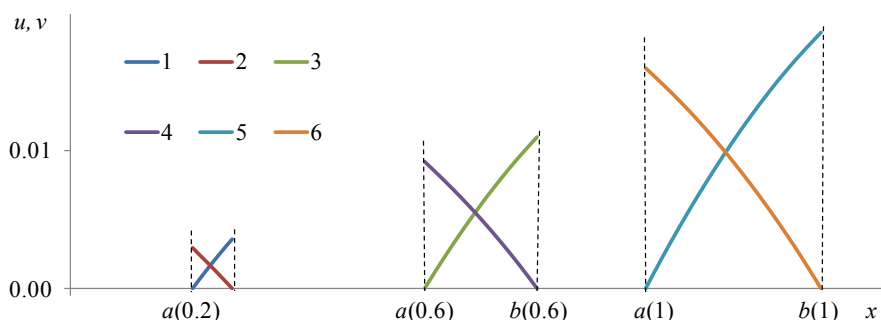


Рис. 1. Численное решение системы (1), $a(t) < x < b(t)$: 1, 2 – $t = 0.2$, 3, 4 – $t = 0.6$, 5, 6 – $t = 1$; 1, 3, 5 – функция u , 2, 4, 6 – функция v .

5. Построение точного решения. Пусть $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются линейными функциями:

$$f(u, v) = \gamma_1 u + \eta_1 v, \quad g(u, v) = \gamma_2 u + \eta_2 v. \quad (14)$$

Будем искать точные решения [3] системы (1), (14) в виде

$$u = A_0(t)x^2 + A_1(t)x + A_2(t), \quad v = B_0(t)x^2 + B_1(t)x + B_2(t). \quad (15)$$

Подставив представление (15) в (1) и приравняв с учетом (14) коэффициенты при одинаковых степенях x , получим три следующие системы:

$$\gamma_1 A_0 + 6\beta_1 A_0 B_0 + \eta_1 B_0 = 0, \quad \gamma_2 A_0 - 6\beta_2 A_0 B_0 + \eta_2 B_0 = 0; \quad (16)$$

$$A_1'(t) = (\gamma_1 + 4\beta_1 B_0)A_1 + (\eta_1 + 2\beta_1 A_0)B_1 + 2\alpha_1 A_0, \quad B_1'(t) = (\gamma_2 - 2\beta_2 B_0)A_1 + (\eta_2 - 4\beta_1 A_0)B_1 + 2\alpha_2 B_0; \quad (17)$$

$$A_2'(t) = (\gamma_1 + 2\beta_1 B_0)A_2 + \eta_1 B_2 + A_1(\alpha_1 + \beta_1 B_1), \quad B_2'(t) = \gamma_2 A_2 + (\eta_2 - 2\beta_2 A_0)B_2 + B_1(\alpha_2 - \beta_2 A_1). \quad (18)$$

Системы (16)–(18) могут быть решены последовательно по следующей процедуре. Можно видеть, что (16) – система квадратных уравнений, которая всегда имеет хотя бы одно (тривиальное) решение, т.е. A_0 , B_0 – константы, которые, вообще говоря, определяются неоднозначно. Если A_0 , B_0 известны, то (17) – система линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (СЛНОДУ) первого порядка относительно $A_1(t)$, $B_1(t)$, найдя которые, мы, в свою очередь, получим (18) – СЛНОДУ первого порядка относительно $A_2(t)$, $B_2(t)$. Решение всех систем можно выполнить по стандартным процедурам.

Из проведенных рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ удовлетворяют (14). Тогда система (1) имеет точное решение вида (15), где A_0 , B_0 удовлетворяют системе алгебраических уравнений (16), а A_1 , B_1 , A_2 , B_2 – системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений (17)–(18).

6. Пример точного решения. Общее решение систем (16)–(18) громоздко и не слишком удобно для рассмотрения. Поэтому в качестве примера разберем один конкретный случай. Положим для определенности, что $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \beta \neq 0$, $\gamma_1 = 4$, $\eta_1 = 2$, $\gamma_2 = -2\beta$, $\eta_2 = -4\beta$. Тогда система (1) имеет следующее точное решение, удовлетворяющее условиям $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} u &= -x^2 + (c_1 - 2t)x - t^2 + c_1 t + \frac{c_1 c_2}{2(1-\beta)} [\exp(2(1-\beta)t) - 1], \\ v &= -x^2 + (c_2 - 2t)x - t^2 + c_2 t - \frac{c_1 c_2 \beta}{2(1-\beta)} [\exp(2(1-\beta)t) - 1], \end{aligned} \quad (19)$$

где c_1 , c_2 – произвольные константы. В этом случае уравнения

$$\begin{aligned} x_1^\pm(t) &= \frac{c_1 - 2t}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1 - 2t)^2}{4} - t^2 + c_1 t + \frac{c_1 c_2}{2(1-\beta)} [\exp(2(1-\beta)t) - 1]}, \\ x_2^\pm(t) &= \frac{c_2 - 2t}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_2 - 2t)^2}{4} - t^2 + c_2 t - \frac{c_1 c_2 \beta}{2(1-\beta)} [\exp(2(1-\beta)t) - 1]} \end{aligned}$$

определяют нулевые фронты для функций u и v соответственно.

Если принять $c_2 < -1$, $c_1\beta > 1$, то тогда $x_1^-(0) = 0$, $(x_1^-)'(0) > 0$; $x_2^+(0) = 0$, $(x_2^+)'(0) > 0$. На рис. 2 показано точное решение при $c_1 = 5$, $c_2 = -1.1$, $\beta = 1.1$. Результаты хорошо интерпретируются как динамика численности популяций «жертв» и «хищников» в общей области обитания.

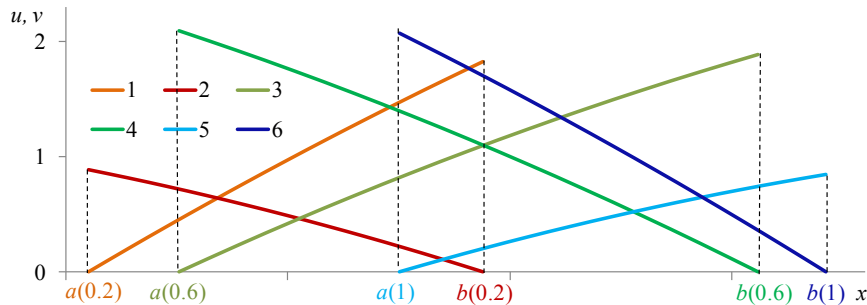


Рис. 2. Точное решение системы (1), (14), $a(t) < x < b(t)$: 1, 2 - $t = 0.2$, 3, 4 - $t = 0.6$, 5, 6 - $t = 1$; 1, 3, 5 - функция u , 2, 4, 6 - функция v .

7. Заключение. Настоящая работа продолжает исследования коллектива авторов [4] по изучению системы типа «хищник – жертва», предложенной Д. Мюрреем [7]. Предложен оригинальный вычислительный алгоритм, основанный на методе коллокаций с использованием разложения правых частей по системе радиальных базисных функций. Построены новые точные решения, имеющие более сложную структуру, по сравнению с ранее известными. Основным достижением, на наш взгляд, является то, что удалось частично решить проблему, с которой мы столкнулись ранее (см. [4, с. 1496]), и получить осмысленные с прикладной точки зрения решения: с двумя нулевыми фронтами, между которыми обе искомые функции положительны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. Н., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М. : Наука, 1984. 211 с.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. : Физматлит, 1966. 688 с.
3. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. 22, № 1. С. 112–123.
4. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Аналитические решения с нулевым фронтом для нелинейной вырождающейся параболической системы // Дифференциальные уравнения. 2022. 58, № 11. С. 1461–1470.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967. 736 с.
6. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. 12, № 6. P. 999.
7. Murray J. D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. Interdisciplinary Appl. Math. Vol. 18. NY : Springer, 2003. 837 p.
8. Perthame B. Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. NY : Springer, 2015. 204 p.

Казаков Александр Леонидович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН), Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН (ИМАШ УрО РАН)

E-mail: kazakov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН (ИМАШ УрО РАН)

E-mail: lfs@imach.uran.ru



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

© 2024 г. А. И. КОЖАНОВ

Аннотация. В докладе проводится исследование разрешимости различных постановок обратных задач математической физики.

Ключевые слова: обратные задачи математической физики, разрешимость обратных задач.

AMS Subject Classification: 35L15, 35R30

Математическое моделирование многих процессов механики, физики, биологии, других дисциплин приводит к необходимости исследования тех или иных дифференциальных уравнений. В этих уравнениях коэффициенты, как правило, есть величины, характеризующие свойства среды, в которой протекает процесс, или же свойства самого объекта математического моделирования. Зачастую эти коэффициенты (т. е. свойства среды или процесса) заранее не известны. Нужные коэффициенты часто определяются опытным путем, что не всегда возможно, или же задаются по аналогии. Есть другой путь — путь определения нужных коэффициентов по некоторым дополнительным измерениям с дальнейшим использованием математических методов. Именно об этом пути и будет идти речь в настоящем докладе.

Задачи, к которым приводят задачи определения неизвестных коэффициентов, называют *обратными задачами математической физики*. Подобные задачи активно изучаются во всем мире, но поскольку реальных процессов бесконечно много, и поскольку эти процессы зачастую индивидуальны, то теория обратных коэффициентных задач представляется безграничной теорией.

В случае (физически важном) однородности среды неизвестные коэффициенты можно считать параметрами, то есть величинами постоянными. Именно о таких задачах и идет речь в настоящем докладе.

Задачи определения вместе с решением того или иного дифференциального уравнения также некоторого коэффициента, являющегося не функцией временной или пространственных переменных, а числом, представляют собой подкласс общего класса обратных коэффициентных задач. В настоящем докладе будут представлены результаты о разрешимости подобных задач для различных типов дифференциальных уравнений, а именно:

- для гиперболических уравнений;
- параболических уравнений;
- эллиптических уравнений;
- дифференциальных уравнений с кратными характеристиками.

В дальнейшем подобные исследования будут продолжены.

Кожанов Александр Иванович

Институт математики имени С. Л. Соболева, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru



О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УРАВНЕНИИ ЛИНЯ – РЕЙСНЕРА – ЦЗЯНЯ

© 2024 г. А. И. КОЖАНОВ, Л. А. ТЕЛЕШЕВА

Аннотация. Доклад посвящен исследованию разрешимости новых нелинейных обратных задач нахождения вместе с решением линеаризованного уравнения Линя – Рейснера – Цзяня также неизвестной константы. Для изучаемых задач доказываются теоремы разрешимости в классах регулярных решений — решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Особенностью изучаемых задач является во-первых, неизвестный коэффициент есть величина постоянная (что соответствует, например, однородной среде). Во вторых, новое условие переопределения, ранее не используемое у предшественников, а именно интегральное условие по временной переменной.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, обратные задачи, неизвестные параметры, интегральное условие переопределения, регулярные решения, существование.

AMS Subject Classification: 35L15, 35R30

Доклад посвящен изложению результатов исследования разрешимости некоторых новых обратных задач определения вместе с решением также неизвестного постоянного коэффициента — именно, задач определения младшего коэффициента в линейном аналоге уравнения Линя – Рейснера – Цзяня [1] – [3]. Ранее подобные задачи не изучались.

Пусть Q есть прямоугольник $(0, l) \times (0, T)$. Далее, пусть $f(x, t)$, $N(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in (0, l)$, $t \in [0, T]$, A есть заданное число.

1. Обратная задача I. Найти функцию $u(x, t)$ и число a такие, что в прямоугольнике Q выполняется уравнение

$$u_{xt} + u_{xx} + au = f(x, t) \quad (1)$$

и при этом для функции $u(x, t)$ выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T) \quad (3)$$

$$\int_0^T N(t)u(l, t)dt = A. \quad (4)$$

Уравнение (1) представляет собой модель линеаризованного уравнения Линя – Рейснера – Цзяня [1] – [3], моделирующего нестационарные малые возмущения в трансзвуковом пространственном потоке газа. Функция $u(x, t)$ — потенциал поля скоростей, функция $f(x, t)$ описывает внешние массовые силы. Условия (2) и (3) есть условия корректной краевой задачи для подобных уравнений. Уточним, что (4) есть условие интегрально-линейного переопределения; это условие является новым для данного класса задач.

Для краткости изложения формулировок введем некоторые обозначения. Пусть L есть дифференциальный оператор, определенный следующим равенством

$$Lw = w_{xt} + w_{xx}.$$

Положим

$$b = \int_0^T N(t)f(l, t)dt, \quad \tilde{f}(x, t) = Lf(x, t), \quad N_0 = \int_0^T N^2(t)dt.$$

Всюду ниже будем считать, что число b положительно. Для фиксированного числа m из интервала $(l, +\infty)$ положим

$$C_1(m) = 4 \int_Q (m-x)^2 \tilde{f}^2(x, t) dx dt,$$

$$K_0(m) = \sqrt{lN_0C_1(m)}.$$

Пусть V есть линейное пространство

$$V = \{v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))\}$$

(здесь Ω есть интервал $(0, l)$).

Теорема 1. Пусть выполняются включения

$$f(x, t) \in W_2^2(Q), \tilde{f}_t(x, t) \in L_2(Q), N(t) \in L_2([0, T]).$$

Кроме того, пусть выполняются условия

$$A > 0, \quad K_0(l) < b,$$

$$f_x(0, t) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T],$$

$$f(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}.$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x, t), a\}$ такое, что $u(x, t) \in V$, $a > 0$.

2. Обратная задача II. Найти функцию $u(x, t)$ и число a такие, что в прямоугольнике Q выполняется уравнение

$$u_{xt} + u_{xx} + au = f(x, t) \tag{5}$$

и при этом для функции $u(x, t)$ выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \tag{6}$$

$$u(l, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{7}$$

а также условие

$$\int_0^T N(t)u(0, t)dt = A. \tag{8}$$

Обозначим

$$b_0 = \int_0^T N(t)f(0, t)dt, \quad \tilde{f}(x, t) = Lf(x, t),$$

L дифференциальный оператор, определенный выше.

$$N_0 = \left(\int_0^T N^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f_1(x, t) = \tilde{f}_t(x, t)(T-t) - \tilde{f}(x, t),$$

$$R_0 = N_0 l^2 \left(\int_Q f_1^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются включения

$$f(x, t) \in W_2^2(Q), N(t) \in C^1([0, T]).$$

Кроме того, пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} f_x(0, t) = f(l, t) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \\ f(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

и неравенство $-b_0 > R_0$.

Тогда обратная задача II имеет решение $\{u(x, t), a\}$ такое, что $u(x, t) \in V$, $a < 0$.

В докладе рассматривается случай модельных уравнений (1) и (5). Очевидно, что в целом аналогичные результаты можно получить и для более общих уравнений (например, для уравнений с переменными коэффициентами, с дополнительными младшими членами). Соответствующие условия и выкладки станут существенно более громоздкими, суть же результатов не изменится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазатов С. Н. О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя – Рейснера – Цзяня трансзвуковой динамики // Математические заметки. 2010. 87, № 1. С. 137–140.
2. Мамонтов Е. В. Об уравнениях малых возмущений в нестационарном околосзвуковом потоке газа // в кн.: Нестационарные проблемы механики : сб. науч. тр.. Новосибирск : Сиб.отд-ние Ан СССР, Ин-т гидродинамики, 1978. С. 139–143.
3. Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // Journal of Mathematical Physics. 1948. 27, № 3. P. 220–231.

Кожанов Александр Иванович

Институт математики имени С. Л. Соболева

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Телешева Любовь Александровна

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

E-mail: love_20_09@mail.ru



О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ТИПА ВОЛН ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА»

© 2024 г. П. А. КУЗНЕЦОВ

Аннотация. Рассматривается квазилинейная вырождающаяся параболическая система типа «хищник – жертва». В соответствии с биологическим смыслом системы исследуются решения типа волн погони и бегства. Такие решения имеют нулевые фронты (суть границы ареалов обитания жертв и хищников) — достаточно гладкие кривые, на которых искомые функции обращаются в нуль. В данной работе для некоторых частных случаев с помощью метода анзацев построены новые точные решения типа волн погони и бегства, а также определены нулевые фронты.

Ключевые слова: система «хищник – жертва», волны погони и бегства, нулевой фронт, точное решение, метод анзацев.

AMS Subject Classification: 35K40

1. Постановка задачи. Рассматривается квазилинейная параболическая система типа «хищник – жертва» [2]

$$\begin{aligned}u_t - c_1 u_x &= h_1 (uv_{xx} + u_x v_x) + f(u, v), \\v_t - c_2 v_x &= -h_2 (vu_{xx} + v_x u_x) + g(v, u).\end{aligned}\tag{1}$$

Неизвестные функции $u(t, x)$ и $v(t, x)$ описывают плотности популяции жертв и популяции хищников соответственно. Постоянные $c_{1,2}, h_{1,2} > 0$ регулируют скорости пространственного перемещения популяций до и после контакта. Функции f и g известны, обладают достаточной гладкостью, а также удовлетворяют условию $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

В рамках модели «хищник – жертва» [2] наиболее интересно рассматривать решения с нулевыми фронтами. Такие решения предполагают краевые условия

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0, \quad v(t, x)|_{x=b(t)} = 0.$$

В таком случае достаточно гладкие кривые $x = a(t)$, $x = b(t)$ очерчивают ареалы обитания жертв u и хищников v соответственно. Кроме того, так как на этих кривых обращаются в нуль множители при старших производных, то параболический тип системы (1) вырождается.

Подобного рода вырождение можно наблюдать при исследовании уравнений типа нелинейного уравнения теплопроводности [3] (фильтрации [4]), а также систем «реакция – диффузия» [5]. Содержательный класс решений при этом составляют тепловые (диффузионные, фильтрационные) волны, распространяющиеся с конечной скоростью по нулевому фону (тривиальное решение). Такая волна подразумевает наличие нулевого фронта и неотрицательной возмущенной части. Таким образом, в нашем случае мы имеем волны миграции двух взаимодействующих популяций или, пользуясь терминологией [2], волны погони и бегства.

2. Основные результаты. Наибольшую сложность представляют случаи, когда $a(t) \neq b(t)$. Для их исследования могут быть использованы различные методы построения точных решений. Один из таких – метод анзацев.

Представим решения в виде анзацев

$$u = \alpha_1(t)x^2 + \beta_1(t)x + \gamma_1(t), \quad v = \alpha_2(t)x^2 + \beta_2(t)x + \gamma_2(t).\tag{2}$$

Новые неизвестные функции $\alpha_{1,2}(t)$, $\beta_{1,2}(t)$, $\gamma_{1,2}(t)$ также предполагаются достаточно гладкими.

Замена (2) позволяет свести систему (1) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые могут быть проинтегрированы в квадратурах, например, при следующих входных данных:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 = 1, \quad f(u, v) = 6u, \quad g(v, u) = -6v; \\ h_1 = h_2 = 1, \quad f(u, v) = -g(v, u) = 3(u + v) \\ h_1 = -h_2 = 1, \quad f(u, v) = 6v, \quad g(v, u) = 6u. \end{aligned}$$

Интегрируя полученные системы ОДУ, мы находим функции $\alpha_{1,2}(t)$, $\beta_{1,2}(t)$, $\gamma_{1,2}(t)$, а также нулевые фронты каждой функции по формулам

$$x_i = \frac{-\beta_i \pm \sqrt{\beta_i^2 - 4\alpha_i\gamma_i}}{2\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Из равенств (3) следует, что каждая из функций u и v имеет два фронта. Таким образом, обобщаются результаты, полученные в статье [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов П. А. Аналитические диффузионные волны в нелинейной параболической модели «хищник – жертва» // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. 28, № 2. С. 158–167.
2. Мюррей Дж. Математическая биология. Т. 2. Пространственные модели и их приложения в биомедицине. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» : Ижев. ин-т компьютер. Исслед., 2011. 1104 с.
3. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987. 480 с.
4. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
5. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. 12, № 6. P. 999.

Кузнецов Павел Александрович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: kuznetsov@icc.ru



ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

© 2024 г. Р. Ю. ЛЕОНТЬЕВ, М. В. ФАЛАЛЕЕВ

Аннотация. В работе с помощью принципа неподвижной точки Шаудера получены теоремы существования решений для некоторых модельных задач теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейных интегральных уравнений с параметром. Исследуются вопросы единственности, проведены численные расчёты.

Ключевые слова: нелинейный оператор, операторное уравнение, вполне непрерывные операторы, принцип Шаудера, уравнение Блазиуса.

AMS Subject Classification: 47J99

1. Введение. При исследовании некоторых начально-краевых задач математической физики или интегральных уравнений, в том числе прикладного характера, естественными являются вопросы существования решения, его качественные свойства, единственность и пр. Одним из способов дать ответ на эти вопросы являются теоремы о неподвижных точках сжимающих или вполне непрерывных операторов [1, 5, 7]. В случае сжимаемости существуют отработанные алгоритмы получения ответов на обозначенные выше вопросы, а во втором можно говорить о существовании (но не единственности) решения и о некоторых качественных свойствах. В данной работе на примерах показано проявление этих эффектов.

2. О вполне непрерывных операторах. Известно следующее утверждение о неподвижных точках нелинейных вполне непрерывных операторов [5]

Теорема 1 (принцип неподвижной точки Шаудера). *Если вполне непрерывный оператор A отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество D банахова пространства X в себя, то A имеет в D неподвижную точку.*

Замечание 1 (принцип сжимающих отображений). Если оператор A будет сжимающим на D , то неподвижная точка единственна.

Таким образом, при выполнении условий теоремы Шаудера уравнение $x = Ax$ разрешимо в $D \subset X$, а при дополнительном условии сжимаемости однозначно разрешимо в $D \subset X$.

Уравнения более сложного вида $Bx = Ax$, где $B : X \rightarrow X$ — обратим, при соответствующих условиях на B и A можно редуцировать к форме $x = B^{-1}Ax$. Произведение операторов $B^{-1}A$ будет являться вполне непрерывным в следующих случаях

- B^{-1} — непрерывно обратим, A — вполне непрерывен;
- B^{-1} — вполне непрерывен, A — непрерывен и ограничен.

3. Начально-краевая задача для неоднородного уравнения Блазиуса [6]. Рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения 3-го порядка, встречающуюся в гидромеханике (модельная задача теории пограничного слоя)

$$x''' + xx'' = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b, \quad x(1) = c, \quad (2)$$

где a, b, c — заданные числа, $f(t) \in C_{[0,1]}$.

Следуя известной методике (см. например, [5]) задачу (1), (2) можно редуцировать к виду

$$\begin{aligned} x(t) = F(x(t)) = & a + bt + K(x(t)) \cdot (c - a - b) - \\ & - K(x(t)) \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{s'} \left(\int_0^\sigma \exp \left(- \int_\tau^\sigma x(s) ds \right) f(\tau) d\tau \right) d\sigma \right) ds' + \\ & + \int_0^t \left(\int_0^{s'} \left(\int_0^\sigma \exp \left(- \int_\tau^\sigma x(s) ds \right) f(\tau) d\tau \right) d\sigma \right) ds', \end{aligned}$$

где

$$K(x(t)) = \frac{\int_0^t \left(\int_0^\sigma \exp \left(- \int_0^\tau x(s) ds \right) d\tau \right) d\sigma}{\int_0^1 \left(\int_0^\sigma \exp \left(- \int_0^\tau x(s) ds \right) d\tau \right) d\sigma}.$$

Справедливо неравенство $0 \leq K(x(t)) \leq 1$, поэтому $\forall x(t) \in \overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$ получаем другое неравенство

$$\|F(x(t))\| \leq |a| + |b| + |c - a - b| + 2e^r \|f\| \leq r,$$

которое справедливо, если входные данные таковы, что

$$\alpha e^r + \beta \leq r, \quad (3)$$

здесь $\alpha = 2\|f\| > 0$, $\beta = |a| + |b| + |c - a - b| > 0$.

Неравенство (3) разрешимо, если

$$\|f\| \leq \frac{1}{2e^{\beta+1}} < \frac{1}{2e}.$$

В этом случае нелинейный оператор $F(x(t))$ переводит сами в себя следующее семейство шаров $F(x(t)) : \overline{S_r(0)} \rightarrow \overline{S_r(0)}$, $r_1 \leq r \leq r_2$, r_1 и r_2 — корни уравнения $\alpha e^r + \beta = r$, а значит образ каждого из таких шаров равномерно ограничен.

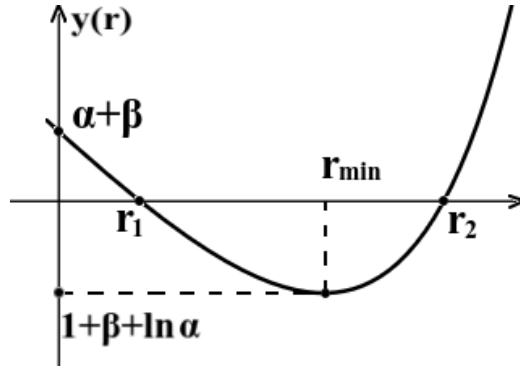


График функции $y(r) = \alpha e^r + \beta - r$ при $r \geq 0$.

Из оценки

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \left(|b| + 2e^{2r}|c - a - b| + (2e^{2r} + 1) \frac{e^r - 1 - r}{2r^2 e} \right) |t_2 - t_1|$$

следует, что образ любого шара $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$, $r_1 \leq r \leq r_2$ при отображении $F(x(t))$ является равностепенно непрерывным семейством. Таким образом, в силу теоремы Арцела–Асколи нелинейный оператор $F(x(t))$ является вполне непрерывным. Отсюда в соответствии с теоремой Шаудера получаем следующее утверждение

Теорема 2. Если $f(t) \in C_{[0,1]}$ и $\|f(t)\| < 0,5/e$, то начально-краевая задача для неоднородного уравнения Блазиуса (1), (2) имеет решение в шаре $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$, $r_1 \leq r \leq r_2$ (вообще говоря, не единственное).

4. Интегральное уравнение с параметром. Рассмотрим интегральное уравнение с параметром вида

$$\int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^k(s) ds - f(t) = 0, \tag{4}$$

где $x(t), f(t) \in C_{[0,1]}$, $\lambda > 0$.

Введём следующие операторы, действующие из $C_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$:

$$B(\lambda)x(t) = \lambda x(t) + \int_0^1 tsx(s) ds,$$

$$A(x(t)) = \int_0^1 x^k(s) ds + f(t).$$

Оператор $B(\lambda)$ – непрерывно обратим

$$B^{-1}(\lambda)v(t) = \frac{1}{\lambda}v(t) - \frac{3t}{3\lambda^2 + \lambda} \int_0^1 sv(s) ds, \tag{5}$$

а нелинейный оператор $A(x(t))$ в силу условия $f(t) \in C_{[0,1]}$ является вполне непрерывным на любом шаре $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$.

Таким образом, исходное интегральное уравнение (4) редуцируется к уравнению на неподвижную точку для вполне непрерывного оператора вида

$$x(t) = B^{-1}(\lambda)A(x(t)) = \frac{1}{\lambda}f(t) - \frac{3t}{3\lambda^2 + \lambda} \int_0^1 sf(s) ds + \frac{6\lambda - 3t + 2}{6\lambda^2 + 2\lambda} \int_0^1 x^k(s) ds.$$

Замкнутый шар $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$ оператор $B^{-1}(\lambda)A(x(t))$ переводит в себя, когда r удовлетворяет неравенству

$$M(\lambda)(L + r^k) \leq r,$$

где $M(\lambda) = (6\lambda + 5)/(6\lambda^2 + 2\lambda)$, $L = \|f\|$, которое в свою очередь разрешимо, если

$$0 \leq L \leq \frac{k-1}{kM(\lambda)} \sqrt[k-1]{\frac{1}{kM(\lambda)}}.$$

Тогда искомое множество значений параметра r – это отрезок $[r_1^*, r_2^*]$. Концы последнего являются корнями уравнения $r^k - r/M(\lambda) + L = 0$.

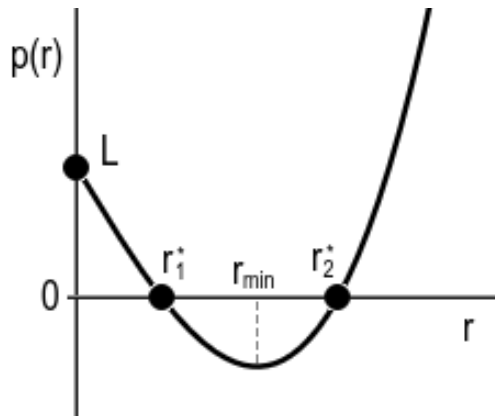


График функции $p(r) = r^k - r/M(\lambda) + L$ при $r \geq 0$.

Таким образом, в силу теоремы Шаудера получаем

Теорема 3. Если выполняются условия $f(t) \in C_{[0,1]}$ и

$$\|f(t)\| \leq \frac{k-1}{kM(\lambda)} \sqrt[k-1]{\frac{1}{kM(\lambda)}},$$

то интегральное уравнение (4) разрешимо в шаре $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$, $r \in [r_1^*, r_2^*]$.

Отметим также, что при $r_1^* \leq r < r_{min}$, где $r_{min} = \sqrt[k-1]{1/(kM(\lambda))}$, из оценки

$$\begin{aligned} \|B^{-1}(\lambda)A(x_1(t)) - B^{-1}(\lambda)A(x_2(t))\| &\leq \frac{6\lambda + 5}{6\lambda^2 + 2\lambda} \|x_1^k(t) - x_2^k(t)\| \leq \\ &\leq kM(\lambda)r^{k-1} \|x_1(t) - x_2(t)\| < kM(\lambda)r_{min}^{k-1} \|x_1(t) - x_2(t)\| \end{aligned}$$

следует, что оператор $B^{-1}(\lambda)A(x(t))$ является сжимающим на каждом из шаров семейства $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$, где $r_1^* \leq r < r_{min}$.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то в любом из шаров $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$ радиуса $r_1^* \leq r < r_{min}$, где $r_{min} = \sqrt[k-1]{1/(kM(\lambda))}$, интегральное уравнение (4) имеет единственное решение.

Очевидно, это же решение будет принадлежать всем шарам другого семейства $\overline{S_r(0)} \subset C_{[0,1]}$, $r_{min} \leq r \leq r_2^*$, но не обязательно будет единственным.

Случай, когда оператор $B^{-1}(\lambda)A(x(t))$ является сжимающим, с несколько иных позиций был рассмотрен в работе [2], продолжающей исследования [3, 4]. Приведём здесь формулировку соответствующей теоремы

Теорема 5. Пусть в области

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in E_1 \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}$$

имеет место оценка

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0, \quad (6)$$

где $S \subset \Lambda$ — открытое множество, границе которого принадлежит точка 0, $a(\lambda) : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ — положительный непрерывный функционал, удовлетворяющий условию $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$, и выполнены условия:

1) справедливо неравенство

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq L(\lambda)r \|x_1 - x_2\|, \quad (7)$$

где $L(\lambda) = O(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$;

2) имеет место оценка $\|A(0)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда в Ω найдётся подобласть

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in E_1 \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0 \subset S, 0 < r_0 \leq r\},$$

в которой существует единственное решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ уравнения $B(\lambda)x + A(x) = 0$.

Применительно к уравнению (4) в соответствии с теоремой 5, но при условии, что $k = 2$, $f(t) = \lambda^3 t$, в работе [2] было доказано существование единственного решения в некотором шаре, также зависящем от параметра λ .

Действительно, поскольку оператор $B(\lambda)$ остаётся таким же, как и в уравнении (4), то из формулы (5) следует оценка (6), а именно

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0.$$

Далее, справедливость условия 1) теоремы 5 следует из оценки

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq 2|\lambda|r \|x_1(t) - x_2(t)\|,$$

а справедливость условия 2) из вида функции $f(t) = \lambda^3 t$.

Также в работе [2] выписана асимптотика этого решения

$$x(t) = 3t\lambda^3 - 9t\lambda^4 + \frac{45t + 6}{2}\lambda^5 - \frac{81t + 36}{2}\lambda^6 + \dots$$

при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1965.
2. *Леонтьев Р. Ю.* Нелинейные уравнения в банаховых пространствах с векторным параметром в нерегулярных случаях : монография. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. 101 с.
3. *Леонтьев Р. Ю., Сидоров Н. А.* Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром // Известия Иркутского государственного университета. Математика. 2011. 4, № 3. С. 116–123.
4. *Сидоров Н. А.* Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы // Нелинейные граничные задачи. 2004. № 14. С. 161–164.
5. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 488 с.
6. *Blasius H.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Zeits. f. Math. u. Phys. 1908. 56. P. 1–37.
7. *Precup R.* Methods in Nonlinear Integral Equations. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002.

Леонтьев Роман Юрьевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: romanisu@yandex.ru

Фалалеев Михаил Валентинович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: mvfalaleev@gmail.com



ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2024 г. МАМЕДОВ Ю. А., АХМЕДОВ Х. И.

Аннотация. Работа посвящена исследованию однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для уравнения параболического типа второго порядка со смещением времени в нелокальных несамосопряженных граничных условиях. При минимальных условиях на начальные данные доказана однозначная разрешимость и получено явное аналитическое представление для решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, смещение по времени, смешанная задача, вычетный метод.

AMS Subject Classification: 35K10, 35K25

1. Постановка задачи. Пусть

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u - u_t,$$

$$l_j u(x, t) = u(x, t + (1 - j)\omega) + \delta_j u(1 - x, t + j\omega), \quad (j = 0, 1)$$

$$l_j u(x, t) = \alpha_{j-2} u_x^{(j-2)}(x, t) + \beta_{j-2} u_x^{(j-2)}(1 - x, t), \quad (j = 2, 3)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ известные коэффициенты и являются вещественными функциями, ω , δ_j , α_j , β_j ($j = 0, 1$) вещественные постоянные, $\omega > 0$, $\delta_0 \cdot \delta_1 \neq 0$.

В полуполосе $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ рассматривается смешанная задача

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$l_j u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad j = 0, 1, \quad (3)$$

$$l_j u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leq \omega, \quad j = 2, 3. \quad (4)$$

Решением задачи (1)–(4) назовем функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(0 < x < 1, t \geq 0)$;

$$\int_0^t u(x, \tau) d\tau \in C(0 \leq x \leq 1, t \geq 0);$$

2) $l_j u(x, t) \in C(0 \leq x < 1, t > 0)$, $j = 0, 1$;

3) $l_j u(x, t) \in C(0 \leq x < 1, 0 < t \leq \omega)$, $j = 2, 3$;

4) $u(x, t)$ удовлетворяет равенствам (1)–(4) в обычном смысле.

Комбинируванием вычетного метода и метода контурного интеграла [1], [2] доказывается следующая

Теорема. Пусть $a(0)\alpha_0\beta_1 + a(1)\beta_0\alpha_1 \neq 0$, $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $l_j\varphi|_{x=0} = 0$, ($j = 2, 3$), $a(x) > 0, x \in [0, 1]$, $a(x) \in C(0, 1)$, $b(x) \in C[0, 1]$, $c(x) \in C[0, 1]$ и $a(0) \cdot a(1) \neq 0$. Тогда задача (1)–(4) имеет решение и представляется со следующей формулой

$$u(x, t) = \varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{\widehat{Z}_h^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} \left[\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (a(\xi)\varphi''(\xi) + b(\xi)\varphi'(\xi) + c(\xi)\varphi(\xi)) d\xi - Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) \right] d\lambda + \frac{1}{\pi i} \int_{Z_h^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, p, q) d\lambda,$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ функция Грина спектральной задачи соответствующие задачи (1), (2), (3).

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_h^+ &= \left\{ \lambda : \lambda = \sigma e^{-\frac{3\pi}{8}i}, \sigma \in [2h\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty) \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \lambda : \lambda = h(1+i\eta), \eta \in [-1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}] \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \lambda : \lambda = \sigma e^{\frac{3\pi}{8}i}, \sigma \in [2h\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty) \right\}. \end{aligned}$$

$$Z_h^+ = \lambda : \operatorname{Re}\lambda^2 = h, \operatorname{Re}\lambda > 0, h > \max\left(0, \ln\left|\frac{\delta_0}{\delta_1}\right|\right),$$

$$\begin{aligned} Q(x, \lambda, p, q) &= \left[\exp\left(-\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a(x)}} + \frac{b(x)}{2a(x)}\right) dx\right) - \exp\left(\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a(x)}} - \frac{b(x)}{2a(x)}\right) dx\right) \right]^{-1} \times \\ &\times \left[p \left(\exp\left(-\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a(x)}} + \frac{b(x)}{2a(x)}\right) dx - q\right) \right) \exp\left(\int_0^x \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a(\xi)}} - \frac{b(\xi)}{2a(\xi)}\right) d\xi\right) + \right. \\ &\left. + \left(q - p \left(\exp\left(\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a(x)}} + \frac{b(x)}{2a(x)}\right) dx\right) \right) \right) \left(\exp\left(-\int_0^x \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a(\xi)}} - \frac{b(\xi)}{2a(\xi)}\right) d\xi\right) \right) \right] \\ p &= [\delta_1 e^{2\lambda^2\omega} - \delta_0]^{-1} (\alpha_1 A(\lambda) e^{\lambda^2\omega} - \alpha_0 B(\lambda)), \quad q = [\delta_1 e^{2\lambda^2\omega} - \delta_0]^{-1} (e^{\lambda^2\omega} B(\lambda) - A(\lambda)) \end{aligned}$$

$$A(\lambda) = e^{2\lambda^2\omega} \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} u(1, \tau) d\tau, \quad B(\lambda) = e^{2\lambda^2\omega} \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} u(0, \tau) d\tau.$$

$u(s, t)$, ($s = 0, 1$) значение решения задачи (1), (2), (4) на частях $\{(s; t) : 0 \leq t \leq \omega, s = 0, 1\}$ боковой границы $\{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 458 с.
2. Расулов М. Л. Применение метода контурного интеграла. М. : Наука, 1975. 255 с.

Мамедов Юсиф Абульфат оглы
Бакинский государственный университет, Азербайджан
E-mail: yusifmamedov@icloud.com

Ахмедов Хикмет Иншалла оглы
Бакинский государственный университет, Азербайджан
E-mail: hikmatahmadov@yahoo.com



КЛАССИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЙНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2024 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. В рамках подхода Захарова – Шульмана определена классическая матрица рассеяния для простейшего процесса взаимодействия жестких и мягких возбуждений в кварк-глюонной плазме. Вычисления проведены в близкой аналогии с методами квантовой теории поля, с заменой квантового коммутатора от квантово-полевых операторов полей на так называемую скобку Ли – Пуассона от классических переменных. S -матрица рассеяния выбрана в виде наиболее общего интегро-степенного ряда по степеням асимптотических значений нормальных бозонных переменных $(c_{\mathbf{k}}^a(t), c_{\mathbf{k}}^{*a}(t))$, описывающих мягкие глюонные возбуждения системы, и цветного заряда $Q^a(t)$ жесткой частицы при $t \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: гамильтонов формализм, скобка Ли – Пуассона, классическая матрица рассеяния, неабелева плазма, плазмон, цветозаряженная частица.

AMS Subject Classification: 81U20, 82D10

1. Введение. Для вычисления эффективного тока в общих плазмopodobных средах предполагается использовать так называемую *классическую матрицу рассеяния*, впервые введенную В. Е. Захаровым и Е. И. Шульманом [3, 5] для гамильтоновых волновых систем. Целью данной работы является вывод явного вида классической матрицы рассеяния для конкретной физической системы — плазмы с неабелевым типом взаимодействия с последующим её использованием для получения выражения потери энергии энергичной цветозаряженной частицы, движущейся в данной среде.

2. Классическая матрица рассеяния. Исходным в построении классической матрицы рассеяния является следующая система уравнений Гамильтона [4, 6]

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} = -i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^a - i \frac{\delta \mathcal{H}_{int}}{\delta c_{\mathbf{k}}^{*a}}, \quad \frac{dQ^a}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c. \quad (2.1)$$

Здесь \mathcal{H}_{int} — некоторый гамильтониан взаимодействия, f^{abc} — антисимметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$. Следуя рассуждениям [3, 5] рассмотрим систему с взаимодействием, которая адиабатически «выключается» при $t \rightarrow \pm \infty$, т.е.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} e^{-\epsilon|t|}, \quad \epsilon > 0.$$

Решение системы уравнений (2.1) асимптотически переходит в решение уравнений свободного поля:

$$c_{\mathbf{k}}^a(t) \rightarrow c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t) \equiv c_{\mathbf{k}}^{\pm a} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}, \quad Q^a(t) \rightarrow Q^{\pm a}, \quad (2.2)$$

где в правой части величины $c_{\mathbf{k}}^{\pm a}$ и $Q^{\pm a}$ не зависят от времени. Функции $(c_{\mathbf{k}}^{-a}, Q^{-a})$ и $(c_{\mathbf{k}}^{+a}, Q^{+a})$ не являются независимыми. Существует нелинейный (интегральный) оператор \hat{S}_ϵ , связывающий

Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос регистрации: 121041300058-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

in- и out-поля и цветные заряды. Для дальнейшего анализа перейдем к так называемому «представлению взаимодействия»

$$c_{\mathbf{k}}^a(t) = \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}, \quad c_{\mathbf{k}}^{*a}(t) = \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t) e^{i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}.$$

В новых переменных уравнения (2.1) эквивалентны интегральным уравнениям, определяющим эволюцию во времени рассматриваемой системы

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) = c_{\mathbf{k}}^{-a} - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{int}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(\tau)} e^{-\epsilon|\tau|}, \quad \mathcal{Q}^a(t) = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_{int}}{\partial \mathcal{Q}^b(\tau)} f^{abc} \mathcal{Q}^c(\tau) e^{-\epsilon|\tau|}, \quad (2.3)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}_{int}$ — гамильтониан взаимодействия, выраженный в новых переменных $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a$ и $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}$. Решения данных интегральных уравнений можно формально представить в следующем виде:

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) = S_{\epsilon}(-\infty, t)[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad \mathcal{Q}^a(t) = S_{\epsilon}(-\infty, t)[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}]. \quad (2.4)$$

При конечном параметре ϵ и достаточно малых амплитудах $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и \mathcal{Q}^{-a} интегральный оператор $S_{\epsilon}(-\infty, t)$ может быть получен в виде сходящегося ряда путем итерации приведенных выше интегральных уравнений. В работе [5] ряд, полученный для оператора $S_{\epsilon}(-\infty, t)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, был назван *классической матрицей перехода*. Предел $\epsilon \rightarrow 0$ понимается для каждого члена ряда и полученное выражение является конечным в смысле обобщенных функций.

Далее полагая $t \rightarrow +\infty$, находим из (2.4)

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = S_{\epsilon}[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad \mathcal{Q}^{+a} = S_{\epsilon}[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad (2.5)$$

где $S_{\epsilon} \equiv S_{\epsilon}(-\infty, +\infty)$. Соответствующий предел $\epsilon \rightarrow +0$

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} S_{\epsilon}(-\infty, +\infty)$$

получил название *классической матрицы рассеяния*.

3. Рассеяние плазмона на жесткой цветозаряженной частице. Рассмотрим структуру классической матрицы рассеяния в простейшем случае квадратичного по полевым переменным $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a$ и $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}$, и линейного по цветному заряду \mathcal{Q}^a гамильтониана взаимодействия \mathcal{H}_{int} , как он определяется выражением [4, 6]

$$\mathcal{H}_{int} = i f^{a_1 a_2 a_3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2, A)}(\mathbf{v}) c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3}.$$

В представлении взаимодействия интегральные уравнения в (2.3) принимают вид

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{k}_1 T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} \tilde{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}(\tau) \mathcal{Q}^b(\tau) e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \tau - \epsilon|\tau|}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Q}^a(t) = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2} \tilde{c}_{\mathbf{k}_1}^{*a_1}(\tau) \tilde{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}(\tau) \mathcal{Q}^c(\tau) e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \tau - \epsilon|\tau|}, \quad (3.2)$$

где «резонансная разность частот» $\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}$ в показателе экспоненты определена как

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (3.3)$$

Для наших целей достаточно найти итерацию первого порядка для уравнения (3.1), т.е. в правой части просто сделать замену: $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(\tau) \rightarrow c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $\mathcal{Q}^a(\tau) \rightarrow \mathcal{Q}^{-a}$, тогда

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{(1)a}(t) = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \left(\int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \tau - \epsilon|\tau|} \right) T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} \mathcal{Q}^{-b}. \quad (3.4)$$

Проанализируем интеграл в круглых скобках в (3.4). Для определенности будем считать, что $t > 0$ и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon|\tau|} &= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau + \epsilon\tau} + \int_0^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon\tau} \\ &= \frac{2\epsilon}{(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})^2 + \epsilon^2} + \frac{1}{i} \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i\epsilon} e^{(i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon)t}. \end{aligned}$$

Используя следующие выражения [2]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{ixt}}{x + i\epsilon} = 0,$$

находим искомый предел для нашего интеграла

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon|\tau|} = 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}).$$

Таким образом полагая $\epsilon \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$, находим из (3.4)

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)baa_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} \mathcal{Q}^{-b} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}) \equiv S[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}]. \quad (3.5)$$

Данное выражение определяет классическую матрицу рассеяния в форме интегрального оператора в первом нетривиальном приближении. Аналогичные рассуждения для второго интегрального уравнения (3.2) в данном порядке итерации приводят к следующему соотношению:

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 T_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(2)ba_1a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-c} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}). \quad (3.6)$$

4. Явный вид классической матрицы рассеяния. Для определения эффективного классического тока необходимо использовать классическую матрицу рассеяния не в форме некоторых интегральных операторов (3.5) и (3.6), а в виде некоторого заданного функционала от асимптотических полевых переменных $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, и асимптотического цветного заряда \mathcal{Q}^{-a} . Определим явный вид классической матрицы рассеяния исходя из аналогии с квантовой теорией поля. Как хорошо известно [1], в квантовой теории поля связь между асимптотическими состояниями каких-либо in- и out-полевых операторов задается с помощью квантово-полевой S -матрицы

$$\hat{\phi}^{out}(x) = \hat{S}^\dagger \hat{\phi}^{in}(x) \hat{S}.$$

Далее если представить общий вид квантовой S -матрицы в виде экспоненты от некоторой фазовой матрицы \hat{T}

$$\hat{S} = e^{i\hat{T}}, \quad (4.1)$$

где \hat{T} – эрмитовый оператор, то последнее соотношение можно переписать в виде ряда коммутаторов

$$\hat{\phi}^{out}(x) = e^{-i\hat{T}} \hat{\phi}^{in}(x) e^{i\hat{T}} = \hat{\phi}^{in}(x) + \frac{i}{1!} [\hat{\phi}^{in}, \hat{T}] + \frac{i^2}{2!} [[\hat{\phi}^{in}, \hat{T}], \hat{T}] + \frac{i^3}{3!} [[[\hat{\phi}^{in}, \hat{T}], \hat{T}], \hat{T}] + \dots \quad (4.2)$$

По аналогии с (4.1) будем искать классическую S -матрицу в виде экспоненциальной функции

$$S = e^{i\mathcal{T}}, \quad (4.3)$$

где \mathcal{T} – вещественная функция, а квантовые коммутаторы в (4.1) заменим на скобку Ли-Пуассона: $[\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}$, как она была определена в [4,6]. Выпишем её в новых переменных $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и \mathcal{Q}^{-a} :

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-c}} \frac{\delta G}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-c})^*} - \frac{\delta F}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-c})^*} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-c}} \right\} + \frac{\partial F}{\partial Q^{-a}} \frac{\partial G}{\partial Q^{-b}} f^{abc} Q^{-c}.$$

Тогда правую часть соотношений в (2.5) в пределе $\epsilon \rightarrow +0$ можно формально представить как

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{i}{1!} \{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\} + \frac{i^2}{2!} \{\{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \frac{i^3}{3!} \{\{\{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \dots, \quad (4.4)$$

$$Q^{+a} = Q^{-a} + \frac{i}{1!} \{Q^{-a}, \mathcal{T}\} + \frac{i^2}{2!} \{\{Q^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \frac{i^3}{3!} \{\{\{Q^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \dots. \quad (4.5)$$

Будем искать неизвестную функцию \mathcal{T} в виде наиболее общего разложения по степеням нормальных in-полевых переменных $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и асимптотического цветного заряда Q^{-a} :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & F^a Q^{-a} + \int d\mathbf{k}_1 [g_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + g_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] + \int d\mathbf{k}_1 [f_{\mathbf{k}_1}^{a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] Q^{-b} \quad (4.6) \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 [g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^*] \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 [G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^*] Q^{-b} + \dots \end{aligned}$$

В рамках нашего приближения достаточно рассмотреть только второй член в правых частях (4.4) и (4.5). В первом случае имеем

$$\begin{aligned} \{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\} &= \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*} = g_{\mathbf{k}}^{*a} + f_{\mathbf{k}}^{*ab} Q^{-b} \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 [g_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + 2g_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] + \int d\mathbf{k}_1 [G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + 2G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] Q^{-b} + \dots, \end{aligned}$$

в то время как во втором случае находим

$$\begin{aligned} \{Q^{-a}, \mathcal{T}\} &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q^{-b}} f^{abc} Q^{-c} = f^{abc} F^b Q^{-c} + f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 [f_{\mathbf{k}_1}^{a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] Q^{-c} \\ &+ f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 [G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^*] Q^{-c} + \dots \end{aligned}$$

Полученные выше два выражения необходимо подставить в (4.4) и (4.5), соответственно, и сравнить их с асимптотическими соотношениями (3.5) и (3.6). В итоге определим первую отличную от нуля коэффициентную функцию в представлении (4.6)

$$G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} = \frac{1}{2} T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}) \quad (4.7)$$

и поэтому вместо (4.6) мы можем записать

$$\mathcal{T} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} Q^{-b} + \dots \quad (4.8)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987. 616 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
3. Захаров В. Е., Шульман Е. И. О матрице рассеяния и интегрируемости волновых систем, обладающих дополнительным интегралом движения // Доклады Академии наук СССР. 1985. 283, № 6. С. 1325-1328.

4. *Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю.* Гамильтонов формализм для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2024. 234. С. 143–158.
5. *Zakharov V. E., Schulman E. I.* On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems // Physica D. 1988. 29. P. 283–320.
6. *Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu.* Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: Plasmon — hard particle scattering // Nuclear Physics A. 2024. 1048. P. 122903(38).

Марков Юрий Адольфович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: markov@icc.ru



ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ БЫСТРОЙ ЦВЕТНОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕАБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ В РАМКАХ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

© 2024 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. Целью данной работы является вывод общей формулы для потери энергии быстрой цветозаряженной частицы при её рассеянии на мягких бозонных возбуждениях кварк-глюонной плазмы в рамках классического гамильтонова формализма. В качестве первого шага в этом направлении вводится понятие некоторого эффективного тока рассматриваемого процесса рассеяния и определяется его связь с так называемой классической матрицей рассеяния. Из известного вида данной матрицы рассеяния восстанавливается искомым эффективным ток, использования которого позволяет определить формулу для потерь энергии высокоэнергетичной цветной частицы, движущейся в высокотемпературной плазме с неабелевым типом взаимодействия.

Ключевые слова: потери энергии, кварк-глюонная плазма, эффективный ток, классическая матрица рассеяния.

AMS Subject Classification: 74J20, 82D10

1. Введение. В качестве приложения общей теории построения классической матрицы рассеяния для волновых систем с распределенными параметрами [?, 3], в рамках гамильтонова подхода мы рассматриваем задачу вычисления потерь энергии высокоэнергетической цветозаряженной частицы, проходящей через горячую кварк-глюонную плазму, т. е. потерь энергии из-за процесса рассеяния на мягких бозонных возбуждениях среды.

2. Общее выражение для потерь энергии частицы в плазме. В качестве исходного выражения для потерь энергии будем использовать классическое выражение для потерь энергии частиц на единицу длины в обычной плазме [1] с минимальным расширением на цветовую степень свободы:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^4}{\tau} \int d\mathbf{k} d\omega \int dQ_0 \operatorname{Re} \langle \mathbf{J}_Q^{*a}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_Q^a(\mathbf{k}, \omega) \rangle. \quad (0.1)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость энергичной частицы; $\mathbf{E}_Q^a(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathbf{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega)$ — образ Фурье хромоэлектрического поля и эффективного тока, соответственно. К процедуре усреднения по ансамблю в уравнении (0.1) мы добавили интегрирование по начальному значению цветового заряда Q_0^a с мерой [4]

$$dQ_0 = \prod_{a=1}^{d_A} dQ_0^a \delta(Q_0^a Q_0^a - q_2) \delta(d^{abc} Q_0^a Q_0^b Q_0^c - q_3), \quad d_A = N_c^2 - 1,$$

где постоянные q_2 и q_3 фиксируют значения инвариантов Казимира. Мера нормирована так, что $\int dQ_0 = 1$ и таким образом

Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос регистрации: 121041300058-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

$$\int dQ_0 Q_0^a Q_0^b = \frac{C_A}{d_A} \delta^{ab}. \quad (0.2)$$

3. Эффективный ток. Для определения потерь энергии нам необходимо знание некоторого эффективного тока жесткой цветозаряженной частицы, при её взаимодействии с окружающей средой. По аналогии с квантовой теорией поля [2] определим связь между классической матрицей рассеяния \mathcal{S} и эффективным током жесткой цветозаряженной частицы с помощью следующего выражения:

$$\mathcal{J}_Q^{a\mu}(\mathbf{x}, t) = -i\mathcal{S}^\dagger \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathcal{A}_\mu^{-a}(x)}. \quad (0.3)$$

Классическую \mathcal{S} -матрицу, в свою очередь, можно представить в виде экспоненциальной функции

$$\mathcal{S} = e^{i\mathcal{T}}. \quad (0.4)$$

Поскольку асимптотические калибровочные поля $\mathcal{A}_\mu^{-a}(x)$ и $\mathcal{A}_\mu^{+a}(x)$ удовлетворяют уравнениям свободного поля, они могут быть разложены на положительную и отрицательную частотные части инвариантным образом. Таким образом, можно написать, например,

$$\mathcal{A}_\mu^{-a}(x) = \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{-a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^l t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*l}(\mathbf{k}) (c_{\mathbf{k}}^{-a})^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}^l t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\}, \quad (0.5)$$

где $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ – асимптотические in-амплитуды. Явный вид вектора поляризации продольной моды $\epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) = (\epsilon_0^l(\mathbf{k}), \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}))$ в A_0 -калибровке задается следующим выражением:

$$\epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{-\tilde{u}^2(k)}} \Big|_{\text{on-shell}}, \quad (0.6)$$

где продольный проектор $\tilde{u}_\mu(k) = k^2 (k_\mu - u_\mu(k \cdot u)) / (k \cdot u)$ и u_μ – 4-скорость среды. В частности, имеем $\tilde{u}_0(k) = 0$ в системе покоя плазмы $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ и как следствие определения (0.6) получаем $\epsilon_0^l(\mathbf{k}) = 0$. Очевидно, что

$$(\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}))^2 = 1 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) = 1, \quad \hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|. \quad (0.7)$$

Обращая (0.5), можно выразить $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ в терминах функции поля в координатном представлении $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$ и ее производной по времени $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(x)$. Принимая во внимание нормировку (0.7), в результате имеем

$$c_{\mathbf{k}}^{-a} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{i\omega_{\mathbf{k}}^l t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \left[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) \right]$$

и аналогичное выражение для сопряженной функции $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$. Функции в левой части $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ по определению не зависят от времени, поэтому правая часть данных выражений также должна не зависеть от t . По этой причине мы можем полагать t равной произвольной константе и, в частности, можем взять $t = 0$. Тогда вместо последнего выражения будем иметь

$$c_{\mathbf{k}}^{-a} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \left[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0) - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, 0) \right]. \quad (0.8)$$

Следующим шагом, с учетом представления (0.4), перепишем правую часть исходного выражения для эффективного тока (0.3) в следующем виде:

$$\mathcal{J}_Q^{ai}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} = \int d\mathbf{k}_1 \left\{ \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1}} \frac{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1}}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} + \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*} \frac{\delta (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} \right\}. \quad (0.9)$$

Используя представление (0.8), легко находим вариационную производную

$$\frac{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1}}{\delta \mathcal{A}_i^{-a}(x)} = \delta^{aa_1} \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}{Z_l(\mathbf{k}_1)} \right)^{1/2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \epsilon_i^l(\mathbf{k}_1) \delta(t) \quad (0.10)$$

и соответствующую производную от сопряженной функции $(c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*$. При выводе этих соотношений функциональную производную функции $\dot{\mathcal{A}}_i^a(\mathbf{y}, 0)$ относительно $\mathcal{A}_i^a(\mathbf{x}, t)$ мы полагаем равной нулю, считая что данные функции являются независимыми. Используя явный вид для фазовой функции в первом нетривиальном приближении: $\mathcal{T} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b}$ и вариационные производные (0.10), находим из (0.8) искомый эффективный ток в координатном представлении:

$$\mathcal{J}_Q^a(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1 a_2 b} F_{\mathbf{k}_2} \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a a_2 b} F_{\mathbf{k}_1} \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \right\} \delta(t) \mathcal{Q}^{-b}.$$

Здесь мы обозначили трехмерные векторы тока \mathcal{J}_Q^a и поляризации $\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k})$ жирным шрифтом и для краткости обозначений полагаем

$$F_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^l}{Z_l(\mathbf{k})} \right)^{1/2}. \quad (0.11)$$

Соответствующий ток в Фурье-представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega) &= \int dt d\mathbf{x} \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= (2\pi)^3 \int d\mathbf{k}_1 G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2)a_1 a_2 b} F_{-\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}^l(-\mathbf{k}) (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* \mathcal{Q}^{-b} + (2\pi)^3 \int d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{(2)a a_2 b} F_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b}. \end{aligned} \quad (0.12)$$

4. Формула для потерь энергии жесткой цветозаряженной частицы. Вернемся теперь к выражению для потерь энергии (0.1). Хромoeлектрическое поле в (0.1), порождаемое эффективным током (0.12), определяется уравнением поля во временной калибровке

$$E_Q^{ai}(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega {}^* \tilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) \mathcal{J}_Q^{aj}(\mathbf{k}, \omega),$$

где «одетый» тепловыми поправками глюонный пропагатор в данной калибровке имеет следующую трехмерную структуру:

$${}^* \tilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) = \left(\frac{k^2}{\omega^2} \right) \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} {}^* \Delta^l(k) + \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} \right) {}^* \Delta^t(k). \quad (0.13)$$

Нас интересует здесь лишь первый член в правой части, связанный с продольными возбуждениями (плазмонами) кварк-глюонной плазмы. Подставляя выражение для продольной части хромoeлектрического поля $E_Q^{ai}(k)$ в уравнение (0.1), с учетом соответствующей структуры пропагатора (0.13), вместо (0.1) получаем формулу для потерь энергии

$$- \frac{dE}{dx} = - \frac{1}{|\mathbf{v}|} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^4}{\tau} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathcal{Q}^- \frac{k^2}{\omega \mathbf{k}^2} \langle |(\mathbf{k} \cdot \mathcal{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle \text{Im}({}^* \Delta^l(k)), \quad (0.14)$$

где мера интегрирования по цвету $d\mathcal{Q}^-$ определена для асимптотического значения цветного заряда \mathcal{Q}^{-a} . Используя явное выражение для Фурье-образа эффективного тока $\mathcal{J}_Q^a(\mathbf{k}, \omega)$ (0.12) и последнее соотношение в (0.7), корреляционную функцию в подинтегральном выражении (0.14) приводим к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle |(\mathbf{k} \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle &= (2\pi)^6 \left\{ F_{-\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 a b} G_{\mathbf{k}'_1, -\mathbf{k}}^{*(2) a'_1 a b'} \langle (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}'_1}^{-a'_1} \rangle \right. \\ &\quad \left. + F_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_2 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_2 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_2}^{*(2) a a'_2 b'} \langle (c_{\mathbf{k}'_2}^{-a'_2})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \rangle \right\} \mathcal{Q}^{-b} \mathcal{Q}^{-b'}. \end{aligned} \quad (0.15)$$

Здесь в правой части оставлены только члены с нетривиальными корреляционными функциями:

$$\langle (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}'_1}^{-a'_1} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{-a_1 a'_1} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1), \quad \langle (c_{\mathbf{k}'_2}^{-a'_2})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}'_2}^{-a'_2 a_2} \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2),$$

а для матрицы плотности числа плазмонов используем следующую цветовую декомпозицию [5]

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{-a a'} = \delta^{a a'} N_{\mathbf{k}}^{-l} + (T^c)^{a a'} \mathcal{Q}^{-c} W_{\mathbf{k}}^{-l}. \quad (0.16)$$

Проанализируем сначала вклад от бесцветной части асимптотической плотности числа плазмонов, т. е. вклад, пропорциональный скалярной плотности $N_{\mathbf{k}}^{-l}$. С этой целью выполняем интегрирование по асимптотическому заряду \mathcal{Q}^{-a} в выражении (0.15), используя формулу (0.2). Таким образом, вместо (0.15) можно записать

$$\begin{aligned} &\int d\mathcal{Q}^- \langle |(\mathbf{k} \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{k}, \omega))|^2 \rangle \\ &= (2\pi)^6 \frac{C_A}{d_A} \left\{ F_{-\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_1 G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{(2) a_1 a b} G_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}}^{*(2) a_1 a b} N_{\mathbf{k}_1}^{-l} + F_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{k}^2 \int d\mathbf{k}_1 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) a a_1 b} N_{\mathbf{k}_1}^{-l} \right\}. \end{aligned} \quad (0.17)$$

Первый член в фигурных скобках удваивает второй при $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ в выражении для потерь энергии (0.14). Используя явный вид коэффициентной функции $G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2})$, находим для квадрата модуля

$$G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) a a_1 b} = \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} \mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) b a a_1} (2\pi)^2 [\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1})]^2. \quad (0.18)$$

В силу цветовой и импульсной декомпозиции эффективной амплитуды $\mathcal{F}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2} = f^{a a_1 a_2} \mathcal{F}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}$ будем иметь далее

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} \mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) b a a_1} = f^{b a a_1} f^{b a a_1} |\mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 = N_c d_A |\mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2.$$

Под квадратом δ -функции в (0.18) мы понимаем $[\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1})]^2 = \tau \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}) / (2\pi)$. Таким образом, произведение (0.18) запишется как

$$G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 b} G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(2) a a_1 b} = \frac{1}{4} \tau N_c d_A |\mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}). \quad (0.19)$$

Подставляя (0.19) в (0.17), а затем в (0.14), приходим к следующему выражению:

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{(2\pi)^{10}}{2} N_c^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\omega \left(\frac{k^2}{\omega} \right) F_{\mathbf{k}}^2 |\mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 N_{\mathbf{k}_1}^{-l} (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}) \text{Im}(*\Delta^l(k)). \quad (0.20)$$

Последним шагом в подынтегральном выражении в правой части уравнения (0.20) полагаем

$$\text{Im}(*\Delta^l(k)) \simeq -\pi \text{sign}(\omega) \delta(\text{Re} * \Delta^{-1l}(k)) = -\pi \text{sign}(\omega) \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right) [\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^l) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^l)].$$

Подставим последнее представление в (0.20) и выполним интегрирование по ω . Вспоминая определение функции $F_{\mathbf{k}}$, ур. (0.11), находим искомое выражение для потерь энергии, связанное с бесцветной частью плотностью числа плазмонов (0.16)

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{(2\pi)^6}{8} N_c^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 \left(\frac{k^2}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \right) |\mathcal{F}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)}|^2 N_{\mathbf{k}_1}^{-l} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \quad (0.21)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др.* Электродинамика плазмы. М. : Наука, 1974. 719 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Лозунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М. : Наука, 1969. 424 с.
3. *Захаров В. Е., Шулман Е. И.* О матрице рассеяния и интегрируемости волновых систем, обладающих дополнительным интегралом движения // Доклады Академии наук СССР. 1985. 283, № 6. С. 1325–1328.
4. *Kelly P., Liu Q., Lucchesi C., Manuel C.* Classical transport theory and hard thermal loops in the quark-gluon plasma // Physical Review D. 1994. 50. P. 4209–4218.
5. *Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu.* Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: Plasmon - hard particle scattering // Nuclear Physics A. 2024. 1048. P. 122903(38).

Марков Юрий Адольфович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: markov@icc.ru



РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ КОМБИНИРОВАННОГО ТИПА

© 2024 г. Г. В. НАМСАРАЕВА

Аннотация. Целью доклада является исследование разрешимости обратных задач определения вместе с решением уравнения теплопроводности также его правой части, или неизвестного внешнего воздействия. Особенностью изучаемых задач является то, что в них неизвестное внешнее воздействие определяется двумя функциями, одна из которых зависит только от пространственной переменной, другая же – только от временной.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратные задачи, неизвестное внешнее воздействие, регулярные решения, существование, единственность.

AMS Subject Classification: 35R30, 35M20

Исследованиям разрешимости обратных задач пространственного типа, исследованиям разрешимости обратных задач временного типа посвящено столь много работ, что перечислить даже малую их часть в рамках одного доклада невозможно. Значительно меньшее число работ посвящено теории обратных задач для параболических уравнений, не являющихся обратными задачами пространственного или временного типа. Так, в работах [7]– [6] изучалась разрешимость обратных задач, в которых неизвестный коэффициент является величиной постоянной. В работах [3], [5] изучались задачи, в которых неизвестный коэффициент содержал компоненты, зависящие как от пространственной, так и от временной переменной. Именно последняя ситуация и будет рассмотрена в настоящем докладе.

1. Постановка задач. В прямоугольнике Q переменных (x, t) , $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in (0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = F(x, t).$$

Пусть в этом уравнении функция $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = f(x, t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x)$$

с заданными функциями $f(x, t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$, и функциями $q(x)$ и $p(t)$, подлежащими определению вместе с решением $u(x, t)$.

Пусть наряду с функциями $f(x, t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ заданы также функции $N(x)$ и $R(t)$, определенные при $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$ соответственно.

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x, t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(x, T) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

$$\int_0^1 N(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (5)$$

Обратная задача II: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (2), а также условий

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

$$\int_0^T R(t)u(x,t)dt = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (7)$$

В обратной задаче *I* условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, условия же (4) и (5) есть условия переопределения, причем условие (4) характерно для обратных задач пространственного типа, условие же (5) – для обратных задач временного типа.

В обратной задаче *II* условия $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ вместе с условием (2) определяют вторую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности, условие $u(0,t) = 0$ есть условие переопределения, характерное для обратных задач временного типа, условие же (7) есть условие переопределения, характерное для обратных задач пространственного типа.

В докладе будут изложены формальные построения, приводящие к вспомогательным краевым задачам, сформулированы и доказаны теоремы о разрешимости данных обратных задач, а также вспомогательных прямых задач для «нагруженных» (интегро-дифференциальных) уравнений соболевского типа, которые имеют самостоятельное значение. Все рассуждения и построения будут проводиться на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l . Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [4]– [10]. Уточним также, что целью доклада является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач – решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р. Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфимский математический журнал. 2007. 9, № 1. С. 63–74.
2. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967. 520 с.
3. Саватеев Е. Г. О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения // Сибирский математический журнал. 1995. 36, № 1. С. 177–185.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.. М. : Наука, 1973. 208 с.
5. Фроленков И. В., Кригер Е. Н. Об одной задаче идентификации функции источника специального вида для многомерного параболического уравнения с данными Коши // Журнал СВУ. Серия Математика и физика. 2013. 6, № 2. С. 186–199.
6. Kozhanov A. I. Hyperbolic Equations with Unknown Coefficients // Symmetry. 2020. 12, № 9. С. 1539.
7. Lorenzi A., Mola G. Identification of real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Inverse Probl. Imaging. 2011. 5, № 3. P. 695–714.
8. Lorenzi A. Recovering two constants in a linear parabolic equation // J. Phys. Conf. Ser. 2007. 73. P. 1–15.
9. Mola G. Identification of the Diffusion Coefficient in Linear Evolution Equations in Hilbert Spaces // J. Abstr. Diff. Equat. Appl. 2011. 2, № 2. P. 18–28.
10. Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam : Noth-Holland, 1978. 208 p.

Намсараева Гэрэлма Владимировна

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ)

E-mail: gerel@inbox.ru



НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. О. Ю. НИКОЛАЕВ

Аннотация. Исследуется разрешимость нелинейной обратной задачи определения младших коэффициентов в псевдопараболическом уравнении высокого порядка. Условие переопределения задается как интегральное условие с финальными данными. Доказана теорема существования регулярного решения (т. е. решения, имеющего все обобщенные производные по Соболеву, входящие в уравнение).

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, интегральное переопределение, существование.

AMS Subject Classification: 35R30, 35M20

Доклад посвящен исследованию разрешимости нелинейной обратной задачи для псевдопараболического уравнения высокого порядка.

В обратных задачах для дифференциальных уравнений наряду с решением требуется определить и само уравнение, т. е. неизвестные коэффициенты уравнения или правую часть. Поэтому для разрешимости обратных коэффициентных задач, помимо естественных граничных условий, необходимых для корректности соответствующей краевой задачи, требуются дополнительные условия. Эти условия называются условиями переопределения.

В рассматриваемой нами задаче неизвестный коэффициент не будет зависеть от временной переменной, а будет зависеть только от пространственных переменных. Такие задачи обычно называются обратными задачами пространственного типа. Условие переопределения интегрального вида позволяет говорить о нашей задаче как о пространственно нелокальной задаче.

Обратные коэффициентные задачи возникают при исследовании физических, биологических и других процессов в средах с заранее неизвестными характеристиками.

Пусть Ω — ограниченная область из пространства R^n с гладкой границей Γ , $0 < T < +\infty$, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$ — боковая граница Q . Функция $f(x, t)$ известна, α — заданная положительная постоянная.

Обратная задача: найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные в области Q уравнением

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta u_t(x, t) + \Delta^2 u(x, t) + q(x)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad (3)$$

$$\int_0^T N(t)u(x, t)dt = \mu(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

В этой задаче условия (2), (3) — условия начально-краевой задачи для параболического уравнения, а условие (4) — условие переопределения, необходимое для нахождения неизвестной функции $q(x)$.

Пусть функция $\psi(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и обращается в нуль на границе Ω . Тогда имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} \psi^2(x) dx \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \psi_{x_i}^2(x) dx, \quad (5)$$

число d_0 в котором определяется лишь областью Ω . Это неравенство и само число d_0 будут использоваться ниже.

Обозначим

$$a(x) = \frac{u_0(x)}{\mu(x)},$$

$$\bar{a} = \sup_{\Omega} |a(x)|,$$

$$\bar{N} = \sup_{\Omega} |N(x)|.$$

$$V = \{u(x, t) : u(x, t) \in L_2(0, T; W_2^4(\Omega)), u_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\}.$$

Теорема. Пусть выполняются условия

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q),$$

$$\mu(x) \in C^4(\bar{\Omega}), \quad \mu(x) > 0, x \in \bar{\Omega},$$

$$N(t) \in C(\bar{\Omega}),$$

$$u_0(x) \in C^4(\bar{\Omega}),$$

$$\alpha > 0,$$

$$T^2 < \min \left\{ \frac{\alpha}{2\bar{a}^2 \bar{N}^2 (\alpha + 2 + d_0)}, \frac{1}{2\bar{a}^2 \bar{N}^2 (\alpha + 2 + d_0)} \right\}.$$

Тогда обратная задача (1)-(4) имеет решение $u(x, t) \in V$, $q(x) \in L_2(\Omega)$.

Николаев Олег Юрьевич

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

E-mail: nikolaev.oleg1@yandex.ru.



ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2024 г. Л. К. ОРЛИК

Аннотация. Получена оценка экспоненциального роста решений линейного дифференциально-разностного уравнения с сосредоточенными запаздываниями с почти периодическими операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Установлен квазиканонический вид экспоненциальной характеристики.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, банахово пространство, дифференциально-разностное уравнение, экспоненциальная характеристика, почти периодический оператор.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Запросы развития биотехнологий, теории связи, динамической теории информации, моделей социальной динамики, теории управления сопряжены с оценкой порядка экспоненциального роста процессов, которые не остаются ограниченными во времени. Отклонения от предвычисленных значений могут возрастать, но скорость этого возрастания должна быть меньше, или в крайнем случае — не превышать скорости возрастания самого процесса. В [1] получены оценки экспоненциального роста решений линейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве: дифференциальных, дифференциально-разностных и интегральных. В [2] — операторных и эквивалентных им дифференциальных уравнений и гиперболических систем.

Введено понятие экспоненциальной характеристики эволюционного уравнения $\varkappa(\alpha)$ -зависимость между порядком α экспоненциального класса, из которого берутся правые части, и нижней гранью β порядков экспоненциальных классов, содержащих соответствующую совокупность решений [4,5].

В [3] определено понятие ядра типа функции Коши интегрального оператора Вольтерра. Названное ядро обладает рядом свойств эволюционного оператора линейного дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве, выраженного через оператор Коши. Ядро типа функции Коши удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $0 < M_1 \leq \|K(t, t)\| \leq M_2$;
- 2) $\left\| \frac{\partial K}{\partial t} \right\| \leq M \|K\|$;
- 3) $\left\| \frac{\partial K}{\partial s} \right\| \leq M \|K\|$;
- 4) Существует s_0 такое, что $K(t, s_0)$ не является финитной функцией. В противном случае $\exists T = T_\varphi$ такое, что $K(t, s_0) = 0$ при $t > T$.

В качестве приложения результата, полученного для интегрального оператора Вольтерра с ядром типа функции Коши, установим вид экспоненциальной характеристики начальной задачи для линейного дифференциального уравнения с сосредоточенными запаздываниями.

2. Построение экспоненциальной характеристики начальной задачи. Рассмотрим начальную задачу

$$L(y) - \sum_{j=1}^m A_j(t)y(t - a_j) = f(t); \quad y|_{t \leq 0} = 0, \quad 0 < a_1 < \dots < a_m < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (1)$$

где $y(t)$ и $f(t)$ — непрерывные вектор-функции со значениями в некотором (действительном или комплексном) банаховом пространстве X .

Здесь $L(y) = y^{(n)} + P_1(t)y^{(n-1)} + \dots + P_n y$; $P_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) и $A_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) — семейства линейных непрерывных почти периодических операторов, действующих в этом пространстве X .

Непрерывный на всей действительной оси оператор $A_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) называется почти периодическим, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon) > 0$, что в любом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ , для которого выполняется неравенство

$$\|A_j(t + \tau) - A_j(t)\|_X < \varepsilon, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Аналогично определяем почти периодические непрерывные в банаховом пространстве X операторы $P_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$).

Пусть $f(t)$ — правая часть уравнения (1) пробегает линейное пространство

$$E_\alpha = \{f(t) : \overline{\lim} (t^{-1} \ln \|f(t)\|_X) < \alpha + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0\}.$$

Очевидно, для $f(t)$ из E_α : $\|f(t)\|_X \leq D_\varepsilon e^{(\alpha + \varepsilon)t}$.

Обозначим через $\varkappa(\alpha)$ нижнюю грань тех β , при которых пространство E_α содержит все решения $y(t)$ начальной задачи (1). Назовем $\varkappa(\alpha)$ экспоненциальной характеристикой этой задачи.

Теорема 1. *Существуют вещественные числа $(-\infty <) \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 (< +\infty)$ такие, что $\varkappa(\alpha) = \beta_0$ при $\alpha \leq \alpha_0$ и $\varkappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha \geq \gamma_0$ (в промежутке (α_0, γ_0) $\varkappa(\alpha)$ — неубывающая функция).*

Доказательство. Доказательство теоремы опирается на исследование интегрального оператора

$$y(t) = (Kf)(t) = \int_0^t K(t, s)f(s) ds, \quad (2)$$

где ядро $K(t, s)$ является решением начальной задачи

$$L(K) = \sum_{j=1}^m A_j(t)K(t - a_j, s), \quad (3)$$

$$K(s, s) = K'_t(s, s) = \dots = K_t^{(n-2)}(s, s) = 0; \quad K_t^{(n-1)}(s, s) = I,$$

которая равносильна интегро-разностному уравнению

$$K(t, s) = H(t, s) + \sum_{j=1}^m \int_{s+a_j}^t H(t, \tau)A_j(\tau)K(\tau - a_j, s) d\tau.$$

Здесь $H(t, s)$ — функция Коши оператора L :

$$L(H) = 0; \quad H(s, s) = H_t(s, s) = \dots = H_t^{(n-2)}(s, s) = 0; \quad H_t^{(n-1)}(s, s) = I,$$

удовлетворяющая условию

$$H(t, s) = \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_s^t \frac{(\tau-s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^n H(\tau, s)}{\partial t^n} d\tau.$$

Интегральный оператор (2) задает решение начальной задачи (1). Рассматривается поведение этого оператора в линейном пространстве E_α и банаховом пространстве

$$B_\alpha = \{f(t) : \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (\|f(t)\|_X e^{-\alpha t}) < \infty\}$$

с нормой

$$\|f\|_{B_\alpha} = \sup_{0 \leq t < \infty} \|f(t)\|_X e^{-\alpha t}.$$

Используется классическая теорема Банаха о замкнутом операторе. Доказательство основывается на следующей лемме. Если $0 < a_1 < \dots < a_m < +\infty$ и при каждом $t > a_m$ для ядра $K(t, s)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right\| \leq C \sum_j^m \|K(\tau - a_j, s)\|,$$

то это ядро оператор - функция экспоненциального типа $\|K(t, s)\| \leq Ce^{\alpha(t-s)}$.

Отсюда вытекает, что если

$$\frac{\partial^n K}{\partial t^n} + p_1(t) \frac{\partial^{n-1} K}{\partial t^{n-1}} + \dots + p_n(t) K = A_1(t) K(t - a_1, s) + \dots + A_m(t) K(t - a_m, s),$$

то имеем соответствующие функции экспоненциального типа:

$$\|K(t, s)\|, \left\| \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right\|, \dots, \left\| \frac{\partial^m K(t, s)}{\partial t^m} \right\| \leq De^{\nu(t-s)}.$$

Если $f(t)$ — правая часть уравнения (1) пробегает линейное пространство E_α , то соответствующая совокупность решений $y(t)$ покрывается пространством E_β при достаточно большом β . Установлено, что существуют вещественные числа $(-\infty <) \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 (< +\infty)$ такие, что $\varkappa(\alpha) = \beta_0$ при $\alpha \leq \alpha_0$ и $\varkappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha \geq \gamma_0$ (в промежутке (α_0, γ_0) $\varkappa(\alpha)$ — неубывающая функция).

Здесь α_0 — старший показатель Ляпунова однородного уравнения, ассоциированного с (1), число γ_0 — показатель экспоненциального роста ядра $K(t, s)$ по обоим переменным, а число β_0 — показатель экспоненциального роста ядра $K(t, s)$ по переменной t . Ясно, что $\beta_0 \leq \gamma_0$. Экспоненциальная характеристика имеет квазиканонический вид.

В случае периодических операторных коэффициентов $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$. Экспоненциальная характеристика принимает канонический вид $\varkappa(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0)$. \square

3. Заключение. Дан ответ на вопрос: каким наименее жестким ограничениям экспоненциальной оценки должно быть подчинено входное воздействие, чтобы решение имело подэкспоненциальный рост с некоторым (в том числе отрицательным) показателем. По нашему мнению, это исследование является новым по отношению к исследованию на устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлик Л. К., Мудракова О. А. Экспоненциальная характеристика эволюционных уравнений в банаховом пространстве. М.: Изд-во РГСУ, 2018. 238 с.
2. Орлик Л. К., Жукова Г. С. Операторные уравнения и смежные вопросы устойчивости дифференциальных уравнений. М.: ИНФРА-М, 2020. 296 с.
3. Mudrakova O. A., Orlik L. K. The exponential characteristic of the Volterra integral operator with kernel depending on $2N$ variables // Journal of Mathematical Sciences. 2007. 147, № 1. P. 6458–6463.
4. Mudrakova O. A., Orlik L. K. The exponential characteristic of first-order linear differential equations and Volterra integral equations of the second kind // Journal of Mathematical Sciences. 2007. 147, № 1. P. 6454–6457.
5. Orlik L. K. Exponential characteristic of a linear differential equation of first order in a banach space // Ukrainian Mathematical Journal. 1989. 41, № 9. P. 1111–1112.

Орлик Любовь Константиновна

Российский государственный социальный университет (РГСУ)

E-mail: Lubov.orlik@gmail.com



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО НЕЯВНОЙ СХЕМЕ

© 2024 г. В. М. ПЛАСТИНИНА

Аннотация. Представлена вычислительная модель решения первой краевой задачи для смешанного дифференциального уравнения в двумерном пространственном случае по неявной разностной схеме. Анализируются недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для данного случая. Приводятся результаты работы программы, реализованной в MathCad-15, в прямоугольной области для переменных по времени и пространственным координатам бокового теплоотвода и внутреннего источника тепла. Для дискретизации этой математической модели был использован локально-одномерный метод.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, уравнения смешанного типа, локально-одномерный метод, краевые условия первого рода.

AMS Subject Classification: 65M06, 80-10

1. Введение. В работах [3, 4] приводится математическая модель для решения параболо-гиперболического уравнения теплопроводности по явной разностной схеме для двумерного пространственного случая, не требующей применения локально-одномерного метода. Для конкретного численного расчета в среде программирования Mathcad-15 была разработана программа [5]. Однако численное решение по этой разностной схеме имеет недостаток в плане устойчивости и большого количества арифметических операций. Поэтому в данном докладе рассматривается более экономичный метод решения по неявной разностной схеме с применением метода прогонки [6].

2. Постановка начально-краевой задачи. Рассмотрим математическую модель исследуемых процессов параболо-гиперболического типа по двум пространственным переменным:

$$b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + c(x, y, t)u + f(x, y, t), \quad (1)$$

в области $G = [0, X] \times [0, Y] \times [-T, T]$, $T > 0$. При этом, $b(x, y, t) = 0$, при $t \leq 0$; $b(x, y, t) > 0$, $t > 0$; $a(x, y, t) > 0$, для всех (x, y, t) из области G , т.е. при $t \leq 0$ – уравнение (1) – параболическое, а при $t > 0$ – гиперболическое.

Для конкретного численного расчета в программе Mathcad-15 температурного поля в однородной мембране с $X=Y=\pi$ и интервалом времени $[-T, T]$ со следующими значениями коэффициентов: $b(x, y, t) = 0$ при $t \leq 0$; $b(x, y, t) = 1$ при $t > 0$; $a = 1$, $c(x, y, t) = \text{const} < 0$, $\lambda = \text{const} > 0$ и с переменным источником тепла $f(x, y, t) = 0$.

Постановка начально-краевой задачи: Для уравнения (1), принимающего вид

$$b(t)u_{tt} + u_t = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + cu + f(x, y, t), \quad (2)$$

ставятся следующие начально-краевые условия:

$$u(x, y, t)|_{t=T} = u_0(x, y) = 10 \sin x \cdot \sin y, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, \\ u(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x, y \leq \pi, -T < t \leq T. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Численное решение поставленной задачи по неявной конечно-разностной схеме. Используя метод конечно-разностной аппроксимации [1] точной постановки начально-краевой задачи (2-4) её дискретной реализацией, рассмотрим неявную разностную схему для уравнения (2) по локально-одномерному методу [1, 2]:

$$\begin{aligned} b(t_{k+1}) \frac{U_{i,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^k + U_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} + \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\tau} = \\ = \lambda \frac{U_{i+1,j}^{k+1} - 4U_{i,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2} + cU_{i,j}^{k+1} + f(x_i, y_j, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Формула для параболического уравнения при $t \leq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\tau} = \lambda \frac{U_{i+1,j}^{k+1} - 4U_{i,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2} + \\ + cU_{i,j}^{k+1} + f(x_i, y_j, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Приводим к каноническому виду [5] для нахождения коэффициентов метода прогонки

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{h^2}(U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1}) - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{4\lambda\tau}{h^2} - c\right)U_{i,j}^{k+1} + \frac{\lambda}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}) = \\ = -\frac{1}{\tau}U_{i,j}^k - f(x_i, y_j, t_{k+1}), \\ A = C = \frac{\lambda}{h^2}, B = \frac{1}{\tau} + \frac{4\lambda\tau}{h^2} - c, D = -\frac{1}{\tau}U_{i,j}^k - f(x_i, y_j, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Прогонку проводим последовательно сначала в направлении оси Ox , затем оси Oy , по формулам локально-одномерного метода [1, 2].

Аналогично получаем расчетные формулы метода прогонки для гиперболического этапа.

4. Заключение. Приведена визуализация результатов численных расчетов полей температуры в разные моменты времени и их анимация по времени в пакете MatchCad-15. Эта математическая модель описывает процесс, связанный с отключением электрической дуги в спутном потоке газа. В дальнейшем планируется использовать метод теплового баланса, применив эту вычислительную модель к более реальной задаче в трехмерном пространственном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. Учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. М. : Высш. шк., 1990. 207 с.
2. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 400 с.
3. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Двумерный пространственный случай первой краевой задачи для смешанного оператора теплопроводности // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23) : материалы VIII Междунар. конф. Улан-Удэ : Изд-во ВСГУТУ, 2023. С. 241–244.
4. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Численное решение смешанного уравнения теплопроводности в двумерном пространственном случае // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения : материалы Междунар. науч. конф. Ташкент : Изд-во Нац. ун-та Узбекистана, 2023. С. 194–196.
5. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024663689.
6. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024667486.

Пластинина Валентина Михайловна
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ)
E-mail: plastininav@yandex.ru.



ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ХАРАКТЕРНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ СКАЧКОВ НА ГРАНИЦЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА В ОДНОЙ ИЗВЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2024 г. В. С. ТОРОСЯН, А. В. ПОГОСЯН

Аннотация. Рассмотрена известная задача теории упругости для прямоугольной области, когда стороны прямоугольника нагружены только частично равномерно распределенными симметрическими усилиями. Исследуются характерные изменения скачков напряжений, возникающие на границах прямоугольника. Вычислены и выявлены качественные и количественные закономерности изменения скачков напряжений в зависимости от геометрических и физических параметров задачи с помощью новых методов ускорения сходимости рядов Фурье, в типичных случаях граничных условий рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: упругий прямоугольник, вычисление разрывов напряжений, качественные закономерности изменения скачков.

AMS Subject Classification: 70Q05, 93C95, 74-10

1. Введение. В статье [7] предложен способ, который дает возможность найти все те точки на границе упругого тела, где напряжения могут иметь разрывы. Эффективность подхода показано на решении известной задачи о растягивании квадратной пластинки симметричной нагрузкой расположенной по некоторому участку. Важно отметить, что достоверность и точность результатов многих традиционных методов исследования граничных задач теории упругости для прямоугольника [1, 2, 6, 7, 11] (подробный обзор см. [4, 10]) апробированы на решении этой задачи. Настоящая работа, как естественное продолжение статьи [7], ставит целью выяснить качественные закономерности изменения скачков напряжений на границе прямоугольника в зависимости от геометрических и физических характеристик поставленной задачи. Если учесть, что методы вычисления скачков функции посредством конечного количества её коэффициентов Фурье предложены лишь недавно, естественно в вышеуказанных работах такой вопрос не ставился.

2. Постановка задачи и решение. Рассмотрим задачу растяжения прямоугольной пластинки, граничные стороны которой частично нагружены только симметричным образом равномерно распределенными нормальными силами интенсивности q_1, q_2 (см. рис. 1).

В работе [6] показано, что решение данной краевой задачи, которое при отсутствии массовых сил определяется из следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \nabla^2 (X_x + Y_y) = 0 \\ \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

можно представить разными способами в виде двойных тригонометрических рядов, в частности (см. также [7]),

$$X_x(x, y) = \frac{1}{4}A_{00} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j} \cos(\beta_j y) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \cos(\alpha_i x) \cos(\beta_j y) \quad (1)$$

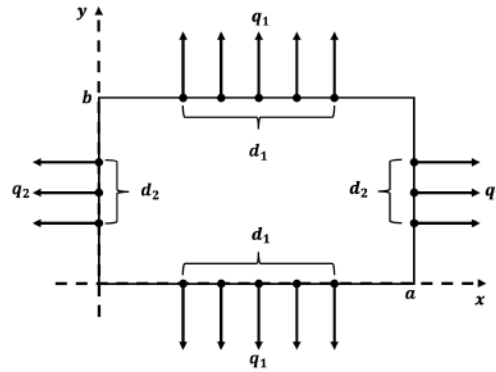


Рис. 1. Схематическое представленные задачи.

$$Y_y(x, y) = \frac{1}{4} B_{00} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} B_{i0} \cos(\alpha_i x) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} B_{ij} \cos(\alpha_i x) \cos(\beta_j y), \quad (2)$$

и

$$X_y(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ij} \sin(\alpha_i x) \sin(\beta_j y) \quad (3)$$

где

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \beta_j = \frac{j\pi}{b}.$$

Коэффициенты разложения A_{ij} , B_{ij} и C_{ij} в силу симметрии граничных условий определяются из следующей совокупности бесконечных систем линейных уравнений:

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} \omega_{ij} \right) X_i + \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} \omega_{ij} Y_j = \delta_{i0} R_i, \quad i = 2, 4, \dots, \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} \nu_{ij} \right) Y_j + \sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} \nu_{ij} X_i = \delta_{0j} Q_j, \quad j = 2, 4, \dots \quad (5)$$

где

$$\delta_{ij} = \alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2, \quad \omega_{ij} = \left(\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ij}} \right)^2, \quad \nu_{ij} = \left(\frac{\delta_{0j}}{\delta_{ij}} \right)^2$$

$$R_i = \frac{4q_1 d_1}{a i \pi} \cos \frac{i\pi}{2} \sin \frac{i\pi d_1}{2a}, \quad i = 2, 4, \dots,$$

$$Q_j = \frac{4q_2 d_2}{a j \pi} \cos \frac{j\pi}{2} \sin \frac{j\pi d_2}{2b}, \quad j = 2, 4, \dots$$

Легко заметить, что совокупность бесконечных систем (4)-(5) регулярна. При подстановке $X_i = \alpha_i X_i^*$ и $Y_j = \beta_j Y_j^*$ она приводятся к вполне регулярной (см. [6]). Это значит, что коэффициенты разложения двойных тригонометрических рядов (1)-(3) можно вычислить с очень высокой точностью (см. [3]). Свободные члены определяются точно и имеют вид

$$B_{00} = 4q_1 d_1 / a, \quad A_{00} = 4q_2 d_2 / b.$$

Кроме того, из постановки задачи также следует, что тангенциальные напряжения по краям прямоугольника $X_y(x, y) = 0$ и в дальнейшем рассматривать не будем.

3. Вычисление значений разрывов напряжений на границе прямоугольника. Очевидно, в силу того что граничные условия заданы симметрично относительно обеих осей симметрии прямоугольника для выяснения характерных закономерности изменения скачков зависимости от геометрических и физических параметров задачи достаточно исследовать характерные изменения разрывов напряжения $X_x(x, 0)$. При проведении вычислительных экспериментов выбраны различные группы типичных случаев граничных условий рассматриваемой краевой задачи. Разрывы (скачки) A_1 и A_2 нормальных напряжений $X_x(x, 0)$ вычислялись путем, предложенным в работах [5,8,9,12]. Результаты численных расчетов $|A_1|$ для двух наиболее характерных случаев граничных условий, приведены в таблицах 1 и 2 и в графиках 2 и 3.

ТАБЛИЦА 1. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$; $b = 1$; $d_1 = 0.5a$; $d_2 = 0.5b$; $q_2 = 0.5$ и для различных q_1 .

	$q_1 = 0.25$	$q_1 = 0.5$	$q_1 = 1$
$n = 64$	0.1174	0.2347	0.4694
$n = 128$	0.1149	0.2299	0.4598
$n = 256$	0.1137	0.2275	0.4550

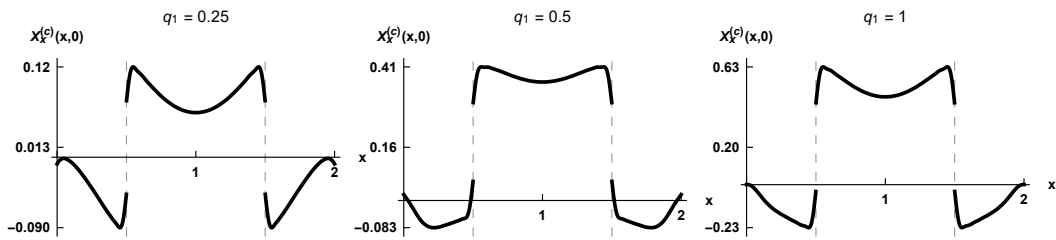


Рис. 2. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ (ускоренный ряд) для значений параметров представленных в Таблице 1 при $n = 64$.

ТАБЛИЦА 2. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$; $b = 1$; $d_1 = 0.5a$; $d_2 = 0.5b$; $q_1 = 0.5$ и для различных q_2 .

	$q_2 = 0.25$	$q_2 = 0.5$	$q_2 = 1$
$n = 64$	0.4694	0.4694	0.4694
$n = 128$	0.4598	0.4598	0.4598
$n = 256$	0.4550	0.4550	0.4550

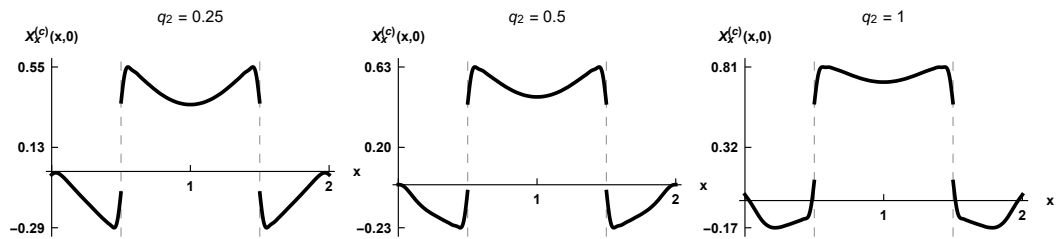


Рис. 3. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ (ускоренный ряд) для значений параметров представленных в Таблице 2 при $n = 64$.

4. Основные выводы. По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы. Для данной геометрии прямоугольника, абсолютные значения разрывов A_1, A_2 напряжения $X_x(x, 0)$ равны друг другу и зависят лишь от интенсивности q_1 силовой нагрузки $Y_y(x, 0)$, заданной на этой же стороне прямоугольника. Оно не чувствительно к изменениям других параметров задачи d_1, d_2, q_2 . Далее, между абсолютным значением разрыва и интенсивности q_1 имеет место линейная зависимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // Прикладная математика и механика. 1957. 21, № 1. С. 89–101.
2. *Гринберг Г. Л., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С.* Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функций и ее нормальной производной // Прикладная математика и механика. 1953. 17, № 1. С. 73–87.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М. : Физматгиз, 1962. 709 с.
4. *Мелешко В. В.* Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2004. 47, № 3. С. 45–63.
5. *Нерсесян А. Б.* Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций // Доклады НАН Армении. 2004. 104, № 4. С. 273–278.
6. *Тодоров М. М.* О решении плоской задачи для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 185–192.
7. *Торосян В. С., Погосян А. В.* О выяснении особенностей напряжений на границе прямоугольной области водной задаче теории упругости // Доклады НАН Армении. 2023. 123, № 1. С. 21–29.
8. *Barkhudaryan A., Barkhudaryan R., Poghosyan A.* Asymptotic behavior of Eckhoff's method for Fourier series convergence accelerations // Analysis in Theory and Applications. 2007. 23, № 3. P. 228–242.
9. *Eckhoff K. S.* Accurate reconstruction of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions // Mathematics of Computation. 2011. 64, № 210. P. 671–690.
10. *Meleshko V. V.* Biharmonic problem in a rectangle // Flow, Turbulence and Combustion. 1997. 58. P. 217–249.
11. *Meleshko V. V.* Equilibrium of elastic rectangle. Matheau-Ingليس-Pickette solution revisited // Journal of Elasticity. 1995. 40, № 3. P. 207–238.
12. *Poghosyan A.* On an auto-correction phenomenon of the Krylov-Gottlieb-Eckhoff method // IMA Journal of Numerical Analysis. 2011. 31, № 2. P. 512–527.

Торосян Вардан Стёпаевич
Институт механики НАН Армении
E-mail: vtorosyan99@gmail.com

Погосян Арнак Валериевич
Институт математики НАН Армении
E-mail: arnak@instmath.sci.am



О РАЗРЕШИМОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2024 г. М. В. ФАЛАЛЕЕВ, И. В. ЗАХАРОВА

Аннотация. Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащие малый параметр при одной из старших производных. Устанавливается связь между решением сингулярно возмущенной подобным способом задачи и решениями предельной системы, в которой параметр возмущения обращается в ноль. Исследовано влияние матричного пучка, составленного из коэффициентов уравнений системы, на разрешимость как исходной, так и предельной задач. На этой основе сформулированы достаточные условия для предельного перехода по параметру от возмущенной системы к предельной. Векторно-матричными методами получены явные формулы для решений рассматриваемых задач.

Ключевые слова: малый параметр, задача Коши, предельная задача, матричный пучок, индекс регулярности.

AMS Subject Classification: 35A20

1. Введение. При исследовании дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр (возмущение), возникает вопрос о соотношении между решениями исходной (возмущенной) задачи и предельной (когда малый параметр обращается в ноль). Иначе говоря, можно ли, исходя из решения предельной задачи, получить хотя бы приближенно решение возмущенной задачи. В регулярном случае это возможно. В сингулярном случае, например, для дифференциальных уравнений в частных производных обращение в ноль малого параметра в главной части может, не изменив порядок уравнения, поменять его тип, что, в свою очередь, может привести к существенному различию свойств решений обеих задач, как следствие невозможность предельного перехода между ними. В данной работе выделены класс сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, для которых возможен предельный переход по параметру.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\sum_{j=1}^n \left(b_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right) = h_i(x, t), \quad (1)$$

$$u_i(x, 0, \epsilon) = f_i(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = g_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $u_i(x, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, $f_i(x) \in C^1(R)$, $g_i(x) \in C(R)$, $f_i(x)$ и $g_i(x)$ абсолютно интегрируемы на R , $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр.

Задачу (1)–(3) можно переписать в следующей векторно-матричной форме:

$$\mathbb{B} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \mathbb{A} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \bar{h}(x, t),$$

$$\bar{u}(x, 0, \epsilon) = \bar{f}(x), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \bar{g}(x),$$

здесь $\mathbb{B} = \|b_{ij}\|$, $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|$,

$$\bar{u}(x, t, \epsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x, t, \epsilon) \\ u_2(x, t, \epsilon) \\ \vdots \\ u_n(x, t, \epsilon) \end{pmatrix}, \quad \bar{h}(x, t) = \begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ h_2(x, t) \\ \vdots \\ h_n(x, t) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Очевидно разрешимость задачи (1)–(3) зависит как от свойств дифференциального оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right)$, так и от свойств матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$. Отследить влияние каждого из этих факторов является одной из задач данного исследования. При этом для матричного пучка $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ возможны два существенно разных случая: обратимости и необратимости матрицы \mathbb{B} . Наша финальная цель это установить связь между решениями исходной (возмущенной) задачи (1)–(3) и предельной (при $\epsilon = 0$) задачи (1)–(2), а также получить условия существования этих решений.

3. Случай обратимости матрицы \mathbb{B} . Пусть в матричном пучке $(\lambda \mathbb{B} + \mathbb{A})$ матрица \mathbb{B} обратима, тогда без ограничения общности можно считать ее единичной $\mathbb{B} = \mathbb{E}_n$.

Известно (см. [3]), что для любой квадратной матрицы \mathbb{A} размерности n существует невырожденная матрица \mathbb{T} такая, что

$$\mathbb{T} \mathbb{A} \mathbb{T}^{-1} = \mathbb{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{E}_{q_1} + \mathbb{N}_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{E}_{q_2} + \mathbb{N}_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu \mathbb{E}_{q_\mu} + \mathbb{N}_{q_\mu} \end{pmatrix} = \quad (4)$$

$$= \text{diag}\{\lambda_1 \mathbb{E}_{q_1} + \mathbb{N}_{q_1}, \lambda_2 \mathbb{E}_{q_2} + \mathbb{N}_{q_2}, \dots, \lambda_\mu \mathbb{E}_{q_\mu} + \mathbb{N}_{q_\mu}\},$$

здесь $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = n$, индекс q_i при единичных квадратных матрицах \mathbb{E}_{q_i} и при жордановых нильпотентных блоках \mathbb{N}_{q_i} означает их размерность q_i ,

$$\mathbb{N}_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad \mathbb{N}_{q_i}^{q_i} = \mathbb{O}_{q_i}. \quad (5)$$

Относительно матрицы \mathbb{A} будем предполагать выполненным следующее условие

A) $\det \mathbb{A} \neq 0$ и все ее собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ положительны.

При выполнении условия **A)**, невырожденной заменой переменных $\bar{v} = \mathbb{T} \bar{u}$, задача (1)–(3) приводится к следующему блочно-диагональному виду

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \mathbb{J}_n \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \bar{H}(x, t), \quad (6)$$

$$\bar{v}(x, 0, \epsilon) = \bar{F}(x) = \mathbb{T} \bar{f}(x), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \bar{G}(x) = \mathbb{T} \bar{g}(x), \quad (8)$$

$$\bar{H}(x, t) = \mathbb{T} \bar{h}(x, t),$$

т. е. распадается на μ независимых систем уравнений гиперболического типа (в соответствии с жордановыми «ящичками» $(\lambda_i \mathbb{E}_{q_i} + \mathbb{N}_{q_i})$). Рассмотрим первый блок из g_1 уравнений системы

(6)–(8) (остальные блоки исследуются аналогично)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + v_2 = H_1(x, t), \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) + v_3 = H_2(x, t), \\ \dots \\ \frac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{q_1-1}}{\partial t} \right) + v_{q_1} = H_{q_1-1}(x, t), \\ \frac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} \right) = H_{q_1}(x, t), \end{array} \right. \quad (9)$$

Решая последнее q_1 -е уравнение этой системы (например, по методике работы [4]), находим

$$\begin{aligned} v_{q_1}(x, t, \epsilon) &= M \left(x, t, \lambda_1, F_{q_1}(x), G_{q_1}(x), H_{q_1}(x, t) \right) = \\ &= \exp \left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon} \right) \left\{ \frac{F_{q_1} \left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \right) + F_{q_1} \left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \right)}{2} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}}^{\frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}} \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2} \right) \left(\sqrt{\lambda_1 \epsilon} G_{q_1}(x - \xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}} F_{q_1}(x - \xi) \right) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{i} \mathcal{J}_1 \left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2} \right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_1} t}{2\sqrt{\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}} F_{q_1}(x - \xi) \right] d\xi \right\} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 \epsilon}} \int_0^t \exp \left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{2\epsilon} \right) \int_{x-\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}}^{x+\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}} \mathcal{J}_0 \left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{(t-\tau)^2 - \lambda_1 \epsilon (x-\xi)^2} \right) H_{q_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

здесь $\mathcal{J}_0(ix)$ и $\frac{1}{i}\mathcal{J}_1(ix)$ функции Бесселя нулевого и первого порядка мнимого аргумента.

Справедливо предельное равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_{q_1}(x, t, \epsilon) &= M_0 \left(x, t, \lambda_1, F_{q_1}(x), H_{q_1}(x, t) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_1} \alpha}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda_1 \alpha (x-\xi)^2}{4t} \right) F_{q_1}(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi \lambda_1 \alpha (t-\tau)}} \exp \left(-\frac{\lambda_1 \alpha (x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right) H_{q_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau = v_{q_1}^0(x, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $v_{q_1}^0(x, t)$ является решением предельной задачи для последнего q_1 -го уравнения системы (9).

Решая $(q_1 - 1)$ -е уравнение системы (9) по формуле (10), находим

$$v_{q_1-1}(x, t, \epsilon) = M \left(x, t, \lambda_1, F_{q_1-1}(x), G_{q_1-1}(x), H_{q_1-1}(x, t) - v_{q_1}(x, t, \epsilon) \right)$$

и после предельного перехода по формуле (11)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_{q_1-1}(x, t, \epsilon) = M_0 \left(x, t, \lambda_1, F_{q_1-1}(x), H_{q_1-1}(x, t) - v_{q_1}^0(x, t) \right) = v_{q_1-1}^0(x, t)$$

получаем решение предельной задачи для $(q_1 - 1)$ -го уравнения системы (9) и т. д.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Если в матричном пучке $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B} = \mathbb{E}_n$ единичная, а для матрицы \mathbb{A} выполнено условие **A**), то для решения задачи (1)–(3) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \bar{u}(x, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \mathbb{T}^{-1} \bar{v}(x, t, \epsilon) = \mathbb{T}^{-1} \bar{v}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t),$$

где $\bar{u}^0(x, t)$ – решение предельной ($\epsilon = 0$) задачи (1)–(2).

4. Случай необратимости матрицы \mathbb{B} . В этом случае будем предполагать, что матричный пучок $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ регулярен (см. [2, 5]), т. е. $\det(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A}) \neq 0$, тогда существует пара невырожденных матриц \mathbb{P} и \mathbb{Q} размерности n такие, что (см. [2, 5])

$$\mathbb{P}(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})\mathbb{Q} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{N}_{n-d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{E}_{n-d} \end{pmatrix},$$

где \mathbb{E}_d и \mathbb{E}_{n-d} единичные квадратные матрицы, $\mathbb{O}_{d \times (n-d)}$ и $\mathbb{O}_{(n-d) \times d}$ нулевые прямоугольные матрицы указанных размерностей, $\mathbb{N}_{n-d} = \text{diag}\{\mathbb{N}_{m_1}, \mathbb{N}_{m_2}, \dots, \mathbb{N}_{m_j}\}$, \mathbb{N}_{m_i} – жордановы нильпотентные блоки размерности m_i , (см. (5)), $n-d = m_1 + m_2 + \dots + m_j$, величину $\tilde{m} = \max\{m_1, m_2, \dots, m_j\}$ называют индексом регулярности (см. [2, 5]) матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$, \mathbb{J}_d – квадратная матрица размерности d жордановой структуры см. (4), в обозначениях формулы (4) $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = d$. Если $\det \mathbb{A} \neq 0$, то все $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, \mu$.

Итак, относительно матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ будем предполагать выполненным условие **B**) пучок $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ регулярен, $\det \mathbb{A} \neq 0$ и все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ положительны.

При выполнении условия **B**) невырожденной заменой $\bar{u} = \mathbb{Q}\bar{v}$ задача (1)–(3) приводится к блочно-диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{N}_{n-d} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d \times (n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d) \times d} & \mathbb{E}_{n-d} \end{pmatrix} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \tilde{H}(x, t), \quad (12)$$

$$\bar{v}(x, 0, \epsilon) = \tilde{F}(x) = \mathbb{Q}^{-1} \bar{f}(x), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \tilde{G}(x) = \mathbb{Q}^{-1} \bar{g}(x), \quad \tilde{H}(x, t) = \mathbb{P} \bar{h}(x, t). \quad (13)$$

Первые d уравнений системы (12) имеют такой же блочный вид, как система (6), поэтому в силу теоремы 1 для них задача (12)–(13) обладает предельным свойством. Оставшиеся $(n-d)$ уравнений системы (12) распадаются на j независимых блоков. Как и выше для системы (6)–(8), исследуем один из блоков, а именно последний j -й, остальные исследуются аналогично.

Выпишем подсистему из последних m_j уравнений системы (12):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_{n-m_j+2}}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{n-m_j+1}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x, t), \\ \dots \\ \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{n-1}}{\partial t} \right) = \tilde{H}_{n-1}(x, t), \\ - \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) = \tilde{H}_n(x, t). \end{cases} \quad (14)$$

Решением последнего уравнения системы (14) является функция

$$v_n(x, t, \epsilon) = \tilde{M} \left(x, t, \tilde{F}_n(x), \tilde{G}_n(x), \tilde{H}_n(x, t) \right) = \quad (15)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha}{\epsilon} (t - \tau) \right) \right) \tilde{H}_n(x, \tau) d\tau + \\ + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha}{\epsilon} t \right) \right) \left(\tilde{G}_n(x) + \frac{\alpha}{\epsilon} \tilde{F}_n(x) \right) + \exp \left(-\frac{\alpha}{\epsilon} t \right) \tilde{F}_n(x).$$

В результате предельного перехода

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_n(x, t, \epsilon) = \tilde{M}_0 \left(x, t, \tilde{F}_n(x), \tilde{H}_n(x, t) \right) = \tilde{F}_n(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \tilde{H}_n(x, \tau) d\tau = v_n^0(x, t) \quad (16)$$

получаем решение предельного (при $\epsilon = 0$) уравнения (для последнего уравнения системы (14)).

Решением предпоследнего уравнения системы (14) в соответствии с формулой (15) является функция

$$v_{n-1}(x, t, \epsilon) = \tilde{M} \left(x, t, \tilde{F}_{n-1}(x), \tilde{G}_{n-1}(x), \tilde{H}_{n-1}(x, t) - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right),$$

т. е. для разрешимости системы (14) требуется повышенная гладкость по пространственной переменной от входных данных задачи (1)–(3), а именно, $f_i(x), g_i(x), h(x, t) \in C^{2(\tilde{m}-1)}(R)$, где \tilde{m} — индекс регулярности матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ (см. [2, 5]). После предельного перехода в соответствии с формулой (16) получаем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v_{n-1}(x, t, \epsilon) = \tilde{M}_0 \left(x, t, \tilde{F}_{n-1}(x), \tilde{H}_{n-1}(x, t) - \frac{\partial^2 v_n^0}{\partial x^2} \right) = v_{n-1}^0(x, t)$$

решение предельной задачи для предпоследнего уравнения системы (14) и т. д.

Таким образом доказана

Теорема 2. Если для матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ выполнено условие **В**), $f_i(x), g_i(x), h(x, t) \in C^{2(\tilde{m}-1)}(\mathbb{R}^1)$, где \tilde{m} — индекс регулярности матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$, то для решения задачи (1)–(3) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{u}(x, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{Q}\bar{v}(x, t, \epsilon) = \mathbb{Q}\bar{v}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t),$$

где $\bar{u}^0(x, t)$ — решение предельной ($\epsilon = 0$) задачи (1) – (2).

Замечание 1. Повышенная гладкость на входные данные задачи является проявлением свойства необратимости матрицы \mathbb{B} . В случае нарушения этих условий задача (1)–(3) окажется неразрешимой в данных условиях, но можно ставить вопрос о ее разрешимости в пространстве распределений [1].

Замечание 2. Очевидно для разрешимости предельной задачи условие (3) не нужно.

Замечание 3. Изложенная методика применима к исследованию задачи Дирихле в полупространстве $t > 0$ для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\sum_{j=1}^n \left(b_{ij} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right) + a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right) = h_i(x_1, x_2, t),$$

$$u_i(x_1, x_2, 0, \epsilon) = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $u_i(x_1, x_2, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, $f_i(x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}^2)$, $f_i(x_1, x_2)$ абсолютно интегрируемы на \mathbb{R}^2 , $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр, $\lim_{(x_1, x_2, t) \rightarrow \infty} |u_i(x_1, x_2, t)| < +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979. 320 с.
2. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М. : Наука, 1977. 304 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 552 с.
4. Захарова И. В., Фалалеев М. В. О некоторых системах дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в главной части // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2024. 234. С. 50–58.
5. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск : Наука, 2003. 320 с.

Фалалеев Михаил Валентинович

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: mvfalaleev@gmail.com

Захарова Ирина Валентиновна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: zair@math.isu.ru



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛАСТИН.

© 2024 г. В. Н. ХАНХАСАЕВ, С. А. БАИРОВ

Аннотация. Рассматривается математическая модель и конечно-разностная схема процесса нагрева пластины, ограниченной по двум пространственным переменным. Приводятся недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для данного случая и обоснование использования смешанного уравнения. В неявной разностной схеме применяется интегро-интерполяционный метод для уменьшения погрешностей. Источник тепла в параболической части нелинейного уравнения равен 0, а на гиперболической этапе начинается резкий нагрев. Поставлена и численно решена математическая модель со смешанными краевыми условиями первого и третьего рода.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения, метод конечных разностей, третье краевое условие, тепловой баланс, уравнения смешанного типа.

AMS Subject Classification: 65M06, 80-10

1. Введение. Известно, что распространение тепла, описываемое линейным уравнением параболического типа, осуществляется с бесконечной скоростью [2]- [5], что следует из любого фундаментального решения линейного уравнения теплопроводности. Для преодоления этого парадокса еще Максвелл [12] выдвинул гипотезу о том, что распространение тепла имеет не только диффузионный характер, но и волновой. В соответствии с этим, Каттанео [11] в классическом законе Фурье о пропорциональности теплового потока антиградиенту температуры, выражающем диффузионный характер распространения тепла, добавил слагаемое в виде производной теплового потока по времени, выражающее волновой характер распространения тепла

$$q(x, t) = -\lambda \text{grad}T(x, t) - \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где q — плотность теплового потока, λ — коэффициент теплопроводности, τ — время, в течение которого устанавливается термодинамическое равновесие между градиентом температуры и тепловым потоком (время релаксации теплового потока), T — температура, t — время, x — одномерная пространственная переменная.

Уравнение теплопроводности на основе закона (1) является уравнением гиперболического типа и имеет волновой характер с конечной скоростью распространения тепла с учетом затухания

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(a \cdot \text{grad}T),$$

где $a = \lambda/c\rho$ — коэффициент температуропроводности, где c — удельная теплоёмкость, ρ — удельная плотность.

2. Постановка задачи. Дана ограниченная пластина, размер которой по оси x равен X а по оси y равен Y . Начальное распределение температуры в пластине задается некоторой функцией $u_0(x, y)$, на границах пластины слева и справа ($x = 0, x = X$) условия первого рода температура равна $u_l(x)$ и $u_r(x)$ соответственно, на границах снизу и сверху ($y = 0, y = Y$) условия третьего рода температура среды равна $u_d(y)$ и $u_u(y)$.

Заданы теплофизические характеристики: $c_v, \lambda, \rho, \alpha_d$ и α_u -соответственно, удельная теплоемкость при постоянном объеме, коэффициент теплопроводности, удельная плотность и коэффициент теплопередачи в законе Ньютона снизу и сверху пластины. Для постановки задачи и численного расчета в пакете программирования MAtHcad-15 конкретизируем значения параметров.

Постановка начально-краевой задачи: Найти температурное поле в указанной пластине с $X = \pi$ и $Y = \pi$ и временами расчета: $T_1 = -5, T_2 = 2$, - для дифференциального уравнения со следующими краевыми и начальными условиями:

$$k(x, t)u_{tt} + c_v(x, t) \cdot \rho(x, t)u_t = (\lambda(u, x, y, t)u_x)_x + (\lambda(u, x, y, t)u_y)_y + c(x, y, t)u + f(x, y, t),$$

$$x = 0 : u(0, y, t) = u_l,$$

$$x = X : u(X, y, t) = u_r,$$

$$y = 0 : -\lambda(u, x, 0, t) \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} + \alpha_d u(x, 0, t) = u_d,$$

$$y = Y : \lambda(u, x, Y, t) \frac{\partial u(x, Y, t)}{\partial x} + \alpha_u u(x, Y, t) = u_u,$$

$$u(x, y, t)|_{t=T_1} = u_0(x, y),$$

где u_l, u_r — температура на левой и на правой стороне пластины, u_d, u_u — температура на нижней и на верхней стороне пластины, а α_d, α_u — коэффициенты теплоотдачи на нижней и на верхней стороне пластины.

3. Разностная схема. Разностная схема для двумерного случая для прогонки по оси x выглядит так:

$$\begin{aligned} k(x_i, y_r, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,r,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,r,j} + u_{i,r,j-\frac{1}{2}}}{\tau^2} + a(x_i, y_r, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,r,j+\frac{1}{2}} - u_{i,r,j}}{\tau} = \\ = (\lambda(u_{i,r,j+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, y_r, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i+1,r,j+\frac{1}{2}} - u_{i,r,j+\frac{1}{2}}}{hx} - \\ - \lambda(u_{i,r,j+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, y_r, t_{j+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,r,j+\frac{1}{2}} - u_{i-1,r,j+\frac{1}{2}}}{hx}) \frac{1}{hx} + \\ + c(x_i, y_r, t_{j+\frac{1}{2}}) u_{i,r,j+\frac{1}{2}} + f(x_i, y_r, t_{j+\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

для прогонки по оси y :

$$\begin{aligned} k(x_i, y_r, t_{j+1}) \frac{u_{i,r,j+1} - 2u_{i,r,j+\frac{1}{2}} + u_{i,r,j}}{\tau^2} + a(x_i, y_r, t_{j+1}) \frac{u_{i,r,j+1} - u_{i,r,j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \\ = (\lambda(u_{i,r,j+1}, x_i, y_{r+\frac{1}{2}}, t_{j+1}) \frac{u_{i,r+1,j+1} - u_{i,r,j+1}}{hy} - \\ - \lambda(u_{i,r,j+1}, x_i, y_{r-\frac{1}{2}}, t_{j+1}) \frac{u_{i,r,j+1} - u_{i,r-1,j+1}}{hy}) \frac{1}{hy} + \\ + c(x_i, y_r, t_{j+1}) u_{i,r,j+1} + f(x_i, y_r, t_{j+1}). \end{aligned}$$

4. Заключение. Задача численно решена в пакете Mathcad-15 с использованием интегро-интерполяционного метода с использованием квазилинейной схемы [1] и локально-одномерной схемы [6]. Результаты для бесконечной пластины с переменной y в качестве параметра приводятся в виде графиков и таблиц в работе [7] и получены свидетельства на государственную регистрацию программ [8]- [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. Учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. М. : Высш. шк., 1990. 207 с.
2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М. : Высш. шк., 2001. 550 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высш. школа, 1967. 599 с.
4. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987. 490 с.
5. Соболев С. Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физических наук. 1991. 161, № 3. С. 5—29.
6. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 400 с.
7. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2024. № 1. С. 37-45.
8. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. «Программа численного решения второй краевой задачи для гиперболо-параболического уравнения теплопроводности для неограниченной пластины» от 25.06.2024. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024663079.
9. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. «Программа численного решения третьей краевой задачи для гиперболо-параболического уравнения для неограниченной пластины с нелинейным коэффициентом теплопроводности» от 11.07.2024. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024665453.
10. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. М. : Едиториал УРСС, 2004. 290 с.
11. Cattaneo C. Sulla conduzione de calore // Atti del seminario matematico e. fisico dell'Universita di Modena. 1948. № 3.
12. Maxwell S. C. On the dynamical theory of gases // Philosophical transactions of the Royal Society of London. 1867. № 157. P. 49-88.

Ханхасаев Владислав Николаевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ),

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова (БГУ)

E-mail: hanhvladnick@mail.ru

Баиров Сафрон Анатольевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ)

E-mail: bairov.sofron@gmail.com.



ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

© 2024 г. В. Н. ХАНХАСАЕВ, С. И. МУНЯЕВ

Аннотация. Рассматривается вычислительная модель для смешанного нелинейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. Эта ММ моделирует процесс коммутационного отключения электрической дуги с добавлением периода устойчивого горения её до момента отключения и заменой строго гиперболического уравнения теплопроводности гипербола-параболическим. При этом численный расчет задачи ведется в пакете программирования MathCad-15 по неявной разностной схеме методом теплового баланса.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения смешанного типа, неявная разностная схема, третье краевое условие, метод теплового баланса.

AMS Subject Classification: 65M06, 80-10

1. Введение. В кратковременных переходных процессах высоковольтных электрических сетей с очевидной нестационарностью, классические параболические модели теплопроводности, основанные на обычной гипотезе Фурье, создают грубые искажения температурных полей, т. е. классические гипотезы о пропорциональности плотности потока тепла вектору градиента температуры приводят к бесконечной скорости распространения возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания. Для разрешения этого парадокса: в рамках теории газодинамики Дж. Максвелл [7], массообмена А. В. Лыков [2]; теплопроводности К. Каттанео [6] и П. Вернотте [8]) из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности времени соударения молекул и представления о их длине свободного пробега, получили новый обобщённый закон тепломассопереноса, в котором фигурирует дополнительный элемент, так называемое время релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между потоком и градиентом потенциала. При этом выводится уравнение тепломассопереноса гиперболического типа [5].

2. Постановка начально-краевой задачи. Продолжая эти исследования, рассмотрим нелинейное уравнение смешанного типа в частных производных второго порядка:

$$k(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + c(x, t)u(x, t) + bu^r(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

в области $G = [0, L] \times [-T_1, T_2]$, здесь при $t \leq 0$, $k(x, t) = 0$, а для $t > 0$, $k(x, t) > 0$, $\lambda(x, t)$ — коэффициент теплопроводности, $k(x, t)$ — коэффициент тепловой релаксации, $f(x, t)$ — переменный по пространственной и временной координатам внутренний источник тепла, $r > 1$ — целый параметр законов излучения.

Постановка начально-краевой задачи: найти решение уравнения (1) при выполнении следующих краевых условий третьего рода и начального профиля температуры $u_0(x)$:

$$\left[\mp \lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_{0,L} u(x, t) \right]_{x=0,L} = q_{0,L}(t), t \in [-T_1, T_2], \quad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \quad (3)$$

где $\alpha_{0,L}$ и $q_{0,L}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня [5].

3. Численное решение. Для численного расчета поставленной задачи в пакете MathCad-15 зададим конкретные значения коэффициентов уравнения (1):

$$k(x, t) = k \text{ при } t > 0, \quad a(x, t) = a > 0, \quad b > 0, \quad c(x, t) = c < 0, \quad \lambda(x, t) = x + 2.$$

Для полученного уравнения:

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(x + 2) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + cu(x, t) + bu^r(x, t) + f(x, t), \quad (4)$$

приведем пример одной из разностной схем, участвующих в методе прогонки:

$$k \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2} + a \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = \left[\lambda_{i+0.5} \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}}{h^2} - \lambda_{i-0.5} \frac{U_i^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right] + cU_i^{j+1} + b(U_i^{j+1})^r + f(ih, (j+1)\tau), \quad (5)$$

где расчет ведется по квазилинейной методике, описанной в [1] для нелинейных уравнений.

4. Заключение. При численном решении поставленной задачи (2)–(4), по неявной конечно-разностной схеме в пакете программирования MathCad-15, широко применяемой в инженерной среде, получены температурные поля хорошо согласующиеся с имеющимися экспериментальными данными [3]–[?]. Разработанная методика будет применена к двумерному пространственному случаю и с более быстро сходящимися итерационными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена : учеб. пособие для теплофиз. и теплоэнергет. спец. М. : Высш. шк., 1990. 207 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М. : Высш. шк., 1967. 599 с.
3. Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Численное решение третьей краевой задачи для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности // Вестник Бурятского государственного университета. Математика. Информатика. 2023.
4. Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Программа расчёта смешанного уравнения теплопроводности с переменным источником тепла и краевыми условиями третьего рода // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024664020. 2024.
5. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. М. : Едиториал УРСС, 2004. 290 с.
6. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // Comptes Rendus. 1958. № 4. P. 431–433.
7. Maxwell S. C. On the dynamical theory of gases // Philosophical transactions of the Royal Society of London. 1867. № 157. P. 49–88.
8. Vernotte P. The true heat equation // Comptes Rendus. 1958. № 22. P. 3154–3155.

Ханхасаев Владислав Николаевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ),

Бурятский государственный университет имени Д. Банзарова (БГУ)

E-mail: hanhvladnick@mail.ru.

Муняев Сергей Иннокентьевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ)

E-mail: sergmoon1986@mail.ru.



ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОМПЛЕКСОМ ДОЛЬБО

© 2024 г. А. А. ШЛАПУНОВ, А. Н. ПОЛКОВНИКОВ

Аннотация. Мы рассматриваем задачу Коши в полосе $\mathbb{C}^n \times [0, T]$, $n > 1$, $T > 0$, для системы нелинейных дифференциальных уравнений, структурно похожей на классические уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости. Основное отличие этой системы состоит в том, что она порождена не стандартными операторами градиента ∇ , дивергенции div и ротора rot , а многомерным оператором Коши-Римана $\bar{\partial}$ в \mathbb{C}^n , его формально сопряженным оператором $\bar{\partial}^*$ и комплексом совместности для $\bar{\partial}$, который обычно называется комплексом Дольбо. Схожесть структуры позволяет доказать для этой задачи теорему существования слабых решений и теорему об открытом отображении на шкале специально построенных пространств Бохнера – Соболева.

Ключевые слова: Комплекс Дольбо, обобщенные уравнения Стокса и Навье – Стокса, эллиптико-параболические операторы.

AMS Subject Classification: 35Qxx, 35Kxx, 35Nxx

1. Обобщенные операторы Стокса и Навье – Стокса. Уравнения Навье – Стокса, см., например, работу [2] или монографии [1], [9] и библиографию к ним, на протяжении многих десятилетий остаются вызовом для как математиков-теоретиков, так и для специалистов по прикладной математике и гидродинамике. В работе [3] была предложена более общая задача, в рамках теории дифференциальных комплексов, а в работе [6] эта задача была рассмотрена для комплекса де Рама в \mathbb{R}^n , $n > 1$, на шкале специально построенных пространств Бохнера – Соболева (в первой степени комплекса соответствующая система совпадает с уравнениями Навье – Стокса для несжимаемой жидкости). Комплекс Дольбо на комплексном пространстве \mathbb{C}^n имеет много общих черт с комплексом де Рама, но отличается от него рядом важных особенностей – отсутствием, вообще говоря, конечномерности решений оператора в нулевой степени комплекса и субэллиптичности соответствующих задач Неймана (в то время как для комплекса де Рама решения в нулевой степени комплекса суть постоянные, а задачи Неймана эллиптичны).

Более точно, пусть $\bar{\partial}$ обозначает многомерный оператор Коши-Римана в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$, т. е. столбец дифференциальных операторов $(\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n)^T$, компоненты которого суть одномерные операторы Коши-Римана $\bar{\partial}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \iota \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} \right)$, где ι – мнимая единица. Аналогично оператору градиента в \mathbb{R}^n , оператор $\bar{\partial}$ естественным образом порождает комплекс совместности

$$0 \rightarrow C_{\Lambda^{0,0}}^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}^0} C_{\Lambda^{0,1}}^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}^1} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}^{n-1}} C_{\Lambda^{0,n}}^\infty \rightarrow 0,$$

где $\mathfrak{C}_{\Lambda^{p,q}}$ пространство внешних дифференциальных форм би-степени (p, q) относительно переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, $z_j = x_j + \iota x_{j+n}$, с коэффициентами класса \mathfrak{C} , а $\bar{\partial}^0 = \bar{\partial}$, $\bar{\partial}^{q+1} \circ \bar{\partial}^q = 0$, $0 \leq q \leq n-1$ см. [8, §1.2]. Обозначив через $(\bar{\partial}^q)^*$ – формально сопряженный оператор для $\bar{\partial}^q$, мы получаем набор сильно эллиптический операторов (обобщенных лапласианов комплекса Дольбо) $\Delta^q = (\bar{\partial}^q)^* \bar{\partial}^q + \bar{\partial}^{q-1} (\bar{\partial}^{q-1})^*$, $0 \leq q \leq n$, где, по умолчанию, $\bar{\partial}^{-1} = 0$, $\bar{\partial}^n = 0$.

В работе [3] была предложена конструкция обобщенных уравнений Навье – Стокса, ассоциированных с дифференциальными комплексами. С учетом уточнений [5], в данном контексте мы

Исследования поддержаны Красноярским математическим центром и профинансированы Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение No. 075-02-2024-1429).

рассматриваем следующую систему уравнений: по заданным $(0, q)$ -дифференциальной форме f на $\mathbb{C}^n \times [0, T]$ и $(0, q)$ -дифференциальной форме u_0 на \mathbb{C}^n найти $(0, q)$ -дифференциальную форму u и $(0, q - 1)$ дифференциальную форму p на $\mathbb{C}^n \times [0, T]$, удовлетворяющие

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu \Delta^q u + \mathcal{N}^q u + \bar{\partial}^{q-1} p = f \text{ в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{q-1})^* u = 0 \text{ в } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{q-2})^* p = 0 \text{ in } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ u(z, 0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \\ \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{C}^n} |u(z, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{j=1}^{2n} |\partial_j u(z, t)|^2 dx dt < +\infty; \end{cases} \quad (1)$$

здесь μ, T — фиксированные положительные числа, все формы зависят от параметра t , а \mathcal{N}^q — подходящий нелинейный оператор. Отметим, что сильная эллиптичность оператора Δ^q означает, что оператор $\partial_t + \mu \Delta^q$ сильно равномерно параболичесен по Петровскому. Что касается нелинейности \mathcal{N}^q , то мы ограничимся следующим случаем. Зафиксируем два билинейных дифференциальных оператора нулевого порядка с постоянными коэффициентами:

$$M_1^q : C_{\Lambda^{0, q+1}}^\infty \times C_{\Lambda^{0, q}}^\infty \rightarrow C_{\Lambda^{0, q}}^\infty, \quad M_2^q : C_{\Lambda^{0, q}}^\infty \times C_{\Lambda^{0, q}}^\infty \rightarrow C_{\Lambda^{0, q-1}}^\infty$$

и положим $\mathcal{N}^q u = M_1^q(\bar{\partial}^q u, u) + \bar{\partial}^{q-1} M_2^q(u, u)$.

Следуя классической схеме изучения уравнений Навье – Стокса, можно получить теорему о существовании слабых решений задачи (1) при дополнительных условиях на форму M_1^q . Именно, пусть $L_{\Lambda^{p, q}}^r$ обозначает пространство дифференциальных форм $u = \sum_{\#I=p} \sum_{\#J=q} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ би-степени (p, q) на \mathbb{C}^n с компонентами u_{IJ} в $L^r(\mathbb{C}^n)$; снабдим его нормой

$$\|u\|_{L_{\Lambda^{p, q}}^r} = \left(\sum_{\#I=p} \sum_{\#J=q} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |u_{IJ}(x)|^r dx \right)^{1/r}.$$

Аналогично вводятся пространства форм на \mathbb{C}^n с компонентами класса Соболева $W_{\Lambda^{p, q}}^{s, r}, H_{\Lambda^{p, q}}^s$. Далее, обозначим через $\mathcal{V}_{\Lambda^{0, q}}$ подпространство в $C_{0, \Lambda^{0, q}}^\infty$, состоящее из форм, удовлетворяющих $(\bar{\partial}^{q-1})^* u = 0$ в \mathbb{C}^n , а через \mathbf{H}_q^s — замыкание $\mathcal{V}_{\Lambda^{0, q}}$ в $H_{\Lambda^{0, q}}^s, s \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно, $(\mathbf{H}_q^s)'$ обозначает сильное сопряженное пространство к \mathbf{H}_q^s . Кроме того, если $I = [0, T], p \geq 1$, а \mathcal{B} пространство Банаха (функций на \mathbb{C}^n), то через $L^r(I, \mathcal{B})$ обозначим пространство Бохнера измеримых отображений $u : I \rightarrow \mathcal{B}$ с нормой

$$\|u\|_{L^r(I, \mathcal{B})} := \left\| \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{B}} \right\|_{L^r(I)}, \quad r \geq 1,$$

см., например, [9, гл. III, § 1]. Аналогично вводятся пространства $C(I, \mathcal{B})$, т. е. пространства всех отображений $u : I \rightarrow \mathcal{B}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C(I, \mathcal{B})} := \sup_{t \in I} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{B}}.$$

Теорема 1. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $s \leq n \leq (s + 1)$. Если

$$(M_1^q(\bar{\partial}^q w, v), v)_{L_{\Lambda^{0, q}}^2} = 0 \text{ для всех } v \in \mathcal{V}_{\Lambda^{0, q}}, \quad (2)$$

то для любой пары $(f, u_0) \in L^2(I, (\mathbf{H}_q^1)') \times \mathbf{H}_q^0$ найдется дифференциальная форма $u \in L^\infty(I, \mathbf{H}_q^0) \cap L^2(I, \mathbf{H}_q^1)$, удовлетворяющая

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u, v)_{L_{\Lambda^{0, q}}^2} + \mu(\bar{\partial}^q u, \bar{\partial}^q v)_{L_{\Lambda^{0, q+1}}^2} = \langle f - \mathcal{N}^q u, v \rangle_{\Lambda^{0, q}}, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

для всех $v \in \mathbf{H}_q^s$. Кроме того, $\partial_t u \in L^{\frac{4}{2n+2-2s}}(I, (\mathbf{H}_q^s)')$.

В целом доказательство вполне аналогично классическому, см., например, [1], [9]. Как обычно для уравнений типа Навье – Стокса, в этом случае не удается доказать теорему единственности

для слабых решений u уравнений (1), т. е. удовлетворяющих (3), а неизвестная форма p идентифицируется (аддитивно, с точностью до формы с постоянными коэффициентами) только в пространстве распределений с помощью информации о когомологиях комплекса Дольбо, ср. [6], [9]. Отметим также, что при $q = 1$ есть естественная нелинейность $\mathcal{N}^q u = \bar{\kappa}(\bar{\kappa}^1 u \wedge u) + \bar{\partial}^0 |u|^2$, структурно соответствующая форме Лэмба нелинейности, входящей в уравнения Навье – Стокса, и удовлетворяющая (2); здесь \star есть оператор Ходжа на дифференциальных формах, а $\bar{\kappa}v := \overline{(\star v)}$.

Для поиска более регулярных решений подобной задачи для комплекса де Рама в работе [6], была введена в рассмотрение шкала функциональных пространств Бохнера – Соболева, одна из модификаций которой была позднее использована при решении аналогичных задач для эллиптических дифференциальных комплексов на гладких компактных римановых многообразиях; она годится и для задачи (1). Более точно для $s, k \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$ множество всех «скоростей», т. е. $(0, q)$ -форм u из $C(I, \mathbf{H}_q^{k+2s}) \cap L^2(I, \mathbf{H}_q^{k+1+2s})$ таких, что

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u \in C(I, \mathbf{H}_q^{k+2s-|\alpha|-2j}) \cap L^2(I, \mathbf{H}_q^{k+1+2s-|\alpha|-2j}),$$

если $|\alpha| + 2j \leq 2s$. Мы снабдим пространство $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$ естественной нормой

$$\|u\|_{B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}} := \left(\sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|+2j \leq 2s} \|\partial_x^\alpha \partial_t^j u\|_{i,q,T}^2 \right)^{1/2},$$

где $\|u\|_{i,q,T} = \left(\|\nabla^i u\|_{C(I, L^2_{\Lambda^0,q})}^2 + \mu \|\nabla^{i+1} u\|_{L^2_{\Lambda^0,q}(I, L^2)}^2 \right)^{1/2}$.

Аналогично, для $s, k \in \mathbb{Z}_+$, пусть $B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$ состоит из всех «внешних сил», т. е. $(0, q)$ -форм f из $C(I, H_q^{2s+k}) \cap L^2(I, H_q^{2s+k+1})$ для которых при $|\alpha| + 2j \leq 2s$ верно, что

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j f \in C(I, H_q^k) \cap L^2(I, H_q^{k+1}).$$

Если $f \in B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$, то на самом деле

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j f \in C(I, H_q^{k+2(s-j)-|\alpha|}) \cap L^2(I, H_q^{k+1+2(s-j)-|\alpha|})$$

для всех α и j , удовлетворяющих $|\alpha| + 2j \leq 2s$. Мы снабдим пространство $B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$ естественной нормой

$$\|f\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}} = \left(\sum_{\substack{|\alpha|+2j \leq 2s \\ 0 \leq i \leq k}} \|\nabla^i \partial_x^\alpha \partial_t^j f\|_{C(I, L^2_q)}^2 + \|\nabla^{i+1} \partial_x^\alpha \partial_t^j f\|_{L^2(I, L^2_q)}^2 \right)^{1/2}.$$

Наконец, зафиксируем функцию $h_0 \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} h_0(x) dx = 1,$$

и определим пространство $B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2s,s}$ для «давления» p как состоящее из всех $(0, q-1)$ -форм из $C(I, H_{\text{loc},q-1}^{2s+k+1}) \cap L^2(I, H_{\text{loc},q-1}^{2s+k+2})$, удовлетворяющих

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} p_{0J}(x) h_0(x) dx = 0 \text{ для всех } t \in [0, T] \text{ и } \#J = q-1,$$

и таких, что $\bar{\partial}^{q-1} p \in B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$,

$$\bar{\partial}_{q-2}^* p = 0 \text{ в } \mathbb{C}^n \times [0, T], \quad (4)$$

$$\|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} < +\infty \text{ при } 2s+k = n+1, \quad (5)$$

$$\|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} + \|p\|_{C(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} < +\infty \text{ при } 2s+k > n+1; \quad (6)$$

здесь C_b — пространство ограниченных непрерывных функций в \mathbb{C}^n с нормой $\|w\|_{C_b} = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |w(z)|$. Отдельно доказываем, что соответствующее пространство можно снабдить нормой

$$\|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2s,s}} = \begin{cases} \|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}}, & 2s + k \leq n, \\ \|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}} + \|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})}, & 2s + k = n + 1, \\ \|\bar{\partial}^{q-1} p\|_{B_{\text{for},q}^{k,2s,s}} + \|p\|_{L^2(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})} + \|p\|_{C(I, C_{b,\Lambda^0,q-1})}, & n + 1 < 2s + k. \end{cases}$$

Ясно, что $B_{\text{vel},q}^{k,2s,s}$, $B_{\text{for},q}^{k,2s,s}$, $B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2s,s}$, суть пространства Банаха.

Предсказуемо, на этих шкалах удастся получить теорему единственности. Однако в последние годы усилия научного сообщества были направлены и на поиски доказательства отсутствия теоремы существования для уравнений типа Навье – Стокса в высоких пространственных размерностях, см., например, [2], [4], [7], [9]. Тем не менее, мы получаем теорему об открытом отображении или, иначе, теорему об устойчивости, для задачи (1) на введенной шкале пространств Бохнера – Соболева.

Теорема 2. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq q < n$, $s \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, $2s + k > n$. Тогда (1) индуцирует инъективное непрерывное нелинейное открытое отображение

$$A^{(q)} : B_{\text{vel},q}^{k,2s,s} \times B_{\text{pre},q-1}^{k+1,2(s-1),s-1} \rightarrow B_{\text{for},q}^{k,2(s-1),s-1} \times \mathbf{H}_q^{2s+k}. \quad (7)$$

В частности, теорема означает, что для любой пары данных, для которой найдется решение в нужном классе, существует окрестность, для всех элементов которой тоже существуют соответствующие решения. Отметим, что для классических уравнений Навье – Стокса в других функциональных пространствах подобное утверждение отмечалось в книге О. А. Ладыженской [1]. Для некоторых других эллиптических комплексов аналогичные теоремы были получены в [5], [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Наука. 290 с.
2. *Ладыженская О. А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук. 2003. 58, № 2 (350). С. 45–78
3. *Mera A., Tarkhanov N., Shlapunov A. A.* Navier-Stokes Equations for Elliptic Complexes // Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys. 2019. 12, № 9. С. 3–27.
4. *Plecháč P., Šverák V.* Singular and regular solutions of a nonlinear parabolic system // Nonlinearity. 2003. 16, № 6. P. 2083–2097.
5. *Polkovnikov A. N.* An open mapping theorem for nonlinear operator equations associated with elliptic complexes // Applicable Analysis. 2023. 102. P. 2211–2233.
6. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N.* An open mapping theorem for the Navier-Stokes type equations associated with the de Rham complex over \mathbb{R}^n // Siberian Electronic Math. Reports. 2021. 18, № 2. P. 1433–1466.
7. *Tao T.* Finite time blow-up for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation // J. of the AMS. 2016. 29. P. 601–674.
8. *Tarkhanov N.* Complexes of differential operators. Dordrecht, NL : Kluwer Academic Publishers, 1995. 398 p.
9. *Temam R.* Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. Amsterdam : North Holland Publ. Comp., 1979. 408 p.

Шлапунов Александр Анатольевич
Сибирский федеральный университет
E-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru

Полковников Александр Николаевич
Сибирский федеральный университет
E-mail: paskaattt@yandex.ru



О ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2024 г. С. Г. ШОРОХОВ

Аннотация. Рассматривается задача построения квазиклассической вариационной формулировки для бесконечномерной динамической системы, динамика которой описывается гиперболическим уравнением с частными производными. При помощи симметризирующего оператора и соответствующей вариационной формулировки, предложенных В. М. Филипповым, получен вариационный функционал краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка, не зависящий от производных неизвестной функции и не содержащий криволинейных и повторных интегралов. Полученный функционал может быть использован в качестве функционала потерь в задачах обучения нейронных сетей, аппроксимирующих решения бесконечномерных динамических систем.

Ключевые слова: бесконечномерная динамическая система, вариационный принцип, гиперболическое уравнение с частными производными, функционал потерь.

AMS Subject Classification: 35A15

1. Введение. Вариационные принципы играют большую роль при исследовании как конечномерных, так и бесконечномерных динамических систем [1]. Для непотенциальных динамических систем одним из важнейших источников вариационных формулировок является теория вариационных принципов для непотенциальных операторов [3]. Вариационные формулировки краевых задач для различных бесконечномерных динамических систем могут быть построены при помощи метода симметризирующего оператора, предложенного В. М. Шаловым [5, 6]. Применяя этот метод, В. М. Шалов [7] построил и исследовал ограниченный снизу вариационный функционал для неоднородного гиперболического уравнения с частными производными, установил существование и единственность решения вариационной и краевой задач. Вариационный функционал В. М. Шалова содержит первые частные производные неизвестной функции. В. М. Филиппов [4] предложил для гиперболического уравнения альтернативный симметризирующий оператор и построил для него ограниченный снизу вариационный функционал, не содержащий производных неизвестной функции.

2. Вариационная формулировка для гиперболического уравнения. Рассмотрим на плоскости с координатами ξ, η область Ω с границей Γ в виде пятиугольника с вершинами в точках $\Gamma_0(2\pi, -\pi), \Gamma_1(\pi, -\pi), \Gamma_2(0, 0), \Gamma_3(\pi, \pi), \Gamma_4(2\pi, 0)$. Следуя [4, 7], обозначим через γ, l_1, l_2 участки $\Gamma_2\Gamma_3, \Gamma_1\Gamma_2, \Gamma_3\Gamma_4$ границы Γ соответственно, и запишем уравнение участка границы $\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_0$ в виде $\xi = \gamma_1(\eta), -\pi \leq \eta \leq \pi$, а уравнение участка границы $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2$ в виде $\eta = \gamma_2(\xi), 0 \leq \xi \leq 2\pi$.

Рассмотрим вариационную формулировку для однородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, (\xi, \eta) \in \Omega \quad (1)$$

в области Ω с граничными условиями [4]

$$\begin{cases} u|_{\gamma} = \varphi(s), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}|_{\gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\gamma} = \psi(s), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{l_1} = \chi(s), \\ u|_{l_2} = \omega(s), \end{cases} \quad (2)$$

где \mathbf{n} — направление внешней нормали к Γ , \mathbf{s} — положительное направление вдоль контура Γ .

Решение краевой задачи (1)-(2) ищется в классе функций $W_2^1(\Omega)$, при этом предполагается, что функции в правых частях (2) измеримы, т. е. $(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi, \chi, \omega) \in L_2(\gamma, \gamma, \gamma, l_1, l_2)$, и граничные условия (2) совместны.

Вариационный функционал, построенный В. М. Филипповым [4] для гиперболического уравнения и области общего вида, для рассматриваемой краевой задачи (1)-(2) равен

$$\begin{aligned} D[u] = & \int_{\Omega} u^2(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\gamma} \varphi(s) \cos \theta \int_{\gamma_2(\xi)}^{\eta} u(\xi, \tau) d\tau ds - \\ & - 2 \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} \sin^2 \theta - \psi(s) \sin \theta \cos \theta \right) \int_{\gamma_1(\eta)}^{\xi} \int_{\gamma_2(\zeta)}^{\eta} u(\zeta, \tau) d\tau d\zeta ds + \\ & + 2 \int_{l_1} \chi(s) \sin \theta \int_{\gamma_1(\eta)}^{\xi} \int_{\gamma_2(\zeta)}^{\eta} u(\zeta, \tau) d\tau d\zeta ds - 2 \int_{l_2} \omega(s) \cos \theta \int_{\gamma_2(\xi)}^{\eta} u(\xi, \tau) d\tau ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где θ — угол между направлением внешней нормали \mathbf{n} на контуре Γ и осью η .

Для обучения нейронных сетей, которые аппроксимируют решения краевых задач, обычно применяют функционал невязки [10, 11], реже энергетические функционалы (потенциалы) [8]. Как указывалось в [9, 12], для обучения нейронных сетей могут быть использованы и квазиклассические функционалы из [3], в частности, функционал (3).

Однако при использовании в качестве функционала потерь интегральный функционал обычно оценивается при помощи метода интегрирования Монте-Карло [2] для последующего вычисления градиента по параметрам (весам) нейронной сети. Функционал (3) содержит четыре повторных интеграла, которые при оценке методом Монте-Карло потребуют значительных вычислительных ресурсов, поэтому возникает задача преобразования повторных интегралов в функционале (3) в интегралы по области Ω и ее подобластям.

3. Преобразование вариационного функционала. Область краевой задачи Ω можно рассматривать как объединение четырех подобластей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4.$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции $\Phi(\eta)$, $\Psi(\lambda)$, $\Theta(\xi, \eta)$, определенные равенствами:

$$\begin{aligned}\Phi(\eta) &= \int_{\eta}^0 \chi(\tau) d\tau, \eta \in [-\pi, 0], \\ \Psi(\lambda) &= \int_0^{\lambda} \left(\frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} \sin \theta - \psi(s) \cos \theta \right) ds, \lambda \in [0, \pi], \\ \Theta(\xi, \eta) &= \begin{cases} \Psi(\xi) - \Psi(\eta), & (\xi, \eta) \in \Omega_1, \\ \Psi(2\pi - \xi) - \Psi(\eta), & (\xi, \eta) \in \Omega_2, \\ \Psi(2\pi - \xi) - \Psi(0), & (\xi, \eta) \in \Omega_3, \\ \Psi(\xi) - \Psi(0), & (\xi, \eta) \in \Omega_4. \end{cases}\end{aligned}\quad (4)$$

Тогда вариационный функционал В. М. Филиппова вида (3) для области Ω может быть преобразован к следующему компактному виду.

Теорема 1. *Вариационный функционал (3) для краевой задачи (1)-(2) в области Ω может быть записан в виде*

$$\begin{aligned}D[u] &= \int_{\Omega} u^2(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega} \Theta(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \varphi(\xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ 2 \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \Phi(\eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \omega(2\pi - \xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.\end{aligned}\quad (5)$$

Вариационный функционал (5) отличается от функционала (3) отсутствием криволинейных и повторных интегралов, поэтому оценка значения функционала (5) может быть эффективно выполнена при помощи метода интегрирования Монте-Карло [2]. Функционал (5) не зависит от производных неизвестной функции $u(\xi, \eta)$, поэтому, как показывают проведенные вычислительные эксперименты, при использовании функционала (5) в качестве функционала потерь при обучении нейронной сети, аппроксимирующей решение краевой задачи (1)-(2), обучение нейронной сети происходит значительно (в несколько раз) быстрее по сравнению с обучением на функционале невязки и, вообще говоря, достигаются более высокие значения показателей качества нейросетевой модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск : Удмурт. ун-т, 1999. 408 с.
2. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.
3. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новые достижения. 1992. 40. С. 3–176.
4. Филиппов В. М. Вариационный метод решения краевых задач для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1984. 20, № 11. С. 1961–1968.
5. Шалов В. М. Некоторое обобщение пространства К. Фридрихса // Доклады АН СССР. 1963. 151, № 2. С. 292–294.
6. Шалов В.М. Решение несамосопряженных уравнений вариационным методом // Доклады АН СССР. 1963. 151, № 3. С. 511–512.
7. Шалов В. М. Принцип минимума квадратичного функционала для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1965. 1, № 10. С. 1338–1365.
8. E W., Y B. The Deep Ritz Method: A Deep Learning-Based Numerical Algorithm for Solving Variational Problems // Communications in Mathematics and Statistics. 2018. 6, № 1. P. 1–12.
9. Geneva N., Zabaras N. Modeling the dynamics of PDE systems with physics-constrained deep auto-regressive networks // Journal of Computational Physics. 2020. 403. P. 109056.

10. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. 2019. 378. P. 686–707.
11. *Sirignano J., Spiliopoulos K.* DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. 2018. 375. P. 1339–1364.
12. *Zhu Y., Zabaras N., Koutsourelakis P.-S., Perdikaris P.* Physics-constrained deep learning for high-dimensional surrogate modeling and uncertainty quantification without labeled data // *Journal of Computational Physics*. 2019. 394. P. 56–81.

Шорохов Сергей Геннадьевич

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

E-mail: shorokhov-sg@rudn.ru



НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2024 г. С. Т. АЛИЕВА

Аннотация. Рассматривается дискретная задача оптимального управления, описываемая нелинейным разностным уравнением дробного порядка с запаздыванием по состоянию. На основе применения варианта метода приращений доказан дискретный аналог принципа максимума Понтрягина. Для случая выпуклости множества допустимых управлений получен аналог линейризованного условия максимума. Приведен также аналог уравнения Эйлера при предположении открытости множества допустимых управлений.

Ключевые слова: разностных уравнения с запаздыванием 1, дробный оператор 2, дробная сумма 3, дискретный принцип максимума 4, аналог уравнения Эйлера 5.

AMS Subject Classification: 49K15, 49K20

Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений с запаздыванием дробного порядка α [1–3].

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha x(t+1) &= f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \\ t \in T &= \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\},\end{aligned}\tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0} = \{t_0-h, t_0-h+1, \dots, t_0-1\}, x(t_0) = x_0.\tag{2}$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор фазовых переменных, t_0, t_1 — заданные числа, x_0 — заданный постоянный вектор, $f(t, x, y, u)$ — заданная n -мерная вектор-функция, дискретная по t и непрерывная по (x, y, u) вместе с $f_x(t, x, y, u), f_y(t, x, y, u)$, h — заданное натуральное число (запаздывание), $x_0, \varphi(t), t \in E_{t_0}$ заданы, $\Delta^\alpha x(t)$ ($0 < \alpha < 1$) дробный оператор порядка α [4, 5], а $u(t)$ — r -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U , т. е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T.\tag{3}$$

Такие управляющие функции называем допустимыми управлениями. В этой задаче цель состоит в том, чтобы минимизировать функционал

$$S(u) = \phi(x(t_1))\tag{4}$$

определенного на решениях системы (1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\phi(x)$ заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Как видно задача управления (1)–(4) является задачей дискретного терминального управления с запаздыванием дробного порядка.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), называется оптимальным управлением, а соответствующий допустимый процесс $(u(t), x(t))$ — оптимальным процессом.

Считая $u(t)$ некоторым допустимым управлением, введем дискретный аналог функция Гамильтона – Понтрягина.

$$H(t, x, y, u, \psi) = \psi^t f(t, x, y, u).$$

Предположим, что n -мерная вектор-функция $\psi(t)$ является решением следующей системы

$$\psi(t-1) = \sum_{s=t}^{t_1-1} (t+\alpha-\sigma(s))^{\alpha-1} H_x[s] + \sum_{s=t+h}^{t_1-1} (t+\alpha-h-\sigma(s))^{\alpha-1} H_y[s], \quad (5)$$

$$\psi(t_1-1) = -\phi_x(x(t_1)). \quad (6)$$

Задачу (5)–(6) назовем сопряженной системой для задачи (1)–(2). Теперь предположим, что вдоль допустимого процесса $(u(t), x(t))$ множество допустимых скоростей системы, т. е. множество

$$f(t, x(t), y(t), U) = \{\beta : \beta = f(t, x(t), y(t), v), v \in U\} \quad (7)$$

выпукло.

Доказана следующая

Теорема 1. *(Дискретный принцип максимума для системы с запаздыванием). Если в задаче (1)–(2) множество допустимых скоростей системы (1) выпукло, то для оптимальности управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t)} H[t] \leq 0,$$

выполнялось для любого $v(t) \in U, t \in T$ соответственно.

Непосредственным следствием этого утверждения является

Теорема 2. *(Поточечный дискретный принцип максимума). При выполнении условия теоремы 1 для оптимальности допустимого управления в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы условие*

$$\max_{v \in U} H(\theta, x(\theta), y(\theta), v, \psi(\theta)) = H(\theta, x(\theta), y(\theta), u(\theta), \psi(\theta)),$$

выполнялось для всех $\theta \in T$.

Предположим что, вектор-функция $f(t, x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) , а множество U выпукло.

Теорема 3. *Пусть множество U выпукло, а $f(t, x, y, u)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) . Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t](u(t) - v(t)) \leq 0, \quad (8)$$

выполнялось для любого $u(t) \in U, t \in T$.

Соотношение (8) является аналогом линеаризованного принципа максимума следствие.

А теперь предположим, что U — заданное непустое ограниченное и открытое множество и вектор-функция $f(t, x, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) .

Теорема 4. *Пусть множество U открыто, а $f(t, x, y, u)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) . Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы соотношения*

$$H_u[t] = 0 \quad (9)$$

выполнялось для любого $t \in T$.

Соотношение (9) является аналогом уравнения Эйлера в рассматриваемой задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиева С. Т.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника. 2021. 54. С. 4–11.
2. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы. БГУ, 2013. 161 с.
3. *Москаленко А. И.* Об одном классе задач оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. 1. С. 69–95.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 263 с.
5. *Jagan Mohan. J., Deekshitulu. G. V. S. R.* Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publish. Corporat. Int. J. Different. Equat. 2012. Article ID 780619. P. 1–11.

Саадат Алиева Тофик
Бакинский государственный университет, Азербайджан
Институт систем управления НАН Азербайджана
E-mail: saadata@mail.ru



НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ
ГЛАДКИХ УПРАВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ,
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДИНАМИКУ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
ПОПУЛЯЦИЙ

© 2024 г. А. В. АРГУЧИНЦЕВ, В. П. ПОПЛЕВКО

Аннотация. Рассматривается модель двух взаимодействующих популяций типа «растительный консумент – растения». Динамика популяций описывается системой, состоящей из гиперболического и обыкновенного дифференциальных уравнений с нестандартными краевыми условиями. Управление осуществляется путем воздействия на рост растительного ресурса. Для произвольного нелинейного целевого функционала получено необходимое условие оптимальности в классе гладких управляющих воздействий. Показана возможность применения численных методов, основанных на полученном результате.

Ключевые слова: динамика взаимодействующих популяций, гладкие управления, оптимальное управление, необходимое условие оптимальности.

AMS Subject Classification: 49J20, 49M05

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу, возникающую при моделировании динамики двух взаимодействующих популяций «растительноядный консумент – растения» [1]

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = -\mu(s, t)x(s, t), \quad (1)$$

$$(s, t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [0, s_k], \quad T = [0, t_k].$$

Здесь $x = x(s, t)$ — скалярная функция, характеризующая плотность распределения растительноядного консумента в зависимости от возраста $s \in S = [0, s_k]$, s_k — максимальная продолжительность жизни консумента; t — время, в течение которого изучается процесс; μ — коэффициент смертности.

Консумент потребляет возобновляющийся ресурс $R(t)$. Обилие ресурса влияет на рождаемость, коэффициент рождаемости $b(s)$, $[s_1, s_2]$ — интервал возрастов, в которых происходит репродукция.

Начально-краевые условия для (1) зададим в следующем виде

$$x(s, 0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x(0, t) = f_1(R, t) + \int_{s_1}^{s_2} b(s)x(s, t) ds, \quad t \in T, \quad (2)$$

Будем предполагать, что выполняются следующие условия согласования:

$$x^0(0) = f_1(R, 0) + \int_{s_1}^{s_2} b(s)x^0(0) ds. \quad (3)$$

Скалярная функция $R(t)$ определяется из управляемого обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= f_2(R(t), y(t), u(t), t), \quad t \in T, \\ R(t_0) &= R^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $y(t) = \int_0^{s_k} x(s, t) ds, t \in T$ — общая биомасса популяции консумента; скалярная функция $u(t)$ — воздействие на рост ресурса.

Задача рассматривается в классе гладких управляющих воздействий: функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке T и удовлетворяет поточечным ограничениям типа включения:

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (5)$$

где $U = [u_-, u_+]$ — заданный отрезок.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s, t_k), s) ds, \quad (6)$$

определенного на решениях задачи (1)–(4) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (5).

Задача оптимального управления (1)–(6) рассматривается при следующих предположениях:

- 1) функции $x^0(s)$ и $b(s)$ непрерывны на S , функция $\mu(s, t)$ непрерывна на множестве Π ;
- 2) функция $f_1(R, t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по R ;
- 3) функция $f_2(R, y, u, t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по R, y и u ;
- 4) функция $\varphi = \varphi(x, s)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по x .

При данных предположениях существует классическое решение задачи Коши (4) и непрерывное в Π «почти» классическое решение (1)–(3) с возможным разрывом производных на прямой $s = t$ [4].

2. Формула приращения и необходимое условие оптимальности. Рассмотрим два допустимых процесса: базовый $\{u, R = R(t, u), x = x(s, t, u)\}$ и варьируемый $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{R} = R + \Delta R = R(t, \tilde{u}), \tilde{x} = x + \Delta x = x(s, t, \tilde{u})\}$.

Тогда задача в приращениях имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial s} &= -\mu \Delta x(s, t), \quad \Delta x(s, 0) = 0, \\ \Delta x(0, t) &= \Delta f_1(R, t) + b \int_{s_1}^{s_2} \Delta x(s, t) ds, \\ \Delta R_t &= \Delta f_2(R, y, u, t), \quad \Delta R(t_0) = 0, \\ \Delta y(t) &= \int_0^{s_k} \Delta x(s, t) ds. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta f_1(R, t) &= f_1(\tilde{R}, t) - f_1(R, t), \\ \Delta f_2(R, y, u, t) &= f_2(\tilde{R}, \tilde{y}, \tilde{u}, t) - f_2(R, y, u, t). \end{aligned}$$

Приращение функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$ имеет вид

$$\Delta J(u) = \int_S \Delta \varphi(x(s, t_1), s) ds. \quad (7)$$

Прделаем ряд операций, обычно применяемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка.

- Добавим в (7) нулевые слагаемые

$$\iint_{\Pi} \psi(s, t) \left[\frac{\partial \Delta x}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial s} + \mu \Delta x(s, t) \right] ds dt, \quad \int_T p(t) [\Delta R_t - \Delta f_2(R, y, u, t)] dt,$$

где $\psi(s, t)$ и $p(t)$ пока неопределенные функции.

- В введенных выше слагаемых используем формулы интегрирования по частям.
- Приращения $\Delta \varphi(x(s, t_k), s)$, $\Delta f_1(R, t)$ и частные приращения $\Delta_{\tilde{R}} f_2(R, y, \tilde{u}, t)$ по R и y разложим, используя формулу Тейлора первого порядка.
- Предположим теперь, что функции $\psi(s, t)$, $p(t)$ будут являться решением следующей сопряженной задачи:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} = \psi \mu - p(t) \frac{\partial f_2(R, y, u, t)}{\partial y} - \psi(0, t) \cdot b(s), \quad (8)$$

$$\psi(s, t_k) = -\varphi_x(x(s, t_k), s), \quad \psi(s_k, t) = 0;$$

$$p_t = -p(t) \frac{\partial f_2(R, y, u, t)}{\partial R} - \psi(0, t) \frac{\partial f_1(R, t)}{\partial R} \\ p(t_k) = 0. \quad (9)$$

Тогда формула приращения функционала принимает вид

$$\Delta J(u) = - \int_T p(t) \Delta_{\tilde{u}} f_2(R(t), y(t), u(t), t) dt + \eta, \quad (10)$$

где

$$\eta = \int_S o_{\varphi}(|\Delta x(s, t_k)|) ds + \int_T o_{f_1}(|\Delta R(t)|) dt + \\ + \int_T [\Delta_{\tilde{u}} f_{2R}(R, y, u, t) \Delta R(t) + \Delta_{\tilde{u}} f_{2y}(\tilde{R}, y, u, t) \Delta y(t) + \Delta_{\tilde{R}} f_{2y}(R, y, u, t) \Delta y(t)] dt.$$

Формула приращения (10) справедлива для любых двух произвольных процессов. Рассмотрим теперь специальную вариацию допустимого управления, сохраняющее гладкость управляющих воздействий [2]. Проварьированное управление строится по правилу

$$u_{\varepsilon, \delta}(t) = u(t + \varepsilon \delta(t)), \quad t \in T,$$

$\varepsilon \in [0, 1]$ — параметр варьирования, $\delta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $t_0 \leq t + \delta(t) \leq t_1$, $t \in T$.

Так как допустимые управления — гладкие функции, используем следующее разложение

$$\Delta u = \dot{u}(t) \varepsilon \delta(t) + o(\varepsilon).$$

Обозначим через $h(p, R, y, u, t) = p(t) \cdot f_2(R, y, u, t)$. Воспользовавшись методикой [3], можно доказать, что остаточный член в формуле (10) имеет порядок $o(\varepsilon)$:

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_T h_u \cdot \dot{u} \cdot \delta(t) dt + o(\varepsilon).$$

Отсюда, в силу произвольности $\delta(t)$, следует утверждение.

Теорема 1. *Если процесс $\{u(t), R(t), x(s, t)\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче, то выполняется условие*

$$\omega(t) = h_u(p(t), R(t), y(t), u(t), t) \cdot \dot{u}(t) = 0, \quad t \in T,$$

где $p(t)$ — решение сопряженной задачи (8), (9).

3. Метод улучшения гладких управлений. Опишем общую схему метода.

1. Выберем произвольное допустимое управление $u^0 = u^0(t)$ и положим $k = 0$.
2. По управлению u^k построим решения x^k , R^k исходной и ψ^k , p^k сопряженной задач.
3. На полученных решениях вычислим значение функционала $J^k = J(u^k)$ и сконструируем функцию

$$\omega_k(t) = h_u(p^k, R^k, y^k, u^k, t) \cdot \dot{u}^k.$$

Далее проверяем условие оптимальности $\omega_k(t) = 0$. Если оно выполнено, то метод заканчивает свою работу.

4. Если данное управление не удовлетворяет условию оптимальности, построим его гладкую вариацию, один из вариантов которой имеет вид

$$u_{\varepsilon_k}^k(t) = u^k(t + \varepsilon_k \delta_k(t)), \quad \delta_k(t) = \frac{(t - t_0)(t_1 - t)\omega_k(t)}{(t_1 - t_0) \max_{t \in T} |\omega_k(t)|}.$$

Параметр ε_k определяется из условия

$$\varepsilon_k : J(u_{\varepsilon_k}^k) = \min J(u_{\varepsilon}^k), \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Случай, когда найденное значение этого параметра близко к нулю, соответствует неумлучшению функционала на шаге метода.

5. В качестве очередного приближения выберем $u^{k+1}(t) = u_{\varepsilon_k}^k(t)$ и продолжим итерационный процесс. Критерием остановки служит одна из ситуаций, полученных на k -й итерации метода:

а) выполнение с заданной точностью необходимого условия оптимальности для функции $u^k(t)$. Например, близость к нулю функции $\omega_k(t)$ в каждой точке $t \in T$ можно гарантировать, если справедливо неравенство $\max_{t \in T} |\omega_k(t)| \leq 10^{-5}$;

б) неумлучшение значения функционала, полученного на предыдущей $(k - 1)$ -й итерации, например, $J^k - J^{k-1} > 10^{-6}$.

Последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной и сходящейся к необходимому условию оптимальности, сформулированному в теореме 1 [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. В., Крышев И. И., Сазыкина Т. Г. Физическое и математическое моделирование экосистем. СПб. : Гидрометеиздат, 1992. 362 с.
2. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами. М. : Физматлит, 2007. 165 с.
3. Аргучинцев А. В., Поплевко В. П. Задача оптимального управления гиперболической системой с запаздыванием на границе в классе гладких управляющих воздействий // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. 183. С. 14–21.
4. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1979. 392 с.

Аргучинцев Александр Валерьевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: vasilisa@math.isu.ru



О ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СКОРОСТЕЙ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ ГРАНИЧНОЙ ЭНЕРГИИ

© 2024 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

Аннотация. Для уравнения колебания струны с заданными начальными и конечными условиями рассматриваются задачи оптимального граничного управления с промежуточными условиями на значения скоростей с критериями качеств интегралов граничных энергий. Управление осуществляется как смещением одного конца при закреплённом другом конце, так и смещением на двух концах. Интегралы граничных энергий рассматриваются на всем промежутке времени. Используя методы разделения переменных и проблем моментов, предложен конструктивный подход построения оптимальных граничных управлений колебаниями струны. Проведен вычислительный эксперимент и выполнен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: граничное управление, оптимальное управление колебаниями, промежуточные условия, интеграл граничной энергии, разделение переменных.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Задачи оптимального управления колебательными процессами как распределёнными, так и граничными воздействиями исследованы, в частности, в [1–3, 5, 6, 9]. В работах [1–4, 7, 9, 10] рассмотрены задачи для динамических (с распределёнными и сосредоточенными параметрами) процессов, в которых наряду с классическими краевыми (начальными и конечными) условиями заданы также многоточечные промежуточные (как разделённые, так и неразделённые) условия. Задачи оптимального граничного управления колебательными процессами с многоточечными промежуточными условиями и функционалом интеграла от квадратов граничных смещений исследованы, в частности, в работах [1–3, 9].

В настоящей работе рассматриваются задачи оптимального управления колебаниями струны с заданными начальными, конечными условиями и промежуточными значениями скоростей точек струны с критериями качеств интегралов граничных энергий, заданных на всем промежутке времени. Для каждой задачи с использованием метода разделения переменных и проблем моментов предложен конструктивный подход построения функции оптимального граничного управления, который допускает распространение на другие неоднородные колебательные системы. Благодаря конструктивности проведены численные расчеты. Выполнен анализ полученных результатов.

2. Об основных результатах. Пусть состояние распределённой колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонение от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1)$$

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

с начальными и конечными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Будем рассматривать случаи со следующими граничными условиями:

– смещение левого конца при закрепленном правом конце

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

– смещение двух концов

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления. В уравнении (1) $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$),

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы промежуточные значения скоростей точек в виде

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

В соответствии с граничными условиями (4) и (5) минимизируемые интегралы граничной энергии выбраны следующим образом:

– при смещении левого конца и закрепленном правом конце

$$\int_0^T (\mu'(t))^2 dt, \quad (7)$$

– при смещении двух концов

$$\int_0^T \left((\mu'(t))^2 + (\nu'(t))^2 \right) dt. \quad (8)$$

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования [1–3, 9, 10].

В работе рассматриваются следующие задачи.

1. Требуется найти оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (2) переходит в конечное состояние (3), обеспечивая выполнение условия (6) и минимизируя функционал (7).

2. Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействиями которых колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (2) переходит в конечное состояние (3), обеспечивая выполнение условия (6) и минимизируя функционал (8).

В работе предлагается конструктивный подход решения рассматриваемых задач оптимального граничного управления, в которых учитывается специфика промежуточных условий. Этот подход основан на следующей схеме: исходные задачи с сосредоточенными управлениями (или с неоднородными граничными условиями) сводятся к задачам оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Динамика сведенных процессов описывается в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (9)$$

где $V(x, t)$ — неизвестная функция с нулевыми граничными условиями, т. е. $V(0, t) = V(l, t) = 0$. В (9) для задачи со смещением левого конца при закреплённом правом конце (т. е. с граничными условиями (4))

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) \ddot{\mu}(t),$$

а для задачи со смещением двух концов (т. е. с граничными условиями (5))

$$F(x, t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t)) \frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t).$$

Далее для функции $V(x, t)$ и для процесса (9), учитывая соответствующие начальные, промежуточные, конечные условия и используя метод разделения переменных, полученные задачи сводятся к задачам оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями как проблема моментов. На основе алгоритма решения проблем моментов конечномерных систем [8] для произвольного числа первых n гармоник строятся оптимальные граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде.

Таким образом, для задачи 1 оптимальное управление $\mu_n^{(1)0}(t)$, $t \in [0, T]$, представляется в следующем виде:

– при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1)0}(t) = & \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \gamma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\ & \left. + G_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \gamma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \gamma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) = & -p_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - t) + \\ & + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - t) + \sum_{i=j}^m \gamma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - t), \end{aligned}$$

$$G_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \gamma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i \right) = p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T + \sum_{i=j}^m \gamma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k t_i,$$

– при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$:

$$\mu_n^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - t) \right] + \varphi_0(0).$$

Здесь известные величины $p_k^{(1)0}$, $q_k^{(1)0}$, $\gamma_{ik}^{(1)0}$ ($k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$) являются решением соответствующей замкнутой системы алгебраических уравнений, которые получены в ходе решения конечномерной проблемы моментов. Для первых n гармоник представлены в явном виде оптимальные функции прогиба $Q_n^0(x, t)$ струны.

Проведен вычислительный эксперимент и выполнен сравнительный анализ расчетов, который подтверждает эффективность подхода. В частности, результаты анализа, даже при $n = 1$, показывают, что под воздействием построенных оптимальных граничных управлений поведение производной функции прогиба струны достаточно близко в промежуточных моментах времени заданным функциям значений скоростей точек струны. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления колебаниями или волновыми процессами в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р. Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // Аналитическая механика, устойчивость и управление : тр. XI Междунар. Четаев. конф. 2017. 3(1). С. 119–125.

2. *Барсегян В. Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 36–47.
3. *Барсегян В. Р.* Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Ученые записки ЕГУ. Серия: Физика и математика. 1998. № 1. С. 24–29.
4. *Барсегян В. Р.* Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени // Доклады НАН Армении. 2010. 110, № 3. С. 251–260.
5. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М. : Наука, 1965. 476 с.
6. *Ильин В. А., Мусеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. 60, № 6(366). С. 89–114.
7. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Труды Института математики НАН Беларуси. 2011. 19, № 1. С. 62–70.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 476 с.
9. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time // IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). 2021. P. 343–349.
10. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection Form at an intermediate moment of time // Axioms. 2022. 11, № 4. P. 157–174.

Барсегян Ваня Рафаелович
Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН
E-mail: solodusha@isem.irk.ru



О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МИКРОСЕРВИСНОЙ АРХИТЕКТУРОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. И. М. ДОБРИНЕЦ, Е. А. ТЕТЕРИНА, Е. Р. ВИКУЛОВА

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления микросервисной архитектурой с использованием стохастических дифференциальных уравнений. Микросервисные системы характеризуются высокой степенью сложности и неопределенности, что требует применения адекватных математических моделей для их анализа и управления. Предлагается использование стохастических дифференциальных уравнений для моделирования динамики таких систем, учитывая случайные воздействия и колебания нагрузки. Приведена математическая постановка задачи, включая функции цели и ограничения. Описаны методы решения задачи оптимального управления с использованием численных методов и стохастического программирования.

Ключевые слова: микросервисная архитектура, оптимальное управление, стохастические дифференциальные уравнения, теория массового обслуживания, управление ресурсами, надежность и производительность системы.

AMS Subject Classification: 93E20

1. Введение. Микросервисная архитектура становится все более популярной в современных распределенных вычислительных системах [6]. Управление такими системами представляет собой сложную задачу из-за их динамической природы и подверженности случайным воздействиям [4]. В данной работе рассматривается математическая модель оптимального управления такой системой.

2. Математическая модель. Основное уравнение, описывающее динамику состояния системы [7]:

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t) dt + g(x(t), u(t), t) dW(t), \quad (1)$$

где $f(x, u, t)$ — детерминированная часть, $g(x, u, t)$ — стохастическая часть, $W(t)$ — Винеровский векторный процесс.

Для случая микросервисной архитектуры функции f и g могут быть выбраны следующим образом:

$$f(x, u, t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) - \mu_1(x_1, u_1) \\ \lambda_2(t) - \mu_2(x_2, u_2) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) - \mu_n(x_n, u_n) \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i(t)$ — интенсивность входящего потока запросов к i -му микросервису, $\mu_i(x_i, u_i)$ — интенсивность обслуживания запросов i -м микросервисом, зависящая от текущей очереди x_i и выделенных ресурсов u_i .

Исследование И. М. Добринца выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, <https://rscf.ru/project/23-21-00296/>.

$$g(x, u, t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(x_1, u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(x_2, u_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n(x_n, u_n) \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i(x_i, u_i)$ отражает волатильность процесса обслуживания в i -м микросервисе.

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) выбраны для моделирования микросервисной архитектуры из-за их способности учитывать случайные факторы и неопределенности [1]. СДУ позволяют более точно описывать динамику распределенных систем, подверженных случайным воздействиям [5].

3. Решение задачи. Функция цели J формулируется как [3]:

$$J = \mathbb{E} \left[\int_0^T (c_1 \cdot E(W(x(t))) + c_2 \cdot R(u(t))) dt \right],$$

где $E(W(x))$ — ожидаемое время ожидания в очереди, $R(u)$ — затраты на ресурсы, c_1 и c_2 — весовые коэффициенты.

Ограничения:

- ограничения на управление: $u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$;
- ограничения на состояние: $x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max}$;
- дополнительные ограничения: соблюдение максимально допустимого количества сбоев в обслуживании (SLA).

Методы решения задачи:

1) Методы решения СДУ:

- метод Эйлера – Маруямы [5];
- стохастическая версия метода Рунге – Кутты [2].

2) Оптимальные стратегии управления:

- принцип максимума Понтрягина для стохастических систем [9];
- методы стохастического программирования [8].

Развернута вычислительная система, построенная по микросервисной архитектуре, распределенная по нескольким узлам, где необходимо оптимизировать (оркестрировать) количество серверов и маршрутизацию запросов для минимизации времени ответа и затрат на ресурсы. С использованием предложенной модели СДУ и методов численного решения были проведены эксперименты, показавшие значительное улучшение производительности системы и устойчивости к случайным воздействиям при оптимальном управлении данной вычислительной системой.

В ходе апробации предложенного метода были получены следующие количественные результаты:

- среднее время отклика системы уменьшилось на 27% (с 250 мс до 182 мс);
- утилизация ресурсов повысилась на 18% (с 65% до 83%);
- количество сбоев в обслуживании (SLA) сократилось на 42% (с 50 до 29 случаев в час);
- затраты на ресурсы снизились на 15% при сохранении производительности.

Эти результаты были получены на тестовой системе, состоящей из 13 микросервисов, обрабатывающих в среднем 1037 запросов в секунду в течение 24-часового периода наблюдения.

4. Заключение. Представлена модель оптимального управления микросервисной системой с использованием стохастических дифференциальных уравнений. Предложенные подходы позволяют эффективно управлять распределенными ресурсами в условиях неопределенности.

Исходные формулы и методы решения были апробированы на тестовой системе, результаты экспериментов показали улучшение производительности и устойчивости системы при внедрении предложенного подхода. Дальнейшие исследования будут направлены на расширение модели для учета дополнительных внешних факторов и улучшение численных методов решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Allen L. J. S.* An introduction to stochastic processes with applications to biology. CRC Press, 2007.
2. *Burrage K., Burrage P. M., Tian T.* Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2004. 460, № 2041. P. 373–402.
3. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solutions. Springer Science & Business Media, 2006.
4. *Fowler M., Lewis J.* Microservices: a definition of this new architectural term // martinowler.com. 2014, <https://martinowler.com/articles/microservices.html>.
5. *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Springer Science & Business Media, 1992.
6. *Newman S.* Building Microservices. O'Reilly Media, 2015.
7. *Oksendal B.* Stochastic differential equations: an introduction with applications. Springer Science & Business Media, 2003.
8. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on stochastic programming: modeling and theory. SIAM, 2009.
9. *Yong J., Zhou X. Y.* Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. Springer Science & Business Media, 1999.

Добринец Иван Михайлович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: dobr@isu.ru

Тетерина Екатерина Алексеевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: teterina.ekaterina03@mail.ru

Викулова Елизавета Романовна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: vikulizavet85@gmail.com



МЕТОД ОПОРНЫХ МАЖОРАНТ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2024 г. В. А. ДЫХТА

Аннотация. Необходимое условие глобальной оптимальности — позиционный принцип минимума, — установленный для задач со свободным правым концом траекторий, обобщается на гладкую задачу с терминальными ограничениями типа равенства. Для этого применяется абстрактный метод опорных мажорант, который конкретизируется для задачи управления на уровне модифицированной функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Но соответствующая безусловная экстремальная задача не требует решения: если исследуемый процесс оптимален в исходной задаче управления, то спуск с него в безусловной задаче на допустимую траекторию с помощью позиционного принципа минимума невозможен (при любом выборе множителя Лагранжа и штрафного параметра). Нарушение этого необходимого условия сопровождается предъявлением улучшающего процесса (который может оказаться скользящим режимом).

Ключевые слова: необходимое условие, позиционное управление, слабо монотонные функции, движения Красовского – Субботина.

AMS Subject Classification: 49L99, 49K15

1. **Введение.** Статья посвящена распространению позиционного принципа минимума [2–7] на следующую задачу (P):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$g_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

$$J[\sigma] = g_0(x(t_1)) \rightarrow \inf.$$

Здесь через σ обозначены пары функций (x, u) с управлениями из класса $\mathcal{U} := L_\infty(T, U)$, U – компактное множество в R^m , вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна, гладкая по x , и удовлетворяет условию подлинейного роста, все функции $g_i(x)$ тоже гладкие.

Через Σ обозначим множество всех пар σ , удовлетворяющих системе (1), (2), а через $D \subset \Sigma$ – множество допустимых пар (процессов) задачи (P).

Упомянутый позиционный принцип минимума (кратко, Ф-ПМ) доказан в [2–7] для различных вариантов задачи (P_0) без терминальных ограничений (3). Он базируется на использовании опорных мажорант функционала — слабо убывающих (u -стабильных [9]) функций, являющихся решениями неравенства Гамильтона – Якоби

$$\varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) \leq 0, \quad \varphi(t_1, x) = g_0(x) - g_0(\bar{x}(t_1)). \quad (4)$$

Для гладких задач (которые мы и будем рассматривать) решения неравенства (4) считаются липшицевыми, гладкими по x функциями, образующими пространство \mathcal{F} .

Если выбрано некоторое решение $\varphi(t, x) \in \mathcal{F}$ неравенства (4), то находится: соответствующее экстремальное отображение

$$U_\varphi(t, x) = \operatorname{Argmin}_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u); \quad (5)$$

множество \mathcal{V}_φ его селекторов $v(t, x)$ — позиционных управлений потенциального спуска (в общем случае разрывных). Решением системы (1) с таким управлением (т. е. при $u = v(t, x)$) считается пучок движений Красовского – Субботина $\mathcal{X}(v)$ (см. [9]), дополненный решениями Каратеодори, если таковые существуют.

В этих обозначениях соответствующий F-ПМ (зависящий от φ) можно сформулировать в виде следующего

Условие N(φ). Если процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимален в задаче (P_0) , то траектория \bar{x} оптимальна в следующей φ -присоединенной задаче:

$$g_0(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\varphi.$$

Среди всех возможных мажорант наиболее привлекательной для массового применения и универсальной является квазилинейная мажоранта

$$\varphi^\psi(t, x) = g_0(x) - g_0(\bar{x}(t)) + \left(\psi(t) - \nabla g_0(\bar{x}(t)) \right) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t). \quad (6)$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — котраектория процесса $\bar{\sigma}$, т. е. решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(t, \bar{x}(t), \psi, \bar{u}(t)), \quad \psi(t_1) = g_{0x}(\bar{x}(t_1)),$$

где $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, а «поправка» $r(t)$ обеспечивает слабое убывание функции (6).

Данная мажоранта формируется в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина, но соответствующий ей F-ПМ — условие $\mathbf{N}(\psi) := \mathbf{N}(\varphi^\psi)$ — существенно усиливает принцип Понтрягина (и его обобщения типа Кларка [12]; см. также [6]).

Распространение F-ПМ на задачу (P) оказалось нетривиальным. Схема такого распространения представлена в [8] с использованием метода модифицированной функции Лагранжа (МФЛ) с квадратичным штрафом. Однако её практическое применение для аналитического исследования модельных примеров весьма проблематично из-за необходимости совершать сингулярные предельные переходы, обусловленные разрывностью позиционных управлений спуска.

Поэтому в данной статье предлагается использовать совершенно новый, альтернативный подход, свободный от указанных трудностей.

2. Опорные мажоранты экстремальных задач и улучшение допустимой точки. В некотором пространстве \mathcal{Z} рассмотрим задачу (A) :

$$f(z) \rightarrow \min, \quad z \in D \subset \mathcal{Z},$$

где f — конечная функция на \mathcal{Z} .

Функцию $\Phi(z)$, определенную на \mathcal{Z} , назовем *опорной сверху к f в точке $\bar{z} \in \mathcal{Z}$* , если $\Phi(\bar{z}) = f(\bar{z})$ и

$$f(z) - f(\bar{z}) \leq \Phi(z) - \Phi(\bar{z}), \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Такую функцию Φ назовем опорной мажорантой f в точке \bar{z} .

Под задачей *улучшения точки \bar{z}* в задаче (A) понимается нахождение точки $z_* \in D$ со свойством $f(z_*) < f(\bar{z})$. (Понятно, что при этом \bar{z} не должна быть решением (A) .)

Предложение 1. *Любая точка $z_* \in D$, удовлетворяющая неравенству $\Phi(z_*) < \Phi(\bar{z})$, является решением задачи улучшения точки \bar{z} в задаче (A) .*

Введем в рассмотрение следующую задачу (MA) :

$$\Phi(z) \rightarrow \min, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Тогда предложение 1 рекомендует заменить задачу улучшения \bar{z} в задаче (A) (т. е. спуска из \bar{z} по f) задачей спуска из \bar{z} по мажоранте Φ без явного учета ограничения $z \in D$. Конечно, в каждой конкретной реализации данного подхода разрешимость новой задачи спуска на допустимом

множестве D требует обоснования. Но если он оказался возможным, то улучшаемая точка не оптимальна в исходной задаче (она «бракуется»). Важно подчеркнуть, что при этом не требуется решать задачу (МА).

В гладких конечномерных задачах МФЛ и штрафные функции порождают опорные мажоранты, для которых полное обоснование требует привлечения общей теории локального минимума [10] (для МФЛ), или штрафов со срезками целевой функции [1] (т. е. первое слагаемое берется в виде $\bar{f}_+(z) := \max\{f(\bar{z}), f(z)\}$).

3. Позиционный принцип минимума для задачи (P). Для доказательства F-ПМ будет использоваться МФЛ

$$M_{\lambda\gamma}(x) = g_0(x) + \lambda'g(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x)|^2, \quad (7)$$

где λ — множитель Лагранжа, $g = (g_1, \dots, g_k)$, $\gamma > 0$ — параметр штрафа и $|\cdot|$ — евклидова норма.

Свойства функции (7) и соответствующего итерационного метода решения задачи на условный экстремум $g_0(x) \rightarrow \min$, $g(x) = 0$ описаны в замечательной статье Поляка [11]. В частности, там доказано, что при независимых градиентах ограничений в точке \bar{x} стандартной квадратичной достаточности для локального минимума, в безусловной задаче $M_{\lambda\gamma}(x) \rightarrow \min$, $x \in R^n$ \bar{x} остается точкой строгого локального минимума (при $\bar{\lambda}$ — из условия критичности \bar{x} , и достаточно больших γ). Это свойство важно для построения численных методов, но нас интересует опорность функции $M_{\lambda\gamma}$.

Для этого, следуя [11], перепишем её в следующем виде

$$M_{\lambda\gamma}(x) = f(x) + \frac{\gamma}{2}|g(x) + r|^2 + \nu,$$

где $r = \lambda/\gamma$, $\nu = -\lambda^2/2\gamma = -\gamma/2 \cdot r^2$. Отсюда получаем равенство

$$M_{\lambda\gamma}(x) - M_{\lambda\gamma}(\bar{x}) = f(x) - f(\bar{x}) + \frac{\gamma}{2}(|g(x) + r|^2 - |g(\bar{x}) + r|^2).$$

Если при некоторых x_* , λ , γ левая часть этого равенства оказалась < 0 , то и правая часть будет < 0 , что дает неравенство

$$f(x_*) - f(\bar{x}) < \frac{\gamma}{2}(|r| + |g(x_* + r)|)(|r| - |g(x_* + r)|).$$

Но если дополнительно оказалось, что x_* допустима, то она решает задачу улучшения. Отсюда и из приведенных соотношений следует опорность $M_{\lambda\gamma}$ в точке \bar{x} .

Теперь мы можем применить схему п.2 к задаче (P), взяв в качестве Φ функцию $M_{\lambda\gamma}$, и обратившись к семейству задач $(P_{\lambda\gamma})$ без терминальных ограничений:

$$M_{\lambda\gamma}(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \sigma \in \Sigma. \quad (8)$$

Для фиксированной задачи $(P_{\lambda\gamma})$ можно применить F-ПМ с квазилинейной мажорантой, т. е. условие $\mathbf{N}(\psi)$ введения (при этом в роли g_0 выступает функция $M_{\lambda\gamma}$). Для этого вводятся: котраектория $\eta(t)$ процесса $\bar{\sigma}$ задачи (8); её возмущение

$$p(t, x) := \nabla_x \varphi^\eta(t, x) = \eta(t) + \nabla M_{\lambda\gamma}(x) - \nabla M_{\lambda\gamma}(\bar{x}(t))$$

(см. формулы (5), (6)); η -экстремальное отображение

$$U_\eta(t, x) = \underset{u \in U}{\text{Argmin}} p(t, x) \cdot f(t, x, u), \quad (t, x) \in T \times R^n;$$

множество его селекторов \mathcal{V}_η и движений Красовского–Субботина $\mathcal{X}(v)$, $v \in \mathcal{V}_\eta$. (Зависимость этих объектов от $(\lambda\gamma)$ опущена.)

Обозначим через E_η объединение всех пучков движений по $v \in \mathcal{V}_\eta$, а через $E_{\lambda\gamma}^T$ — множество всех движений, удовлетворяющих терминальным ограничениям (3) (это множество может содержать траектории овыпукленной задачи (coP)).

Теорема 1. Если $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ — оптимальный процесс в задаче (P), то при любом выборе $\lambda \in R^k$, и $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$g_0(\bar{x}(t_1)) \leq g_0(x(t_1)) \quad \forall x \in E_{\lambda\gamma}^T.$$

Смысл теоремы ясен: в её предположениях спуск с $\bar{\sigma}$ на допустимую траекторию овыпукленной задачи (coP) с помощью позиционного принципа минимума невозможен ($\bar{\sigma}$ «не бракуется»). В контрпозитивном случае, когда указанный спуск окажется возможным, процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален, а полученная траектория спуска $x^*(\cdot)$ задает допустимый процесс в задаче (coP) (на его тестировании в общем случае не будем останавливаться).

Заметим, что теорема не требует от $\bar{\sigma}$ быть решением задачи (8).

Относительно стратегии выбора параметров λ, γ : λ может наследоваться из принципа максимума, а γ — следовать рекомендациям статьи [11].

4. Пример. $\dot{x}_1 = 1 - u_1^2$, $\dot{x}_2 = x_1 u_2$, $\dot{x}_3 = x_1 - u_2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 0$, $|u_1| \leq 1$, $u_2 \in [0, 1]$, $x_3(1) \rightarrow \inf$.

Здесь $\bar{\sigma} = 0$ является экстремалью Понтрягина только в аномальном случае (при множителе $\alpha_0 = 0$ в терминальном лагранжиане задачи), а в нормальном случае $\alpha_0 = 1$ $\bar{\sigma}$ — не экстремаль. Его мы и будем рассматривать (согласно теории, это всё же аномальная экстремаль).

Применяя теорему, находим: $\eta_1 \equiv 0$, $\eta_2 \equiv \lambda$, $\eta_3 \equiv 1$, $p(x) = (0, \lambda + \gamma x_2, 1)'$ и экстремальное отображение U_η находится из задачи:

$$[2(\lambda + \gamma x_2)x_1 - 1]u_2 \rightarrow \min, \quad u_2 \in [0, 1]. \quad (9)$$

Если $x_1(t)x_2(t) > 0$ на некотором интервале из T , то ограничение $x_2(1) = 0$ нарушается. Следовательно, на искомой траектории спуска $x_1(t) \equiv 0$ и $x_2(t) \equiv 0$, а условие (9) дает $u_2 \equiv 1$. Ясно, что занулить первую компоненту траектории можно только обобщенным управлением $1/2 \delta_{(+1,-1)} + 1/2 \delta_{(-1,+1)}$. Неравенство в теореме 1 привело нас к скользящему режиму — абсолютной минимали овыпукленной задачи.

Ситуация в данном примере ясна и без особой теории, но важно, что формализм необходимого условия улавливает особенности примера.

Опыт применения теоремы 1 к тестовым примерам с особенностями внушает сдержанный оптимизм. Определенные перспективы повышения эффективности данного Ф-ПМ связаны с алгоритмизацией выбора λ, γ на его итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ащепков Л. Т., Константинов Г. Н. Эффект «срезки» в задачах нелинейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1976. 16, № 4. С. 1047–1051.
2. Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Доклады Академии наук. 2015. 462, № 6. С. 653–656.
3. Дыхта В. А. Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона – Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 31–49.
4. Дыхта В. А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. 21, № 2. С. 73–86.
5. Дыхта В. А. О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона – Якоби // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. 28, № 3. С. 83–93.
6. Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. 41. С. 19–39.
7. Дыхта В. А. Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. 224. С. 54–64.

8. *Дыхта В. А.* Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. № 19. С. 113–128.
9. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М. : Физматлит, 1974. 456 с.
10. *Левитин Е. С., Милотин А. А., Осмоловский Н. П.* Теория условий высших порядков в гладких задачах на экстремум с ограничениями // в кн.: Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления / отв. ред.: С. Т. Завалищин, А. А. Толстоногов. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1985. С. 4–39.
11. *Поляк Б. Т., Третьяков Н. В.* Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. 13, № 1. С. 34–46.
12. *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory.. N. Y. : Springer-Verlag, 199. 276 p.

Дыхта Владимир Александрович
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН,
Иркутский государственный университет
E-mail: dykhta@gmail.com



О ПОСТРОЕНИИ ПОКРЫТИЯ ЭЛЛИпсоИДА РАВНЫМИ ШАРАМИ

© 2024 г. А. Л. КАЗАКОВ, А. А. ЛЕМПЕРТ, Д. М. НГУЕН

Аннотация. Рассматривается задача о нахождении тончайшего (экономного) покрытия эллипсоида равными шарами. Для ее решения разработан эвристический алгоритм, основанный на применении геодезической диаграммы Вороного и оптико-геометрической аналогии. Проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: тончайшее покрытие, покрытие шарами, неевклидова метрика, оптико-геометрическая аналогия, диаграмма Вороного.

AMS Subject Classification: 52C15

1. Введение. Задача нахождения тончайшего (экономного) покрытия множества относится к классическим задачам вычислительной геометрии [8]. Среди них наиболее известными являются задачи покрытия плоских фигур равными кругами [7] и трехмерных — равными шарами [4]. Подобные постановки возникают в различных приложениях: от размещения беспроводных датчиков и проектирования глобальных навигационных систем [6] до планирования стереотаксической лучевой терапии при лечении опухолей головного мозга [5]. Отметим, что в указанных задачах может возникать искажение сигнала, приводящее к нарушению сферической формы зоны действия оборудования. В данной работе рассматривается задача построения тончайшего покрытия поверхности эллипсоида равными шарами. При этом используется как евклидово расстояние, так и специальная неевклидова метрика, которая позволяет учитывать неравномерность распространения сигнала в гетерогенной среде [1, 3].

2. Постановка задачи. Пусть в метрическом пространстве X заданы поверхность $(E) \subset X$ — эллипсоид или сегмент эллипсоида и непрерывная функция $0 \leq f(x, y, z) \leq \beta$, определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке $(x, y, z) \in X$. Если $f(x_i, y_i, z_i) = 0$, то точка (x_i, y_i, z_i) считается непроходимой. Мерой расстояния между двумя точками $p, q \in X$ будем считать минимальное время перемещения ними, которое определяется из решения задачи минимизации

$$\rho(p, q) = \min_{\Gamma \in G(p, q)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z)}, \quad (1)$$

где $G(p, q)$ — множество непрерывных кривых, принадлежащих (E) и соединяющих точки p и q .

Задачу построения тончайшего покрытия можно сформулировать следующим образом: необходимо разместить n шаров $C_i(O_i, R)$ с центрами $O_i = (x_i, y_i, z_i)$ и одинаковыми радиусами R , который будем называть радиусом покрытия, чтобы поверхность (E) принадлежала объединению шаров и радиус R был минимальным. Тогда получаем задачу оптимизации

$$R \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\forall p \in (E), \exists i: \rho(O_i, p) \leq R, \quad (3)$$

$$O_i \in (E), i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

3. О методе решения. Для решения задачи (2)–(4) предлагается эвристический алгоритм, основанный на совместном применении геодезической диаграммы Вороного и оптико-геометрического подхода [1]. Использование диаграммы Вороного позволяет свести задачу о покрытии поверхности n шарами к серии из n задач о покрытии сегмента поверхности одним шаром, а оптико-геометрический подход — найти покрывающий шар минимального радиуса.

Для старта алгоритма необходимо случайно сгенерировать n центров покрывающих шаров $O_i \in (E), i = \overline{1, n}$. Далее из каждой точки O_i выпускается световая волна, и строятся границы ячеек Вороного, состоящих из точек, достигнутых двумя или более волнами одновременно [1]. Далее световые волны выпускаются из всех граничных точек каждой ячейки, что позволяет найти их хаусдорфовы центры [2], которые, в свою очередь, будут центрами покрывающих шаров минимального радиуса. Итерационный процесс сходится к локальному минимуму. В качестве глобализирующей процедуры применяется многократная генерация начального приближения (мультистарт).

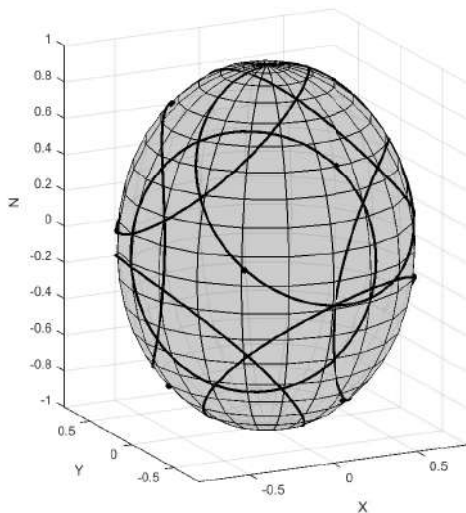
Отметим, что пересечение сферы и эллипсоида представляет собой пространственную кривую 4-го порядка. Это существенно усложняет построение покрытий искомого вида даже в сравнении со случаем, когда покрываемое множество является сферой.

Пример. Требуется решить задачу покрытия n шарами поверхности эллипсоида

$$(E) : \frac{x^2}{0.8^2} + \frac{y^2}{0.8^2} + \frac{z^2}{0.8^2} = 1,$$

в случае, когда расстояние между точками считается евклидовым, т. е. $f(x, y, z) = 1$.

Решение задачи выполнено с помощью разработанного программного комплекса посредством многократного запуска с применением эвристических алгоритмов. Результаты расчетов приведены в таблице. На рисунке показано покрытие поверхности эллипсоида шарами в случае $n = 10$.



n	R	n	R
4	1.0766	10	0.6519
5	0.9188	15	0.5400
6	0.7971	20	0.4769
7	0.7834	32	0.3840
8	0.7466	42	0.3456
9	0.7099	50	0.3120

4. Заключение. Разработан эвристический алгоритм, основанный на построении геодезической диаграммы Вороного и оптико-геометрического подхода. В качестве покрываемой поверхности рассмотрены эллипсоид и его сегменты. При этом использовалось как евклидово расстояние, так и специальная неевклидова метрика.

Проведен вычислительный эксперимент. Предварительное сравнение результатов расчетов с известными решениями показало, что геометрические методы являются более экономичными, а методы, основанные на оптических аналогиях, дают более точные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. 72, № 7. С. 50–57.
2. *Казаков А. Л., Лебедев П. Д.* Алгоритмы построения наилучших n-сетей в метрических пространствах // Автоматика и телемеханика. 2017. 7. С. 141–155.
3. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. М.: Либроком, 2013. 779 с.
4. *Bezdek K., Langi Z.* From the Separable Tammes Problem to Extremal Distributions of Great Circles in the Unit Sphere // Discrete Comput Geom. 2023. 72. P. 269–309.
5. *Liberti L., Maculan N., Zhang Y.* Optimal configuration of gamma ray machine radiosurgery units: the sphere covering subproblem // Optimization Letter. 2009. 3. P. 109–121.
6. *Saulskiy V. K.* Multi satellite systems with linear structure and their application for continuous coverage of the earth // Cosmic Research. 2005. 43. P. 34–51.
7. *Takhonov I. I.* On some problems of covering the plane with circles // Diskretn. Anal. Issled. Oper. 2014. 21, № 1. P. 84–102.
8. *Toth L. F.* Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. Berlin : Springer-Verlag, 1953.

Казаков Александр Леонидович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

E-mail: kazakov@icc.ru

Лемперт Анна Ананьевна

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

E-mail: lempert@icc.ru

Нгуен Дык Минь

Иркутский национальный исследовательский технический университет

E-mail: nguyenducminh.mt@gmail.com



СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2024 г. И. А. КОЛЕСНИКОВ

Аннотация. При построении алгоритма нахождения сплайн-интерполяционного решения задачи оптимальных динамических измерений важным является вид начального условия для получения сплайн функции на каждом отрезке разбиения. В статье кратко представлены алгоритм построения сплайн-интерполяционного решения указанной задачи, результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих выбор начальных условий.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимальное управление, динамические измерения, фильтрация, сплайн, входной сигнал.

AMS Subject Classification: 49J20

Задача оптимальных динамических измерений заключается в восстановлении динамически искаженного сигнала по известному наблюдаемому выходному сигналу и параметрам измерительного устройства (ИУ) с использованием методов теорий оптимального управления и уравнений соболевского типа [4].

Измерительное устройство моделируется системой

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием Шоултера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (2)$$

которое отражает начальное состояние ИУ для некоторого $x_0 \in R^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ [2].

В системе (1) первое равенство определяет систему леонтьевского типа (конечномерный аналог уравнения соболевского типа), L и A — матрицы, характеризующие структуру ИУ; $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ вектор-функции состояния ИУ и скорости изменения состояния соответственно; $y(t)$ — вектор-функция наблюдения; C — прямоугольная матрица, характеризующая взаимосвязь между состоянием системы и наблюдением; $u(t)$ — вектор-функция измерений; B — матрица, характеризующая взаимосвязь между состоянием системы и измерениями.

Неизвестный входной сигнал находится как решение задачи оптимального управления, в которой минимизируется штрафной функционал

$$J(v) = \min_{u \in U_\partial} J(x(u), u)$$

в виде

$$J(u) = J(x(u)) = \sum_{k=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(k)}(t) - y_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt \quad (3)$$

Форма функционала (3) определяет основную идею математической модели оптимальных динамических измерений, которая заключается в минимизации расхождения между выходным сигналом $y(t) = Cx(t)$ моделируемой системой (1), и наблюдаемым выходным сигналом $y_0(t)$ (или

наблюдением) по показаниям ИУ и их производным [3]. Функция $v(t)$, при которой достигается минимум штрафного функционала, называется оптимальным динамическим измерением. Используемые в работе подходы подробно описаны в [1, 2].

Опишем алгоритм сплайн-метода решения задачи оптимального динамического измерения.

Предположим, что даны следующие компоненты: матрицы, входящие в систему (1) и начальное условие (2), начальное значение $x_0 \in R^n$; массив наблюдаемых значений Y_{0i} в узловых точках $t_i = 0, 1, \dots, n$ выходного сигнала, причем $t_{i+1} - t_i = \delta$, $t_0 = 0$, $t_n = \tau$.

1. Разбиваем интервал $[0, \tau]$ на M интервалов $[\tau_{m-1}, \tau_m]$, где $m = 1, 2, \dots, M$ и $t_0 = \tau_0 = 0$, $t_n = \tau_M$.
2. На каждом интервале $[\tau_{m-1}, \tau_m]$, строим интерполяционную функцию $y_{0m}^l(t)$ в виде полинома степени $l \leq (n-1)/M$.
3. Для $m = 1, 2, \dots, M$ на отрезке $[\tau_{m-1}, \tau_m]$, последовательно решаем задачу оптимального динамического измерения.

$$\begin{cases} L\bar{x}_m = A\bar{x}_m + B\bar{u}_m^l, \\ \bar{y}_m = C\bar{x}_m, \end{cases}$$

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (\bar{x}(\tau_{m-1}) - x_m) = 0,$$

$$J(\bar{v}_m^l) = \min_{\bar{u}_m \in U_\partial} J(\bar{x}_m(\bar{u}), \bar{u}),$$

$$J(\bar{u}) = J(\bar{x}(\bar{u})) = \sum_{k=0}^1 \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \left\| C\bar{x}_m^{(k)}(t) - \left(y_{0m}^l(t) \right)^{(k)} \right\|^2 dt.$$

Найдём приближенное значение оптимального измерения $\bar{v}_m^l(t)$ в виде полинома степени l , накладывающего условие непрерывности

$$\bar{v}_m^l(\tau_m) = \bar{v}_{m+1}^l(\tau_m),$$

для $u \in \mathcal{U}_{\partial m}$, где $\mathcal{U}_{\partial m} \subset \mathcal{U}_\partial$ — замкнутое выпуклое подмножество \mathcal{U}_∂ .

4. В результате получаем сплайн-функцию

$$\tilde{v}_k^l(t) = \bigcup_m v_{km}^l(t),$$

непрерывную на $[0, \tau]$.

В работе приведены результаты вычислительных экспериментов, в основе которых лежит система

$$\begin{cases} L\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \\ L\bar{x}_2 = -25\bar{x}_1 - 5\bar{x}_2 + 25\bar{u}, \\ \bar{y} = \bar{x}_2, \end{cases}$$

Тестовый сигнал представляет собой один период синусоидальной волны с амплитудой 0,48 В, частотой 2 Гц, со сдвигом фаз 270 градусов, постоянным смещением 0,48 В и частотой 2 Гц и $u = 0,48 \sin(4\pi t + 3\pi/2) + 0,48$, $t = [0; 2\pi]$.

На всех рисунках тестовый сигнал показан синим графиком. В работе наблюдаемый сигнал (зеленый график) искажается только за счет инерции измерительного устройства (рис. 1).

При восстановлении входного сигнала с помощью алгоритма сплайн-метода принимаются следующие начальные условия:

$$\bar{x}_1(\tau_{m-1}) = \xi_{m-1}, \quad \bar{x}_2(\tau_{m-1}) = p_{m-1}, \quad (4)$$

где $\xi_{m-1} = y_0(\tau_{m-1})$, $p_{m-1} = y_0'(\tau_{m-1})$. Выполнение алгоритма было остановлено после шага 20 из-за увеличения ошибки с каждым последующим шагом (рис. 2, а)). Аналогичная ситуация (рис. 2, б)) была получена при использовании следующих начальных условий

$$\bar{x}_1(\tau_m) = \xi_m, \quad \bar{x}_2(\tau_{m-1}) = p_{m-1}, \quad (5)$$

где $\xi_m = y_0(\tau_m)$.

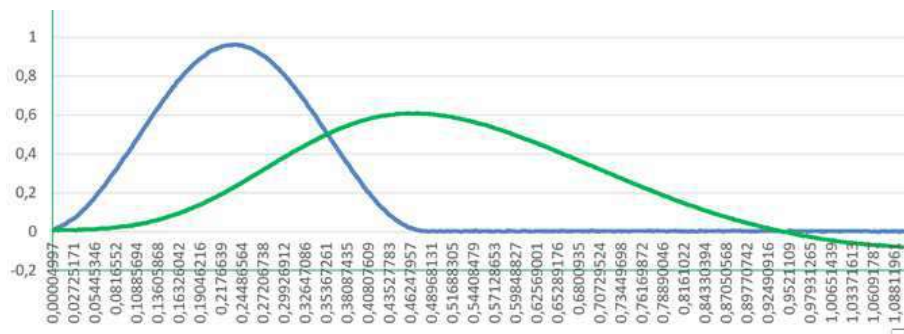


Рис. 1. Синий цвет — $u(t)$, зеленый цвет — $y_0(t)$

Также были использованы начальные условия вида

$$\bar{x}_1(\tau_m) = \xi_m, \quad \bar{x}_2(\tau_m) = p_m. \quad (6)$$

Результаты восстановления входного сигнала приведены на рис. 2, в). Отметим, что неполная проверка инерционности измерительного устройства при решении задачи восстановления входного сигнала встречается довольно часто.

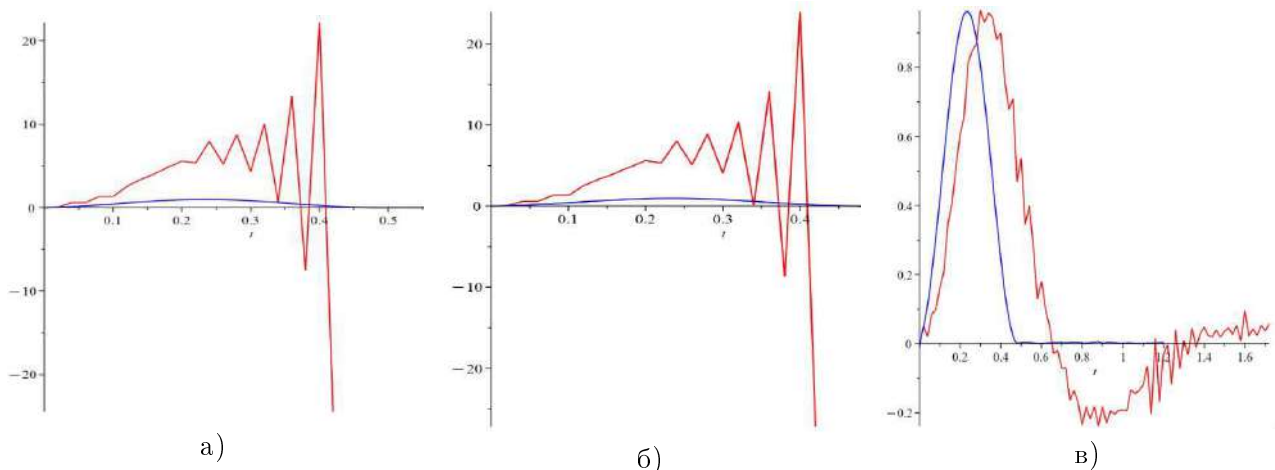


Рис. 2. а) Начальные условия (4), б) Начальные условия (5), в) Начальные условия (6)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Keller A. V. On algorithm of solving problems of optimal and hard control // Software and Systems. 2011. № 3. P. 42.
2. Keller A. V., Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Khudyakov Y. V. The numerical algorithms for the measurement of the deterministic and stochastic signals // Semigroups of operators – theory and applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2015. P. 183–195.
3. Shestakov A. L., Keller A. V., Zamyshlyayeva A. A., Manakova N. A., Zagrebina S. A., Sviridyuk G. A. The optimal measurements theory as a new paradigm in the metrology // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2020. 7, № 1. P. 3–23.
4. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A. A new approach to measurement of dynamically perturbed signal // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2010. 16(192), № 5. P. 116–120.

Колесников Иван Алексеевич

Южно-Уральский государственный университет (ЮУрГУ)

E-mail: asp23kia8@susu.ru



ОБЗОР БИБЛИОТЕК ЯЗЫКА PYTHON ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. Д. Е. КОПЫЛОВ, М. А. КАРПЕНКОВ, М. В. ЩУРИК

Аннотация. Популярность одного из самых распространенных языков программирования Python во многом объясняется наличием целого ряда библиотек, ориентированных на решение различных классов задач. Среди библиотек для решения задач оптимального управления можно выделить Gekko, Control, CasADi и др. В работе три упомянутые библиотеки сравниваются на основе решения ими трех задач оптимального управления. Каждая из библиотек использует определённый уровень абстракции, влияющий на возможности и простоту решения задач.

Ключевые слова: Библиотеки Python, оптимальное управление, gekko, control, casadi.

AMS Subject Classification: 49-04

1. Введение. Одним из самых популярных языков программирования является Python. Причиной этого является наличие огромного числа библиотек. Библиотеки ориентированы для использования в различных областях, в том числе и для решения задач оптимального управления.

Библиотек для решения задач оптимального управления достаточно много: Gekko [6], Control [7], CasADi [4], PyOMO [8], CVXPY [5] и другие.

Каждая библиотека использует определенный уровень абстракции. От уровня абстракции зависят возможности библиотеки и простота программной реализации для конкретной задачи.

Схема работы всех библиотек примерно одинаковая. На первом шаге осуществляется переход от задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования. В некоторых (Gekko, Control) этот шаг выполняет сама библиотека, а в других (CasADi) его реализует пользователь с использованием инструментария библиотеки. Вторым шагом выполняется решение задачи нелинейного программирования. Задача решается с использованием встроенных методов (Control использует методы на базе известной библиотеки SciPy), либо с использованием сторонних решателей (Gekko и CasADi используют по умолчанию решатель IPOPT).

2. Решение задач. Тестирование библиотек проводилось на ряде задач из [1]. За $x = x(t)$ обозначается состояние, за $u = u(t)$ управление. В первых двух примерах не приводится физический смысл параметров и функций. С аналитическим решением задач или вариантами численного решения можно познакомиться также в [1].

2.1. Оптимальное планирование поставки продукции.

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(u(t))] dt \rightarrow \min;$$

$$\dot{x} = u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1];$$

$$f_1(\xi) = \begin{cases} a_1 \xi^2, & \xi \geq 0; \\ b_1 \xi^2, & \xi < 0; \end{cases} \quad b_1 > a_1 > 0.$$

$$f_2(u) = \begin{cases} a_2 u^2, & u \geq 0; \\ b_2 u^2, & u < 0; \end{cases} \quad a_2 > 0, \quad b_2 > 0.$$

Исследование Д. Е. Копылова выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, <https://rscf.ru/project/23-21-00296/>.

Здесь a_1, a_2, b_1, b_2 — заданные параметры, $r = r(t)$ — известная функция.

Сравнить результаты работ библиотек можно с методом, который используется в [2].

На рисунке 1 приведено численное решение задачи и решение с использованием библиотек.

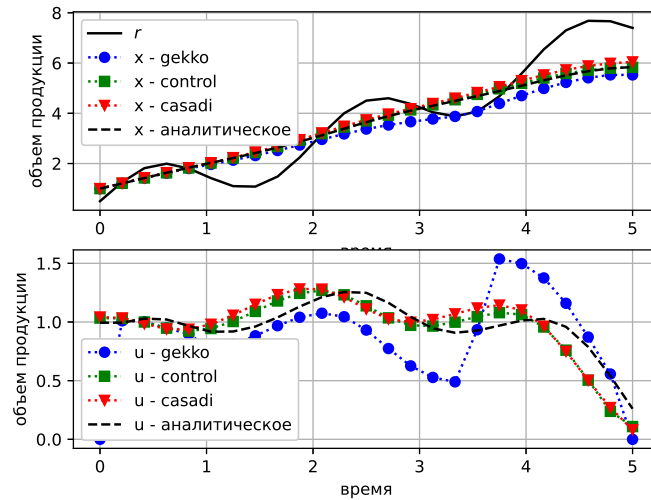


Рис. 1. Решение задачи об оптимальном планировании поставки продукции

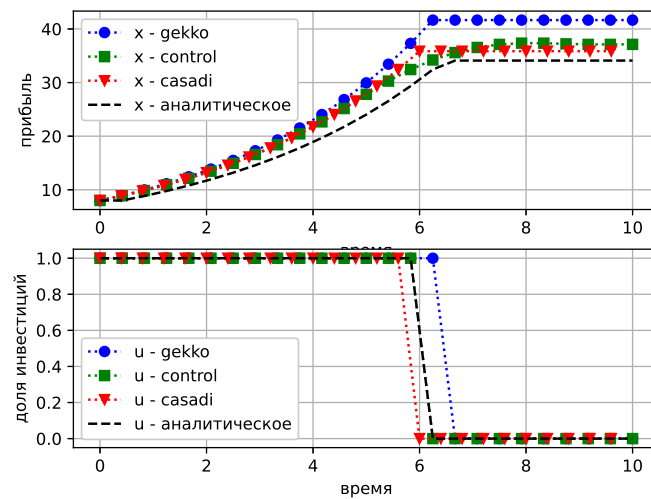


Рис. 2. Решение задачи об оптимальном планировании инвестиций

2.2. Оптимальное планирование инвестиций.

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - 1)x(t)dt \rightarrow \min;$$

$$\dot{x} = \alpha ux, \quad x(0) = c;$$

$$u(t) = \frac{y_1(t)}{x(t)} \in [0, 1], \quad t \in [t_0, t_1].$$

Для данной задачи известно, что инвестировать нужно до момента времени $\bar{t} = t_1 - 1/\alpha$, а после совсем прекратить инвестировать.

На рисунке 2 приведены аналитическое и численное решения задачи.

2.3. *Мягкое прилунение космического корабля.* Некоторые задачи имеют специфическую постановку. Так, в данной задаче правый конец не закреплен. Эту задачу удалось решить только с использованием библиотеки Gekko.

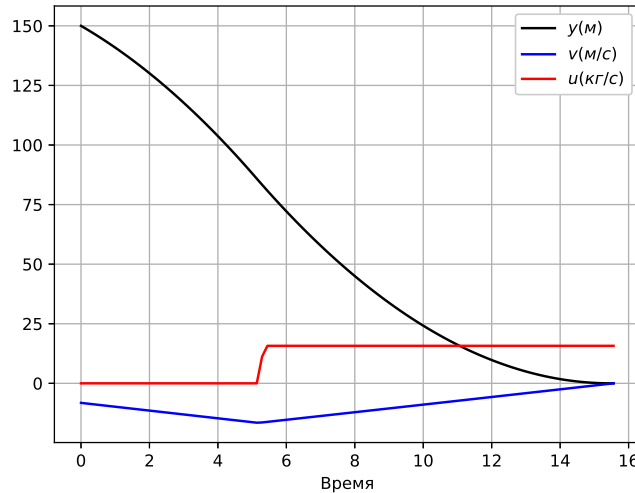


Рис. 3. Решение задачи о прилунении космического корабля

$$J(u, T) = \int_{t_0}^T u(t) dt \rightarrow \min;$$

$$\dot{v} = \frac{\beta u(t)}{m} - g, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{m} = -u(t);$$

$$y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = m_0,$$

$$y(T) = 0, \quad v(T) = 0,$$

$$0 \leq u(t) \leq u_{max}, \quad t \in [0, T].$$

Параметры задачи соответствуют спускаемому аппарату, аналогичному Apollo-11, который осуществлял посадку на Луну в 1969 г [3] (масса 15 000 кг, высота 150 м, скорость 8.2 м/сб, импульс двигателя $\beta = 3050$ м/с, $g = 1.62$ м/с², $u_{max} = 15.74$ кг/с).

В результате моделирования затраты топлива на посадку составили 163,398 кг, переход с режима свободного падения в режим управляемого падения состоялся спустя 5,29 секунды, общее время посадки 15,56 секунды. В упомянутой работе [3] приведено следующее решение: затраты топлива 170,08 кг, переключение в момент времени 4,7347 секунды и время посадки 16,4083 секунды.

2.4. *Сравнение библиотек.* В таблице 1 приведены результаты решения задач 1 и 2 с использованием трех библиотек (задача 3 решалась только с использованием библиотеки Gekko).

С первой задачей лучше справилась библиотека CasADi. Библиотека Gekko оказалась медленнее, чем CasADi и Control, но при этом она позволила решить более сложную задачу 3, которую нельзя так просто решить с использованием CasADi и Control.

ТАБЛИЦА 1. Результаты

Библиотека	Задача 1		Задача 2	
	Время	Ж	Время	Ж
Gekko	6.96	24.37	6.90	-147.53
Control	2.14	22.47	0.63	-145.10
CasADi	0.48	22.18	1.29	-136.24
Аналитическое решение		22.45		-143.41

3. Заключение. Если исследователю необходимо решить задачу оптимального управления, то он может воспользоваться одной из рассмотренных в работе библиотек. Первым, что следует попробовать, является библиотека Gekko. Если необходимо решать специфическую задачу, то стоит обратить внимание на библиотеку CasADi. В том случае, если приходится работать со сложными системами, где требуется привлекать аппарат теории автоматического управления, может быть полезной библиотека Control.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев О. В., Аргучинцев А. В.* Методы оптимизации в задачах и управлениях. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1999. 208 с.
2. *Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М., Данилина Н. И., Сергеев С. И.* Основы теории оптимального управления. М. : Высш. шк., 1990. 429 с.
3. *Мозжорина Т. Ю.* Численное решение задач оптимального управления с переключением методом пристрелки // Математическое моделирование и численные методы. 2017. 14. С. 94–106 <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-2-94106>.
4. *Andersson J., Akesson J., Diehl M.* CasADi — A symbolic package for automatic differentiation and optimal control // in: Recent Advances in Algorithmic Differentiation, 2012. P. 297–307, https://doi.org/10.1007/978-3-642-30023-3_27.
5. *Andersen M. S., Dahl J., Liu Z., Vandenberghe L* Interior-point methods for large-scale cone programming // in: Optimization For Machine Learning, 2011. 26 p., <https://doi.org/10.7551/mitpress/8996.003.0005>.
6. *Beal L. D. R., Hill D., Martin R. A., Hedengren J. D.* GEKKO Optimization Suite // Processes. 2018. 6, № 8, <https://doi.org/10.3390/pr6080106>.
7. *Fuller S., Greiner B., Moore J., Murray R., van Paassen R., Yorke R.* The Python Control Systems Library (python-control) // 2001 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (Austin, TX, USA, 14-17 December, 2021), 2021, <https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683368>.
8. *Hart W. E.* Python Optimization Modeling Objects (Pyomo) // in: Operations Research/Computer Science Interfaces (ORCS, vol. 47), 2009. P. 3–19, https://doi.org/10.1007/978-0-387-88843-9_1.

Копылов Даниил Евгеньевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: it-daniil@yandex.ru

Карпенков Михаил Андреевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: karpenkov.2004@mail.ru

Щурик Мария Викторовна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: marriamni@gmail.com



МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОУ С УПРАВЛЯЕМЫМ РАЗРЫВОМ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

© 2024 г. И. В. ЛУТОШКИН, М. С. РЫБИНА

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, содержащая запаздывание по фазовым переменным и управляемый разрыв фазовой траектории. Для решения задачи такого типа предлагается использовать метод параметризации, заключающийся в представлении управляющих функций в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами и последующем сведении исходной задачи к конечномерной задаче нелинейного программирования относительно параметров управления. В исследовании переменные полученной конечномерной задачи расширяются моментом разрыва фазовой траектории. Для переменных конечномерной задачи предлагается алгоритм вычисления производных целевой функции на основе использования сопряженных переменных исходной задачи оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, запаздывание, управляемый разрыв фазовой траектории, численные методы, метод параметризации.

AMS Subject Classification: 49M37

1. Постановка проблемы. При моделировании прикладных динамических оптимизационных проблем, формулируемых в терминах задачи оптимального управления (ОУ), зачастую возникают задачи с разрывами фазовых траекторий, например, [1, 3]. Другим усложнением модели может быть необходимость учета запаздывающего по времени эффекта, например [4–6]. В работе [7] предлагается модель управления экономической системой в условиях массового заболевания, в рамках которой присутствует одновременно как запаздывание по фазовым переменным, так и управляемый разрыв фазовой траектории. В связи с этим возникает вопрос разработки методов решения задач ОУ подобного рода.

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)); \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (2)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0; \quad (3)$$

$$x(\tau+) = \theta(x(\tau-)) \text{ для некоторого } \tau \in [t_0; T]; \quad (4)$$

$$J = g(x(T), \tau) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Здесь фазовая переменная $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектор параметров управления $u(t) \in \mathbb{R}^r$ при $t_0 \leq t \leq T$, $f: \mathbb{R}^{1+2n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Функция $\psi(t)$ — детерминированная величина, описывающая поведение x до момента начала управления. Скалярная величина $h > 0$ определяет точечное запаздывание системы. Скаляр τ является управляемым моментом разрыва фазовой траектории, значение траектории в $\tau+$ определяется детерминированной функцией $\theta(x)$. Решение задачи (1)–(5) ищется в классе кусочно-непрерывных управляющих функций.

Метод параметризации [2, 4] заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T, \quad (6)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542, <https://rscf.ru/project/24-28-00542/>.

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leq k \leq N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (7)$$

где $v_\mu^k \in R^d$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U$ и, соответственно, $v^k = (v_1^k, \dots, v_r^k) \in R^{d \times r}$.

Пусть управление (2) параметризовано в виде (6), (7), тогда фазовая траектория $x(t)$, порожденная задачей Коши (1), (3), (4), при $1 \leq k \leq N$ принимает зависимость от параметров управления $w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k)$ и момента τ :

$$x(t) = \begin{cases} z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), & t_{k-1} \leq t < t_k, \quad t < \tau; \\ z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau), & t_{k-1} \leq t < t_k, \quad t \geq \tau. \end{cases}$$

Функции $z(\cdot)$ находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau) &= \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0, \quad k = 0; \\ z(t; w^1, \dots, w^k, v^{k+1}, \tau) &= z(t_k; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau) + \\ &\int_{t_k}^t f(s, z(s; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau), z(s-h; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau), u^k(s; v^k)) ds, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, t < \tau; \\ z(t; w^1, \dots, w^k, v^{k+1}, \tau) &= \theta(z(\tau-; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau)) + \\ &\int_\tau^t f(s, z(s; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau), z(s-h; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k, \tau), u^k(s; v^k)) ds, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \tau \leq t. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$\varphi(w^1, \dots, w^N, \tau) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N, \tau)). \quad (8)$$

Таким образом, исходная задача (1)–(5) редуцируется к задаче нелинейного программирования (НП):

$$\begin{aligned} \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau) &\rightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \\ W &= \{w^k : w_{0,0}^{k-1} \leq w_{0,0}^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \\ &k = 1, \dots, N; \quad t_0 \leq \tau \leq T, w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Производные по параметрам управления. Для того чтобы к задаче НП (9) применять методы первого порядка, необходим алгоритм вычисления производных целевой функции $\varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)$. Зависимость φ от (w^1, \dots, w^N, τ) задана опосредованно, таким образом вычисление производных представляет собой отдельную задачу.

В [4] рассматривалась задача ОУ с точечным запаздыванием без разрыва фазовой траектории: (1)–(3), (5). В этом случае задача НП (9) имела вид

$$\begin{aligned} \varphi(w^1, \dots, w^N) &\rightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \\ W &= \{w^k : w_{0,0}^{k-1} \leq w_{0,0}^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \\ &k = 1, \dots, N; \quad w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \end{aligned} \quad (10)$$

И проблема вычисления производных целевой функции φ по переменным (w^1, \dots, w^N) для задачи (10) с условиями (1)–(3), (5) решалась на основе использования сопряженной системы.

Введем функцию Гамильтона – Понтрягина и систему уравнений для сопряженных переменных:

$$H(t, p, x, \xi, u) = \langle p, f(t, x, \xi, u) \rangle; \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H(p(t), x, \xi, u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x(t), \xi=x(t-h)} \\ - \frac{\partial H(p(t+h), x, \xi, u(t+h))}{\partial \xi} \theta(T-h-t) \Big|_{x=x(t+h), \xi=x(t)}; \end{cases} \quad (12)$$

$$p(T) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Big|_{x=x(T)}. \quad (13)$$

Теорема 1. [4] Пусть функции f , g , входящие в постановку задачи (1)–(3), (5), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче (10) по параметрам верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial t_k} &= H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - \\ &\quad H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial T} &= H(T, p(T), x(T), x(T - h), u^N(T, v^N)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s, p(s), x(s), x(s - h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу ОУ (1)–(5) и соответствующую ей задачу НП (9). Вычисление производных целевой функции φ в задаче (9) также может быть сведено к использованию сопряженных переменных. Однако система сопряженных переменных не идентична введенной выше (11), (12), (13). Если фазовая переменная имеет разрыв, то сопряженная ей также имеет разрыв.

Введем условие разрыва сопряженной траектории [1]:

$$p(\tau-) = p(\tau+) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \Big|_{x=x(\tau-)}. \quad (14)$$

Таким образом в задаче ОУ (1)–(5) сопряженная система определяется условиями (11), (12), (13), (14).

Теорема 2. Пусть функции f , g , θ , входящие в постановку задачи (1)–(5), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче (9) по параметрам верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial t_k} &= H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - \\ &\quad H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial \tau} &= H(\tau, p(\tau-), x(\tau-), x(\tau - h), u(\tau-)) - \\ &\quad H(\tau, p(\tau+), x(\tau+), x(\tau - h), u(\tau+)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial T} &= H(T, p(T), x(T), x(T - h), u^N(T, v^N)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N, \tau)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s, p(s), x(s), x(s - h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} ds. \end{aligned}$$

Данная теорема дает алгоритм вычисления производных первого порядка целевой функции в построенной задаче (9), что открывает возможность применения соответствующих методов решения задачи НП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. К. О сведениях задач оптимального управления к конечномерным // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. 18, № 5. С. 1083–1095.
2. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. 19, № 2. С. 292–303.
3. Дыхта В. А., Самсонов О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
4. Луточкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа. Ульяновск: УлГУ, 2024. 188 с.

5. *Максимов В. П.* Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики // Прикладная математика и вопросы управления. 2019. № 4. С. 124–135.
6. *Aubin J.-P.* Time and Money. How Long and How Much Money is Needed to Regulate a Viable Economy // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Cham, 2014. 144 с.
7. *Lutoshkin I. V. , Rybina M. S.* Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. 23, № 2. С. 264–273.

Лутошкин Игорь Викторович
Ульяновский государственный университет (УлГУ)
E-mail: lutoshkiniv@ulsu.ru

Рыбина Мария Сергеевна
Ульяновский государственный университет (УлГУ)
E-mail: rybina_maria@icloud.com



К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© 2024 г. А. Ф. МАНСИМЗАДЕ, К.Б. МАНСИМОВ

Аннотация. Ставится и рассматривается одна двухступенчатая задача оптимального управления, описываемая системами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и многоточечным функционалом качества. Доказаны необходимые условия максимума типа принципа максимума Понтрягина и линеаризованного условия максимума. Получен аналог уравнения Эйлера.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, ступенчатая задача оптимального управления, многоточечный функционал, принцип максимума Понтрягина, необходимое условие оптимальности.

AMS Subject Classification: 49K15, 49K20

В работе [1] рассмотрена двухступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и негладким терминальным функционалом.

Доказан ряд необходимых условий оптимальности первого порядка в терминах производных по направлению.

В предлагаемой работе аналогичная задача оптимального управления рассматривается при предположении, что критерий качества является многоточечным функционалом типа Больца.

Доказан ряд необходимых условий оптимальности.

Пусть $T_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2$ — заданные отрезки, $U_1 \in R^r, U_2 \in R^q$ — заданные непустые и ограниченные множества, $\theta_i \in (t_0, t_1]$, $i = \overline{1, m}$ ($t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m \leq t_1$), $\psi_i \in (t_1, t_2]$, $i = \overline{1, k}$ ($t_1 < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_k \leq t_2$) — заданные точки.

Рассмотрим задачу о минимуме многоточечного функционала

$$S(u_1, u_2) = \varphi_1((x(\theta_1), x(\theta_2), \dots, x(\theta_m))) + \varphi_2((y(\xi_1), y(\xi_2), \dots, y(\xi_k))) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t F_1(\tau, x(\tau), u_1(\tau)) d\tau \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t_1}^t F_2(\tau, y(\tau), u_2(\tau)) d\tau \right] dt, \quad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u_1(t)) + \int_{t_0}^t K_1(t, \tau, x(\tau), u_1(\tau)) d\tau, t \in T_1, \quad (2)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = f_2(t, y(t), u_2(t)) + \int_{t_1}^t K_2(t, \tau, y(\tau), u_2(\tau)) d\tau, t \in T_2, \quad (4)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)) \quad (5)$$

$$u_1(t) \in U \subset R^r, t \in T_1, u_2(t) \in U \subset R^q, t \in T_2, \quad (6)$$

Здесь $u_1(t)(u_2(t))$ — $r(q)$ -мерная кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий (допустимая управляющая функция),

x_{10} — заданный постоянный n -мерный вектор, $f_1(t, x, u_1), K_1(t, \tau, x, u_1)(f_2(t, y, u_2), K_2(t, \tau, y, u_2))$ — заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $x(y)$, $G(x)$ — заданная непрерывно-дифференцируемая n -мерная вектор-функция, $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_k)$ — заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $F_1(t, \tau, x, u_1)(F_2(t, \tau, y, u_2))$ — заданная непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $x(y)$ скалярная функция.

Пару $(u_1(t), u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t), u_2(t), x(t), y(t))$ — допустимым процессом.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $(u_1(t), u_2(t))$ существует единственное кусочно-гладкое решение $(x(t), y(t))$ задачи (2)–(5).

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x(t), y(t))$ — некоторый допустимый процесс.

Введем аналоги функции Гамильтона – Понтрягина

$$\begin{aligned} H_1(t, x(t), u_1(t), \psi_1(t)) &= \psi_1'(t)f_1(t, x(t), u_1(t)) + \int_t^{t_1} \psi_1'(\tau)K_1(\tau, t, x(t), u_1(t))d\tau - \\ &\quad - \int_t^{t_1} F_1(\tau, x(t), u_1(t))d\tau \\ H_2(t, x(t), u_2(t), \psi_2(t)) &= \psi_2'(t)f_2(t, x(t), u_2(t)) + \int_t^{t_2} \psi_2'(\tau)K_2(\tau, t, x(t), u_2(t))d\tau - \\ &\quad - \int_t^{t_2} F_2(\tau, x(t), u_2(t))d\tau \end{aligned}$$

Здесь $\psi_i = \psi_i(t), i = 1, 2$ являются соответственно решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= - \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi_1((x(\theta_1), x(\theta_2), \dots, x(\theta_m)))}{\partial x_i} + \\ &+ \int_t^{t_1} \frac{\partial H_1'(\tau, x(\tau), u_1(\tau), \psi_1(\tau))}{\partial x} d\tau - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2((y(\psi_1), x(\psi_2), \dots, x(\psi_k)))}{\partial y_i} \frac{G(x(t_1))}{\partial x} + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, y(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial y} \frac{G(x(t_1))}{\partial x} dt, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= - \sum_{i=1}^k \beta_i(t) \frac{\partial \varphi_2((y(\xi_1), y(\xi_2), \dots, y(\xi_k)))}{\partial y_i} + \\ &+ \int_t^{t_2} \frac{\partial H_2'(\tau, y(\tau), u_2(\tau), \psi_2(\tau))}{\partial y} d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha_i(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_0, \theta_i], \beta_i(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_1, \xi_i]$.

Учитывая сопряженную систему (7)–(8) в задаче оптимального управления (1)–(6) доказано, что приращение функционала (1), $u_i(t)$ и $\bar{u}_i(t) = u_i(t) + \Delta u_i(t), i = 1, 2$ имеет вид:

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= \int_{t_0}^{t_1} [H_1(t, x(t), \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, x(t), u_1(t), \psi_1(t))] - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, y(t), \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, y(t), u_2(t), \psi_2(t))] dt + \eta(t; \Delta u_1(t), \Delta u_2(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\eta(t; \Delta u_1(t), \Delta u_2(t))$ остаток формулы приращения (9). Исследуя формулу приращения (9) на игольчатой вариации допустимого управления, доказана

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned} \max_{v_1 \in U_1} H_1(\theta, x(\theta), v_1, \psi_1(\theta)) &= H_1(\theta, x(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta)), \\ \max_{v_2 \in U_2} H_2(\xi, x(\xi), v_2, \psi_2(\xi)) &= H_2(\xi, x(\xi), u_2(\xi), \psi_2(\xi)), \end{aligned}$$

выполнялись для всех $v_1 \in U_1, \theta \in [t_0, t_1], v_2 \in U_2, \xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

При некоторых дополнительных предположениях доказаны аналоги линейризованного условия максимума и уравнение Эйлера.

Теорема 2. Пусть множества $U_i, i = 1, 2$ выпуклы, а $f_1(t, x, u_1), K_1(t, \tau, x, u_1), F_1(t, \tau, x, u_1)$ и $f_2(t, y, u_2), K_2(t, \tau, y, u_2), F_2(t, \tau, y, u_2)$ имеют непрерывные производные также по $u_i, i = 1, 2$ соответственно. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{H'_1(\theta, x(\theta), v_1(\theta), \psi_1(\theta))}{du_1}(v_1) - u_1(\theta) &\leq 0, \\ \frac{H'_2(\xi, x(\xi), v_2(\xi), \psi_2(\xi))}{du_2}(v_2) - u_2(\xi) &\leq 0, \end{aligned}$$

выполнялись для всех $v_1 \in U_1, \theta \in [t_0, t_1], v_2 \in U_2, \xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Приведем аналог уравнения Эйлера

Теорема 3. Если множества $U_i, i = 1, 2$ открытые, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{H_1(\theta, x(\theta), v_1(\theta), \psi_1(\theta))}{du_1} &= 0, \\ \frac{H_2(\xi, x(\xi), v_2(\xi), \psi_2(\xi))}{du_2} &= 0 \end{aligned}$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мансимзаде А. Ф., Мансимов К. Б Об одной негладкой задаче оптимального управления с переменной структурой // в кн.: Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения : материалы 5-й Междунар. конф. (DYSC 2023), 2023. С. 99–101.

Мансимзаде Айгюль Фазил кызы
Бакинский государственный университет, Азербайджан
E-mail: aygulmansimzade@gmail.com

Мансимов Камил Байрамали оглы
Бакинский государственный университет, Азербайджан,
Институт систем управления НАН Азербайджана
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com



ОБ ОДНОЙ НЕГЛАДКОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© 2024 г. К. Б. МАНСИМОВ, А. В. КЕРИМОВА

Аннотация. Рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системами нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра с терминальным функционалом. Предполагается, что функции задающие критерий качества удовлетворяют условию Липшица и имеют производные по любому направлению. В терминах производных по направлениям доказано необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: ступенчатая задача оптимального управления, производная по направлению, оптимальное управление, необходимое условие оптимальности.

AMS Subject Classification: 49K15, 49K20

В работе [2] рассмотрена одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений типа Вольтерра, и доказаны ряд необходимых условий оптимальности.

В предлагаемой работе аналогичная задача рассматривается в случае не гладкости функционала качества и доказывается необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям.

Пусть $T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ и $T_2 = \{t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1\}$ — заданные конечные множества натуральных чисел, $U_1 \in R^r, U_2 \in R^q$ — заданные непустые, ограниченные и замкнутые множества.

Предположим, что управляемый двухэтапный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений Вольтерра

$$x_1(t+1) = f_1(t, x_1(t), u_1(t)) + \sum_{\tau=t_0}^t K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)), t \in U_1, \quad (1)$$

$$x_2(t+1) = f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \sum_{\tau=t_1}^t K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)), t \in U_2, \quad (2)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (3)$$

$$x_2(t_1) = G(x_1(t_1)), \quad (4)$$

Здесь $f_i(t, x_i, u_i), i = 1, 2 (K_i(t, \tau, x_i, u_i), i = 1, 2)$ — заданные n -мерные вектор-функции, дискретные по $t((t, \tau))$ и имеющие по $x_i, i = 1, 2$ непрерывные производные при всех $t((t, \tau)), G(x_1)$ — заданная непрерывно дифференцируемая n -мерная вектор-функция, x_{10} — заданный постоянный вектор, $u_1(t), (u_2(t))$ — $r(q)$ -мерный дискретный и ограниченный вектор управляющих воздействий со значениями из $U_1(U_2)$, т. е.

$$u_1(t) \in U_1 \subset R^r, t \in T_1, \quad (5)$$

$$u_2(t) \in U_2 \subset R^q, t \in T_2, \quad (6)$$

Пару $(u_1(t), u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением. На решениях задачи (1)–(2), (3)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$J(u_1, u_2) = \Phi_1(x_1(t_1)) + \Phi_2(x_2(t_2)), \quad (7)$$

Здесь $\Phi_1(x_1)(\Phi_2(x_2))$ — заданные скалярные функции, удовлетворяющие условию Липшица и имеющие производные по любому направлению.

Таким образом, рассматривается двухэтапная задача оптимального управления, описываемая системами нелинейных разностных уравнений с негладким терминальным критерием качества.

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ некоторый допустимый процесс.

Введем в рассмотрение множества

$$f_i(t, x_i(t), U_i) = \{\alpha_i : \alpha_i = f_i(t, x_i(t), v_i(t)), v_i(t) \in U_i, t \in T_i\}, i = 1, 2 \quad (8)$$

$$K_i(t, \tau, x_i(t), U_i) = \{\beta_i : \beta_i = K_i(t, \tau, x_i(\tau), v_i(\tau)), v_i(\tau) \in U_i, \tau \in T_i\}, i = 1, 2 \quad (9)$$

Через $F_i(t, \tau)(n \times n)$ обозначим решения матричных разностных уравнений

$$F_i(t, \tau - 1) = F_i(t, \tau) \frac{\partial f_i(\tau, x_i(\tau), u_i(\tau))}{\partial x_i} + \sum_{s=\tau}^{t-1} \frac{\partial K_i(s, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))}{\partial x_i}, i = 1, 2,$$

$$F_i(t, t - 1) = E,$$

где E — $(n \times n)$ единичная матрица.

Введем обозначения

$$\Delta_{v_i(\tau)} f_i[\tau] = f_i(\tau, x_i(\tau), v_i(\tau)) - f_i(\tau, x_i(\tau), u_i(\tau)), i = 1, 2,$$

$$\Delta_{v_i(\tau)} K_i[s, \tau] = K_i(t, \tau, x_i(\tau), v_i(\tau)) - K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau)), i = 1, 2,$$

$$l_1(v_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left[F_1[t_1, \tau] \Delta_{v_1(\tau)} f_1[\tau] + \sum_{s=\tau}^{t_1-1} F_1[t_1, s] \Delta_{v_1(\tau)} K_1[s, \tau] \right],$$

$$l_2(v_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} F_2[t_2, t_1 - 1] \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \left[F_1[t_1, \tau] \Delta_{v_1(\tau)} f_1[\tau] + \right. \\ \left. + \sum_{s=\tau}^{t_1-1} F_2[t_2, t_1 - 1] \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} F_1[t_1, s] \Delta_{v_1(\tau)} K_1[s, \tau] \right],$$

$$q_1(v_2) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \left[F_2[t_2, \tau] \Delta_{v_2(\tau)} f_2[\tau] + \sum_{s=\tau}^{t_2-1} F_2[t_2, s] \Delta_{v_2(\tau)} K_2[s, \tau] \right]$$

Доказана

Теорема 1. Пусть множества (8)–(9) выпуклы. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1(t_1))}{\partial l_1(v_1)} + \frac{\partial \Phi_2(x_2(t_2))}{\partial l_2(v_1)} \geq 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi_2(x_2(t_2))}{\partial q_1(v_2)} \geq 0, \quad (11)$$

выполнялись для всех допустимых управлений $v_1(t)$ и $v_2(t)$ соответственно.

Эти необходимые условия оптимальности являются довольно общими.

Из них можно получить ряд новых необходимых условий оптимальности, в частности в задаче на минимакс [1]. Необходимые условия оптимальности типа (10) и (11) установлены также в случае выпуклости областей управления и непрерывно-дифференцируемости $f_i(t, x_i, u_i), K_i(t, \tau, x_i, u_i), i = 1, 2$ также по $u_i, i = 1, 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.. М. : Наука, 1990. 432 с.
2. *Мансимов К. Б., Керимова А. В.* Об оптимальности особых управлений в ступенчатой задаче управления разностными уравнениями типа Вольтерра // *Динамические системы и компьютерные науки: Теория и приложения : материалы 5-й Междунар. конф. (DYSC 2023).* 2023. С. 105–108.

Мансимов Камил Байрамали оглы
Бакинский государственный университет, Азербайджан,
Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской
Республики (ИСУ МНОАР)
E-mail: kamilbmansimov @ gmail.com

Керимова Айтадж Вагиф кызы
Бакинский государственный университет, Азербайджан
E-mail: kmansimov@mail.ru



НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫРОЖДЕНИЙ

© 2024 г. М. ДЖ. МАРДАНОВ, Т. К. МЕЛИКОВ

Аннотация. Рассматривается вариационная задача с запаздыванием при вырождении условия Вейерштрасса. Получены необходимые условия типа равенства и неравенства как для сильного, так и для слабого локального минимума. Приведен конкретный пример, демонстрирующий эффективность полученных результатов.

Ключевые слова: вариационная задача с запаздывающим аргументом, сильный (слабый) локальный минимум, необходимые условия типа равенства (неравенства), вырождение в точке.

AMS Subject Classification: 49J20

1. Введение и постановка задачи. В настоящей работе рассматривается следующая векторная вариационная задача с запаздывающим аргументом:

$$S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t), \dot{x}(t-h)) dt \rightarrow \min_{x(\cdot)}, \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0-h, t_0], x(t_1) = x_1, x_0, x_1 \in R^n. \quad (2)$$

Функции $x(t)$, удовлетворяющие граничным условиям (2), назовем допустимыми функциями. Пусть $\bar{x}(\cdot)$ — допустимая функция, для удобства введем следующие обозначения:

$$\bar{L}(\tau) := L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau), \dot{\bar{y}}(\tau)), \quad (3)$$

$$\hat{L}(\tau, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)) := L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi, \dot{\hat{y}}(\tau)),$$

$$\hat{L}(\tau, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)) := L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau), \dot{\hat{y}}(\tau) + \xi),$$

(аналогично обозначается $\hat{L}_x(\tau), \hat{L}_y(\tau), \hat{L}_{\dot{x}}(\tau), \bar{L}_y(\tau), \hat{L}_x(\tau, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot))$ и $\bar{L}_y(\tau, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot))$), где $\tau \in I, \xi \in R^n$;

$$E(\hat{L})(\tau, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)) := \hat{L}(\tau, \xi; \dot{\hat{x}}(\tau)) - \hat{L}(\tau) - \hat{L}_x^T(\tau)\xi,$$

$$E(\hat{L})(\nu, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)) := \hat{L}(\nu, \xi; \dot{\hat{y}}(\nu)) - \hat{L}(\nu) - \hat{L}_y^T(\nu)\xi; \quad (4)$$

$$Q_k(\hat{L})(\tau, \lambda, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)) := \lambda^k E(\hat{L})(\tau, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)) + (1 - \lambda^k) E(\hat{L})\left(\tau, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)\right),$$

$$Q_k(\hat{L})(\nu, \lambda, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)) := \lambda^k E(\hat{L})(\nu, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)) + (1 - \lambda^k) E(\hat{L})\left(\nu, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)\right), \quad (5)$$

где $\xi \in R^n, \lambda \in (0, 1), k = 1, 2$;

$$M(\hat{L}_x)(\tau, \lambda, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)) :=$$

$$\lambda \left[\hat{L}_x^T(\tau, \xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)) - \hat{L}_x^T(\tau) \right] \xi + (1 - \lambda) \left[\hat{L}_x^T\left(\tau, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\hat{x}}(\cdot)\right) - \hat{L}_x^T(\tau) \right] \xi,$$

$$M(\hat{L}_y)(\nu, \lambda, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)) :=$$

$$\lambda \left[\hat{L}_y^T(\nu, \xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)) - \hat{L}_y^T(\nu) \right] \xi + (1 - \lambda) \left[\hat{L}_y^T\left(\nu, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\hat{y}}(\cdot)\right) - \hat{L}_y^T(\nu) \right] \xi, \quad (6)$$

где $\tau, \nu \in \{t, t+h\}$, $\xi \in R^n, \lambda \in (0, 1)$.

Следует отметить, что применение условий Вейерштрасса

$$\begin{aligned} E(\bar{L})(t, \xi; \dot{x}(\cdot)) &\geq 0, \quad \forall t \in I^* \cap [t_1 - h, t_1], \\ E(\bar{L})(t, \xi; \dot{x}(\cdot)) + E(\bar{L})(t+h, \xi; \dot{y}(\cdot)) &\geq 0, \quad \forall t \in I^* \cap [t_0, t_1 - h], \end{aligned} \quad (7)$$

как необходимого условия минимума более эффективно, если в каждой точке $t \in I$ неравенства (7) переходят в равенство только в одной точке $\xi = 0$. Однако может случиться так, что хотя бы в одной точке $\theta \in I$ неравенства (7) перейдут в равенство в нескольких точках $\xi \in R^n$. В этом случае говорят, что условия Вейерштрасса (7) вырождаются в точке θ .

2. Специальные вариации экстремали. Пусть допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является экстремалью задачи (1)–(2) и $\vartheta := (\theta, \lambda, \xi) \in [t_0, t_1 - h] \times (0, 1) \times R^n \setminus \{0\}$ — произвольная фиксированная точка.

Следуя [1], введем следующие специальные вариации экстремали $\bar{x}(\cdot)$:

1) вариация, введенная справа относительно точки $\theta \in [t_0, t_1 - h]$:

$$x^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \bar{x}(t) + q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon), \quad t \in \hat{I}, \quad (8)$$

где функция $q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon)$ определяется как

$$q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \theta)\xi, & t \in [\theta, \theta + \lambda\varepsilon), \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1}(t - \theta - \varepsilon)\xi, & t \in [\theta + \lambda\varepsilon, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in \hat{I} \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \quad (9)$$

и $\lambda \in (0, 1)$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$, $\vartheta = (\theta, \lambda, \xi)$ и $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, $\bar{\varepsilon} = \min\{h, t_1 - \theta - h\}$;

1) вариация, введенная слева относительно точки $\theta \in (t_0, t_1 - h]$:

$$x^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \bar{x}(t) + q^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon), \quad t \in \hat{I}, \quad (10)$$

где функция $q^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon)$ определяется как

$$q^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \theta)\xi, & t \in (\theta - \lambda\varepsilon, \theta], \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1}(t - \theta + \varepsilon)\xi, & t \in (\theta - \varepsilon, \theta - \lambda\varepsilon], \\ 0, & t \in \hat{I} \setminus (\theta - \varepsilon, \theta], \end{cases} \quad (11)$$

где $\lambda \in (0, 1)$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$, $\vartheta = (\theta, \lambda, \xi)$ и $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, $\bar{\varepsilon} = \min\{h, \theta - t_0\}$.

Далее вычисляются приращения функционала (1), соответствующие вариациям (8), (10), и доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функции $L(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов, и допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является экстремалью задачи (1)–(2), далее, вдоль неё для векторов $\eta \in R^n \setminus \{0\}$ и $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta$, $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ условия Вейерштрасса в любой точке интервала $(\bar{t}_0, \bar{t}_1) \subset [t_0, t_1 - h]$ вырождаются, т. е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} E(\hat{L})(t, \eta; \dot{x}(\cdot)) + E(\hat{L})(t+h, \eta; \dot{y}(\cdot)) &= 0, \quad \forall t \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1), \\ E(\hat{L})\left(t, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta; \dot{x}(\cdot)\right) + E(\hat{L})\left(t, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta; \dot{y}(\cdot)\right) &= 0, \quad \forall t \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того, пусть функция $\bar{x}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в интервалах $(\bar{t}_0 - h, \bar{t}_1 - h)$, (\bar{t}_0, \bar{t}_1) и $(\bar{t}_0 + h, \bar{t}_1 + h)$. Тогда:

(i) если функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом в задаче (1)–(2), то выполняется равенство

$$M(\bar{L}_x)(t, \bar{\lambda}, \eta; \dot{x}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)(t+h, \bar{\lambda}, \eta; \dot{y}(\cdot)) = 0, \quad \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1), \quad (13)$$

где функции $M(\bar{L}_x)(\cdot; \dot{x}(\cdot))$ и $M(\bar{L}_y)(\cdot; \dot{y}(\cdot))$ определяются по (6);

(ii) если функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то существует число $\delta > 0$, при котором для каждого $(\bar{\lambda}, \eta, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}) \in (0, 1) \times B_\delta(0) \times B_\delta(0)$, удовлетворяющего

условиям (12), выполняется равенство (13), где $B_\delta(0)$ — замкнутый шар радиуса δ с центром в точке $0 \in R^n$.

Теорема 2. Пусть функции $L(\cdot)$, $L_{\dot{x}}(\cdot)$ и $L_{\dot{y}}(\cdot)$ являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, и функция $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Кроме того, пусть допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом задачи (1)-(2). Тогда

(i) если $\theta \in [t_0, t_1 - h)$ ($\theta \in (t_0, t_1 - h]$) и функция $\bar{x}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема в правой (левой) полукрестности точки $\theta - h$, θ и $\theta + h$, кроме того, вдоль неё для числа $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, а также для векторов $\eta \neq 0$ и $(\hat{\lambda} - 1)^{-1}\bar{\lambda}\eta$ условия Вейерштрасса (7) вырождаются справа (слева) в точке θ , т. е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} & E(\bar{L})(\theta_+, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})((\theta + h)_+, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = \\ & = E(\bar{L})(\theta_+, \bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda})^{-1}\eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})((\theta + h)_+, (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & (E(\bar{L})(\theta_-, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})((\theta + h)_-, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = \\ & = E(\bar{L})(\theta_-, \bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda})^{-1}\eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})((\theta + h)_-, (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

то выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda} [M(\bar{L}_x)(\theta_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)((\theta + h)_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot))] + \\ & + \frac{d}{dt} [Q_2(\bar{L})(\theta_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + Q_2(\bar{L})((\theta + h)_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot))] \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & (\bar{\lambda} [M(\bar{L}_x)(\theta_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)((\theta + h)_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot))] + \\ & + \frac{d}{dt} [Q_2(\bar{L})(\theta_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + Q_2(\bar{L})((\theta + h)_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot))] \leq 0), \end{aligned} \quad (17)$$

где $E(\bar{L})(\cdot)$, $Q_2(\bar{L})(\cdot)$, $M(\bar{L}_x)(\cdot)$ и $M(\bar{L}_y)(\cdot)$ определяются по (4)-(6);

(ii) если $\theta \in (t_0, t_1 - h)$, функция $\bar{x}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности каждой точки $\theta - h$, θ и $\theta + h$, кроме того, вдоль неё для числа $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, а также для векторов $\eta \neq 0$ и $(\bar{\lambda} - 1)^{-1}\bar{\lambda}\eta$ условия Вейерштрасса вырождаются в точке θ , т. е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} & E(\bar{L})(\theta, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = \\ & = E(\bar{L})(\theta, (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h, (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

то справедливо равенство вида

$$M(\bar{L}_x)(\theta, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)(\theta + h, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = 0. \quad (19)$$

Теорема 3. Пусть функции $L(\cdot)$, $L_{\dot{x}}(\cdot)$ и $L_{\dot{y}}(\cdot)$ являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, и функция $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Кроме того, допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом задачи (1)-(2). Тогда существует число $\delta > 0$, при котором справедливы следующие утверждения:

(i) если выполняются предположения, сделанные в (i) части теоремы 2, то вдоль функции $\bar{x}(\cdot)$ для всех точек $(\eta, (\bar{\lambda} - 1)^{-1}\bar{\lambda}\eta, \bar{\lambda}) \in B_\delta(0) \times B_\delta(0) \times (0, 1)$, удовлетворяющих условию (14) ((15)), имеет место неравенство (16) ((17));

(ii) если выполняются предположения, сделанные в (ii) части теоремы 2, то для всех $(\eta, (\bar{\lambda} - 1)^{-1}\bar{\lambda}\eta, \bar{\lambda}) \in B_\delta(0) \times B_\delta(0) \times (0, 1)$, удовлетворяющих условию (18), имеет место равенство (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mardanov M. J., Melikov T. K., Malik S. T.* Necessary conditions for a minimum in classical calculus of variations in the presence of various types of degenerations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. P. 418.

Мисир Джумаил оглы Марданов

Институт математики и механики Министерства науки и образования Азербайджана
Бакинский государственный университет, Азербайджан

E-mail: misirmardanov@yahoo.com

Тельман Кулу оглы Меликов

Институт математики и механики Министерства науки и образования Азербайджана
Бакинский государственный университет, Азербайджан

E-mail: t.melik@rambler.ru



ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. Р. О. МАСТАЛИЕВ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, описываемая стохастической системой гиперболических уравнений первого порядка. Задачи такого вида возникают при моделировании ряда химико-технологических процессов под влиянием случайных шумов. Исследуются на оптимальность особые в смысле принципа максимума Понтрягина управления.

Ключевые слова: стохастическая гиперболическая система уравнений первого порядка, двухпараметрический винеровский процесс, оптимальность, принцип максимума Понтрягина, особое управление, условия оптимальности второго порядка.

AMS Subject Classification: 49K15, 93E20

Допустим, что управляемый процесс в заданной области $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ описывается следующей системой стохастических нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} &= f(t, x, z, y, u) + p(t, x, z) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} &= g(t, x, z, y, u) + q(t, x, y) \frac{\partial W_2(t, x)}{\partial t}, \quad (t, x) \in D \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$z(t_0, x) = a(x), x \in [x_0, x_1], y(t, x_0) = b(t), t \in [t_0, t_1]. \quad (2)$$

Здесь $(z(t, x), y(t, x))$ — $(n+m)$ -мерная искомая вектор-функция, $f(t, x, z, y, u)(g(t, x, z, y, u))$ — заданная $n(m)$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными (z, y) до второго порядка включительно, $p(t, x, z)(q(t, x, y))$ — $(n \times n)((m \times m))$ -мерная измеримая и ограниченная матриц-функция, белые шумы $\partial W(t, x)/\partial t, \partial W(t, x)/\partial x$ являются производными соответственно по t и x от двухпараметрического винеровского процесса $W_1(t, x), W_2(t, x)$ [2], а $a(x), b(t)$ — заданные измеримые и ограниченные на $[x_0, x_1], [t_0, t_1]$ соответственно вектор-функции соответствующих размерностей.

В качестве допустимых управлений берется класс измеримых относительно неубывающей борелевской σ -алгебры $F = \bar{\sigma}(W(\tau, s), t_0 \leq \tau \leq t, x_0 \leq s \leq x)$ и ограниченных на D r -мерных вектор-функций $u(t, x)$ со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \in R^r, (u(t, x) \in L_\infty(D, U))$.

Решение $(z(t, x), y(t, x))$ системы (1)–(2), соответствующим определенному допустимому управлению $u(t, x)$, понимается в смысле [2].

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\begin{aligned} S(u) &= E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} F_3(t, x, y(t, x), z(t, x), u(t, x)) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, z(t_1, x)) + \int_{t_0}^{t_1} F_2(t, y(t, x_1)) dt \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

определенного на решениях системы (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $F_1(x, z), F_2(t, y), F_3(t, x, z, y, u)$ — заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по вектору состояния (z, y) до второго порядка включительно. E — знак математического ожидания.

Считая $u(t, x)$ некоторым допустимым управлением, введем аналог функции Гамильтона — Понтрягина

$$H(t, x, z, y, u, \psi, \xi) = -F_3(t, x, z, y, u) + \psi' f(t, x, z, y, u) + \xi' g(t, x, z, y, u),$$

и обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_v H[t, x] &= \\ &= H(t, x, z(t, x), y(t, x), v, \psi(t, x), \xi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), \xi(t, x)), \\ \Delta_v f[t, x] &= f(t, x, z(t, x), y(t, x), v) - f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)). \end{aligned}$$

Здесь $(\psi(t, x) \times \xi(t, x) \times \alpha(t, x) \times \beta(t, x)) \in L_\infty(D, R^n) \times L_\infty(D, R^m) \times L_\infty(D, R^{n \times n} \times L_\infty)(D, R^{m \times m})$ являются решениями следующей стохастической сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \psi_t(t, x) &= -\frac{\partial H(t, x, z, y, u, \psi, \xi)}{\partial z} + \alpha(t, x) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}, \quad \psi(t_1, x) = -\frac{\partial F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \\ \xi_x(t, x) &= -\frac{\partial H(t, x, z, y, u, \psi, \xi)}{\partial y} + \beta(t, x) \frac{\partial W_2(t, x)}{\partial x}, \quad \xi(t, x_1) = -\frac{\partial F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y}, \end{aligned}$$

Для дальнейших изложений введем в рассмотрение $(n \times n)$ -матричную функцию $R(x, \tau, s)$ и $(m \times m)$ -матричную функцию $Q(t, \tau, s)$ посредством следующих формул

$$\begin{aligned} R(x, \tau, s) &= \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} V_{11}(t, x; \tau, x) H_{zz}[t, x] V_{11}(t, x; s, x) dt - \\ &\quad - V'_{11}(t_1, x; \tau, x) \frac{\partial^2 F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} V_{11}(t_1, x; s, x), \\ Q(t, \tau, s) &= \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} V_{22}(t, x; t, x) H_{yy}[t, x] V_{22}(t, x; t, s) dx - \\ &\quad - V'_{22}(t, x_1; t, \tau) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t_1, x))}{\partial y^2} V_{11}(t, x_1; \tau, s). \end{aligned}$$

Здесь $V_{ij}(t, x; \tau, s) (t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1, x_0 \leq s \leq x \leq x_1), i, j = 1, 2$ — матричные функции, являющиеся решениями следующих стохастических задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{11}(t, x; \tau, s)}{\partial \tau} &= \\ &= -V_{11}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] - V_{12}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s] - V_{11}(t, x; \tau, s) p[\tau, s] \frac{W_1(\tau, s) \tau}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial V_{12}(t, x; \tau, s)}{\partial s} &= \\ &= -V_{11}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] - V_{12}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s] - V_{12}(t, x; \tau, s) q[\tau, s] \frac{W_2(\tau, s)}{\partial s}, \\ \frac{\partial V_{21}(t, x; \tau, s)}{\partial \tau} &= \\ &= -V_{21}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] - V_{12}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s] - V_{21}(t, x; \tau, s) p[\tau, s] \frac{W_1(\tau, s)}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial V_{22}(t, x; \tau, s)}{\partial s} &= \\ &= -V_{21}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] - V_{21}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s] - V_{22}(t, x; \tau, s) q[\tau, s] \frac{W_2(\tau, s)}{\partial s}, \\ V_{11}(t, x; t, s) &= E_1, \quad V_{12}(t, x; \tau, x) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \\ V_{21}(t, x; t, s) &= 0, \quad V_{22}(t, x; \tau, x) = E_1, \quad t = x_0 \leq s \leq t = x, \end{aligned}$$

где E_1, E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Имеет место

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство*

$$E\Delta_v H[\theta, \gamma] \leq 0$$

выполнялось для всех $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1)$, и при $v \in U$.

Следуя [1, 4] введем

Определение. Допустимое управление $u(t, x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, если для всех $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1)$, и при $v \in U$.

$$E\Delta_v H[\theta, \gamma] = 0$$

В работе построена формула приращения второго порядка носящий конструктивный характер и доказаны необходимые условия оптимальности особых управлений.

Теорема 2. *Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t, x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами (1)–(3) необходимо, чтобы для любого $v \in U, (\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1)$ выполнялись следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} A(\theta, \gamma, v) &= E[\Delta_v f'[\theta, \gamma]R(\gamma, \theta, \theta) + \Delta_v H'_z[\theta, \gamma]]\Delta_v f[\theta, \gamma] \leq 0, \\ B(\theta, \gamma, v) &= E[\Delta_v g'[\theta, \gamma]Q(\theta, \gamma, \gamma, \gamma) + \Delta_v H'_y[\theta, \gamma]]\Delta_v g[\theta, \gamma] \leq 0, \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М. : URSS, 2011. 256 с.
2. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений с частными производными первого порядка // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. 45. С. 145–151.
3. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. Необходимые условия оптимальности первого порядка в одной стохастической задаче управления с распределенными параметрами // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2024). М. : ИПУ РАН, 2024.
4. Мансимов К. Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. 10. С. 1505–1520.

Масталиев Рашад Огтай оглы

Университет Азербайджан (УА),

Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской республики (ИСУ МНОАР)

E-mail: rashad.mastaliyev@au.edu.az



ОБ ОПТИМИЗАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО И НЕКОГЕРЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2024 г. О. В. МОРЖИН

Аннотация. Представлены вводные сведения о квантовом управлении как о научном направлении. Дан краткий обзор определенных математических задач оптимального управления для открытых квантовых систем с когерентным и некогерентным управлениями. Приведены соответствующие аналитические и численные результаты.

Ключевые слова: квантовые системы, когерентное управление, некогерентное управление, оптимизация.

AMS Subject Classification: 81Q93, 34H05

*Посвящается
85-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева
и 90-летию со дня рождения проф. В. И. Гурмана*

Математическая теория методов оптимизации, оптимального управления [2–6] имеет большое значение для разных приложений современной математики. Математический анализ возможностей (оптимального) управления разными квантовыми системами образует важное научное направление, которое находится на стыке математики, физики, химии, информатики и др. и использует результаты из разных разделов современной математики (см., например, [1, 8–13]). В качестве примеров можно отметить моделирование управляемой генерации квантовых вентилях, управляемого переноса по спиновой цепочке ([23, 24, 29] и др.). Из математической теории оптимального управления нашли широкое применение принцип максимума Понтрягина (см. обзорную статью [7]), итерационный метод Кротова (см. обзорную статью [14]) и т. д.

Статьи [25, 26] дают важную основу для управления открытыми квантовыми системами с когерентным управлением (учет в гамильтониане) и некогерентным управлением (учет в гамильтониане в связи с лэмбовским сдвигом и в супероператоре диссипации). В этой связи позже был написан ряд статей, рассматривающий разные задачи квантового управления и включающий, например, статьи [15–22, 27, 28].

Планируется в докладе дать краткий обзор по определенным математическим задачам оптимального управления для открытых квантовых систем с когерентным и некогерентным управлениями и по соответствующим аналитическим и численным результатам, используя несколько статей, в которых докладчик является соавтором [15–22]. Получен ряд интересных результатов, включая адаптацию методов проекции градиента для квантовых задач [18–20, 22], в том числе с целевыми функционалами с энтропией фон Неймана для состояний двухкубитной системы [20], сравнение результатов одно-, двух- и трехшаговых методов проекции градиента применительно к задачам для однокутритной системы [22]. Таким образом, планируется сделать в докладе краткий обзор о ряде результатов, в том числе полученных по проекту № 22-11-00330 Российского научного фонда, проектам № 075-15-2020-788, № 075-15-2022-265 Минобрнауки России, стратегическому проекту «Квантовый интернет» в МИСИС по программе «Приоритет-2030».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И. Управление квантовомеханическими процессами. М. : Наука, 1984. 256 с., <https://search.rsl.ru/ru/record/01001212615>.
2. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1994. 339 с., <https://search.rsl.ru/ru/record/01001737539>.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации : в 2 кн. М. : МЦНМО, 2011. 624+434 с., <https://search.rsl.ru/ru/record/01004919362>, <https://biblio.mccme.ru/node/2387>, <https://biblio.mccme.ru/node/2408>.
4. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М. : Наука, 1973. 446 с., <https://search.rsl.ru/ru/record/01007419459>.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд., стер. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1983. 392 с., <https://search.rsl.ru/ru/record/01001144790>.
6. Хлебников М. В., Балашов М. В., Тремба А. А. Оптимизация и управление. М. : URSS, 2024. 448 с., <https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?page=Book&id=316646>.
7. Boscain U., Sigalotti M., Sugny D. Introduction to the Pontryagin maximum principle for quantum optimal control // PRX Quantum. 2021. 2, art. no. 030203, <https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.2.030203>.
8. D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics. 2nd Ed. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2021. 416 p., <https://doi.org/10.1201/9781003051268>.
9. Dong D., Petersen I. R. Learning and Robust Control in Quantum Technology. Cham : Springer, 2023. XVII+252 p., <https://doi.org/10.1007/978-3-031-20245-2>.
10. Koch C. P. Controlling open quantum systems: Tools, achievements, and limitations // J. Phys.: Condens. Matter. 2016. 28, art. no. 213001, <https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/21/213001>.
11. Koch C. P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S. J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F. K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe // EPJ Quantum Technol. 2022. 9, art. no. 19, <https://doi.org/10.1140/epjqt/s40507-022-00138-x>.
12. Kuprov I. Spin: From Basic Symmetries to Quantum Optimal Control. Cham : Springer, 2023. XIII+395 p., <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05607-9>.
13. Kurizki G., Kofman A. G. Thermodynamics and Control of Open Quantum Systems. Cambridge Univ. Press, 2022. XIV+450 p., <https://doi.org/10.1017/9781316798454>.
14. Morzhin O. V., Pechen A. N. Krotov method for optimal control of closed quantum systems // Russian Math. Surveys. 2019. 74. P. 851-908, <https://doi.org/10.1070/RM9835>.
15. Morzhin O. V., Pechen A. N. Maximization of the overlap between density matrices for a two-level open quantum system driven by coherent and incoherent controls // Lobachevskii J. Math. 2019. 40. P. 1532-1548, <https://doi.org/10.1134/S1995080219100202>.
16. Morzhin O. V., Pechen A. N. Maximization of the Uhlmann–Jozsa fidelity for an open two-level quantum system with coherent and incoherent controls // Phys. Part. Nucl. 2020. 51. P. 464-469, <https://doi.org/10.1134/S1063779620040516>.
17. Morzhin O. V., Pechen A. N. Optimal state manipulation for a two-qubit system driven by coherent and incoherent controls // Quantum Inf. Process. 2023. 22, art. no. 241, <https://doi.org/10.1007/s11128-023-03946-x>.
18. Morzhin O. V., Pechen A. N. On optimization of coherent and incoherent controls for two-level open quantum systems // Izv. Math. 2023. 87. P. 1024–1050, <https://doi.org/10.4213/im9372e>.
19. Morzhin O. V., Pechen A. N. Krotov type optimization of coherent and incoherent controls for open two-qubit systems // Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math. 2023. 45. P. 3–23, <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.3>.
20. Morzhin O. V., Pechen A. N. Control of the von Neumann entropy for an open two-qubit system using coherent and incoherent drives // Entropy. 2024. 26, no. 1, art. no. 36. P. 3–23, <https://doi.org/10.3390/e26010036>.
21. Morzhin O. V., Pechen A. N. Generation of C-NOT, SWAP, and C-Z gates for two qubits using coherent and incoherent controls and stochastic optimization // Lobachevskii J. Math. 2024. 45, iss. 2. P. 728–740, <https://doi.org/10.1134/S1995080224600110>.
22. Morzhin O. V., Pechen A. N. Using and optimizing time-dependent decoherence rates and coherent control for a qutrit system // Proc. Steklov Inst. Math. 2024. 324. P. 153–168, <https://doi.org/10.1134/S0081543824010152>.

23. *Murphy M., Montangero S., Giovannetti V., Calarco T.* Communication at the quantum speed limit along a spin chain // *Phys. Rev. A.* 2010. 82, art. no. 022318, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.022318>.
24. *Palao J. P., Kosloff R.* Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations // *Phys. Rev. Lett.* 2002. 89, art. no. 188301, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.188301>.
25. *Pechen A., Rabitz H.* Teaching the environment to control quantum systems // *Phys. Rev. A.* 2006. 73, art. no. 062102, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.062102>.
26. *Pechen A.* Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // *Phys. Rev. A.* 2011. 84, art. no. 042106, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.042106>.
27. *Pechen A. N., Borisenok S., Fradkov A. L.* Energy control in a quantum oscillator using coherent control and engineered environment // *Chaos Solitons Fractals.* 2022. 164, art. no. 112687, <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112687>.
28. *Petruhanov V. N., Pechen A. N.* GRAPE optimization for open quantum systems with time-dependent decoherence rates driven by coherent and incoherent controls // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2023. 56, art. no. 305303, <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ace13f>.
29. *Volkov B. O., Morzhin O. V., Pechen A. N.* Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2021. 54, art. no. 215303, <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abf45d>.

Моржин Олег Васильевич

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Университет науки и технологий МИСИС

E-mail: morzhin.oleg@yandex.ru



ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ВЫМЕТАНИЯ

© 2024 г. О. Н. САМСОНЮК

Аннотация. Рассматривается управляемый процесс выметания с траекториями ограниченной вариации и управляющими воздействиями, заданными векторными борелевскими мерами. Изучаются постановки задач оптимального импульсного управления процессами выметания, условия существования и единственности решений и условия оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное управление, импульсное управление, процесс выметания, решения ограниченной вариации.

AMS Subject Classification: 47J40, 47J20, 49J21

Рассматривается задача оптимального импульсного управления процессами выметания, являющаяся релаксационным расширением задачи оптимального управления (P_0):

$$J_0 = l(x(b), y(b)) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t)) + G(t, x(t))v(t), \quad x(a) = x_0, \quad (1)$$

$$v(t) \in K \quad \text{для п.вс. } t \in T. \quad (2)$$

Задача (P_0) рассматривается на фиксированном промежутке времени $T = [a, b]$. Управление описывается функцией $v(\cdot) \in L^\infty(T, \mathbb{R}^m)$, траектории — абсолютно непрерывными вектор-функциями $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$. Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ задает поточечные ограничения на управление. Начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задано. Предполагается, что K — выпуклый замкнутый конус, функции $l(x, y)$, $f(t, x, y)$, $G(t, x)$ непрерывны по всем переменным и, дополнительно, функции f и G локально липшицевы по переменным x, y и удовлетворяют условию не более чем линейного роста по этим переменным. Функция $y(\cdot)$ играет в управляемой системе (1)–(2) особую роль, она задает траекторию процесса выметания с движущимся множеством $(t, x) \mapsto C(t, x)$, зависящим от состояния системы (1). Функция $y(\cdot)$ является решением дифференциального включения:

$$-\dot{y}(t) \in N_{C(t, x(t))}^P(y(t)) \quad \text{для п.вс. } t \in T, \quad (3)$$

$$y(a) = y_0 \in C(a, x_0), \quad (4)$$

где $N_C^P(y)$ — проксимальный нормальный конус к множеству C в точке y . Заметим, что в случае выпуклого множества C в (3) используется нормальный конус $N_C(y)$ (в смысле выпуклого анализа).

Предполагается, что многозначное отображение $(t, x) \mapsto C(t, x)$ имеет непустые замкнутые значения и является локально липшицевым относительно метрики Хаусдорфа, т.е. для любого компактного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое число $L_Q > 0$, что неравенство

$$d_H(C(s_1, x_1), C(s_2, x_2)) \leq L_Q(|s_1 - s_2| + \|x_1 - x_2\|)$$

выполняется для всех $(s_1, x_1), (s_2, x_2) \in T \times Q$. Здесь через $d_H(A, B)$ обозначено расстояние Хаусдорфа между замкнутыми множествами A и B . Кроме этого, предполагается, что $C(t, x)$ является δ -проксимально регулярным для всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ при некотором $\delta > 0$.

Теоретические результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

Проксимальная регулярность множества C понимается в соответствии со следующим определением [1, 4].

Определение 1. *Замкнутое множество $Z \subset \mathbb{R}^r$ называется δ -проксимально регулярным, если для каждой точки y из δ -окрестности множества Z , т. е.*

$$y \in U_\delta(Z) = \{z \in \mathbb{R}^r \mid d(z, Z) < \delta\},$$

существует единственная проекция $\text{proj}_Z(y)$ на Z , и отображение $y \mapsto \text{proj}_Z(y)$ непрерывно в $U_\delta(Z)$.

Задача (P_0) является вырожденной, и в общем случае у нее отсутствует оптимальное решение с абсолютно непрерывными траекториями и управлениями из $L^\infty(T, \mathbb{R}^m)$. Подробнее этот вопрос рассматривается в [6–8]. Следующий пример иллюстрирует это утверждение.

Рассмотрим задачу минимизации функционала J_0 :

$$J_0(v(\cdot)) = \int_0^\pi |v(t)| dt + \alpha |y_1(\pi) - R| + \beta |y_2(\pi) - R| \quad (5)$$

на процессах выметания, заданных управляемой системой:

$$\dot{x}_1(t) = -y_1(t) + y_2(t), \quad x_1(0) = 0, \quad (6)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)v(t), \quad x_2(0) = 0, \quad (7)$$

$$-\dot{y}(t) \in N_{C(x(t))}(y(t)), \quad y(0) = (0, R). \quad (8)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $T = [0, \pi]$, $v(\cdot) \in L^\infty(T, \mathbb{R})$, $\alpha, \beta \geq 1$. Движущееся множество C задано правилом:

$$C(x) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 \leq R^2\},$$

$r, R > 0$. В задаче (5)–(8) нет оптимального решения. Действительно, нетрудно убедиться, что на каждом управлении $v(\cdot) \in L^\infty(T, \mathbb{R})$ значение функционала больше 1, $J_0(v(\cdot)) > 1$. Однако существует минимизирующая последовательность управлений $\{v_n(\cdot)\}$, на которой $\lim_{n \rightarrow \infty} J_0(v_n(\cdot)) = 1$.

При этом последовательность $\{v_n(t)dt\}$ сходится в смысле распределений к дельта функции $\delta(t - \pi/2)$, а соответствующая последовательность траекторий поточечно сходится к разрывной функции, имеющей ограниченную полную вариацию:

$$x_1(t) = \begin{cases} R \sin(t), & t \in [0, \pi/2), \\ R - R \sin(t - \pi/2), & t \in [\pi/2, \pi], \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi/2), \\ R, & t \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi/2), \\ R, & t \in [\pi/2, \pi], \end{cases} \quad y_2(t) = \begin{cases} R \cos(t), & t \in [0, \pi/2), \\ R - R \cos(t - \pi/2), & t \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Релаксационное расширение задачи (5)–(8) приводит к соответствующей задаче оптимального импульсного управления с разрывными решениями ограниченной вариации и управлениями типа векторной меры.

Заметим, что для заданной абсолютно непрерывной функции $w(\cdot)$ дифференциальное включение

$$-\dot{y}(t) \in N_{C(t, w(t))}^P(y(t)) \quad \text{для п.в. } t \in T, \quad y(a) = y_0 \in C(a, w(a)) \quad (9)$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение $y(\cdot)$ (см. [4]). Однако, если $w(\cdot)$ является разрывной функцией ограниченной вариации, то понятие решения необходимо модифицировать. Известны несколько подходов к обобщению понятия решения дифференциального включения (9) для входов ограниченной вариации $w(\cdot)$. Так понятия BV -решений для дифференциального включения с мерой введены в [2, 3, 5]. В работах [6, 7] показано, что если управление не является скалярным и знакопостоянным, то релаксационное расширение задачи (P_0) нельзя выполнить на основе понятий BV -решений процессов выметания, введенных в указанных работах, и был предложен новый подход к определению BV -решений, основанный на рассмотрении пополнений графиков функций ограниченной вариации $w(\cdot)$.

Через $BV_r^m(T)$ обозначим пространство функций ограниченной вариации $w : T \mapsto \mathbb{R}^m$, непрерывных справа на $(a, b]$. Пусть $w(\cdot) \in BV_r^m(T)$. Возьмем $\tau_1 > 0$ и рассмотрим неубывающие липшицевые функции $\eta : [0, \tau_1] \rightarrow [a, b]$, удовлетворяющие конечным условиям: $\eta(0) = a$, $\eta(\tau_1) = b$. Функцию $\eta(\cdot)$ будем называть параметризацией времени. Определим псевдообратную функцию $\theta : [a, b] \rightarrow [0, \tau_1]$ правилом: $\theta(t) = \inf\{\tau \in [0, \tau_1] \mid \eta(\tau) > t\}$, $t \in (a, b)$, $\theta(a) = 0$, $\theta(b) = \tau_1$. Тогда $\theta(\cdot)$ возрастает на T и непрерывна справа на $(a, b]$. Кроме того, $\eta(\theta(t)) = t$ при всех $t \in [a, b]$.

Для заданных $\eta(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ введем обозначения: $S^\eta := S_d(\theta)$, $d_s^\eta := \theta(s) - \theta(s-)$, где $S_d(\theta)$ — множество точек скачка θ , т. е. $S_d(\theta) = \{t \in [a, b] \mid \theta(t) - \theta(t^-) \neq 0\}$.

Пусть $z^s : [0, d_s^\eta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $s \in S^\eta$, — некоторое множество липшицевых функций с соответствующими константами Липшица $L(z^s)$, $\sup_{s \in S^\eta} L(z^s) < +\infty$.

Будем называть $w_\eta := (w(\cdot), \{z^s(\cdot)\}_{s \in S^\eta})$ пополнением графика функции $w \in BV_r^m(T)$, а $\eta(\cdot)$ согласованной параметризацией времени, если выполняются условия:

- 1) $S_d(w) \subseteq S^\eta$, $z^s(0) = w(s^-)$, $z^s(d_s^\eta) = w(s)$ для всех $s \in S^\eta$,
- 2) функция $\xi : [0, \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ со значениями:

$$\xi(\tau) = w(\eta(\tau)) \quad \text{для всех } \tau \in [0, \tau_1] \setminus \bigcup_{s \in S^\eta} \Delta_s, \quad \Delta_s := [\theta(s-), \theta(s)],$$

$$\xi(\tau) = z^s(\tau - \theta(s-)) \quad \text{для всех } \tau \in \Delta_s \text{ и всех } s \in S^\eta$$

является абсолютно непрерывной.

Обозначим через $\mathcal{T}_w([0, \tau_1], T)$ множество всех параметризаций времени, согласованных с $w(\cdot)$, и введем множество $BV_{gr}^m(T)$ всех пополнений графиков, соответствующее $BV_r^m(T)$, т. е.

$$BV_{gr}^m(T) = \{w_\eta \mid w \in BV_r^m(T), \eta \in \mathcal{T}_w([0, \tau_1], T), \tau_1 \geq b - a\}.$$

Тогда BV -решения процесса выметания (9) определены для каждого $w_\eta \in BV_{gr}^m(T)$.

В докладе будет описано множество BV -решений, а также представлена теорема существования и единственности решения и рассмотрена задача оптимального импульсного управления процессом выметания с решениями из пространства пополнений графиков функций ограниченной вариации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colombo G., Goncharov V. The sweeping processes without convexity // Set-Valued Anal. 1999. 7. P. 357–374.
2. Kopfova J., Recupero V. BV-norm continuity of sweeping processes driven by a set with constant shape // J. Differ. Equations. 2016. 261, № 10. P. 5875–5899.
3. Marques M. D. R. M. Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem // J. Differ. Equations. 1987. 67. P. 145–164.
4. Nacry F., Thibault L. Regularization of sweeping process: old and new // Pure and Applied Functional Analysis. 2019. 4, № 1. P. 59–117.
5. Recupero V. BV continuous sweeping processes // J. Differ. Equations. 2015. 259. P. 4253–4272.
6. Samsonyuk O. N., Timoshin S. A. Optimal impulsive control problems with hysteresis // The International Conference on Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA–2017), 2017. P. 276–280.
7. Samsonyuk O. N., Timoshin S. A. Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis // J. Global Optim. 2019. 74, № 3. P. 565–596.
8. Samsonyuk O. The space-time representation for impulsive control problems with hysteresis // Commun. Comput. Inf. Sci. 2019. 974. P. 351–366.

Ольга Николаевна Самсонок

Иркутский государственный университет (ИГУ)

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: samsonyuk.olga@gmail.com



ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ТРАНСПОРТА К ИССЛЕДОВАНИЮ СЕМАНТИЧЕСКОГО СХОДСТВА ТЕКСТОВ

© 2024 г. О. Н. САМСОНЮК, С. В. СОЛОДУША, П. Ю. СОЛОДУША, М. А. СКУРЫГИНА

Аннотация. Рассматриваются модели математической лингвистики, используемые для исследования семантического сходства текстов. Дан краткий обзор моделей, построенных на основе теории оптимального транспорта.

Ключевые слова: оптимальный транспорт, семантическое сходство.

AMS Subject Classification: 35Q49, 49Q22

В докладе рассматривается задача математической лингвистики об определении семантической близости текстов. В рамках этой задачи изучаются математические модели, относящиеся к теории оптимального транспорта (ОТ) и основанные на сравнении текстов с использованием распределений слов, которые их составляют. Некоторые постановки таких моделей приведены в [3, 5–8]. Они используются при обработке текстов на естественном языке (*NLP*) и, как правило, связаны с методами машинного обучения. Качественное исследование таких моделей важно, поскольку без предварительного семантического анализа и подготовки обучающих выборок трудно интерпретировать результаты применения методов машинного обучения.

Математическая теория оптимального транспорта зародилась в работах Гаспара Монжа (1781 г.) и Леонида Канторовича (1942 г.). С историей возникновения и развития ОТ можно познакомиться в обзоре В. И. Богачева и А. В. Колесникова [1]. С момента своего возникновения эта теория внесла значительный вклад в развитие науки: были выявлены связи задач ОТ с самыми разными направлениями нелинейного анализа, уравнений с частными производными, стохастического анализа и др. [2]. В настоящее время теория оптимального транспорта имеет многочисленные приложения в науках о данных, особенно в решении задач компьютерного зрения, обработки естественного языка и машинного обучения, что связано с появлением приближенных решателей, способных масштабироваться под большие размерности задач [3, 7, 9–11].

В исследовании задач измерения сходства текстов ключевую роль играет выбор функции расстояния между представляющими их объектами. Во многих приложениях эффективной оказалась ОТ метрика Монжа-Канторовича-Вассерштейна (также ее называют Earth Mover's distance (EMD)), задающая, например, расстояние между текстовыми документами через расстояние между соответствующими распределениями вероятностей (гистограммами распределений) [5, 8]. Модификации этой метрики в [12, 13], учитывающие иерархию распределений текстов по темам и тем по словам, позволяют измерять семантическое сходство между словами и небольшими фрагментами текстов.

В данном докладе фокус внимания будет на теоретических и вычислительных аспектах оптимальной транспортировки, не связанных напрямую с машинным обучением, и сравнении методов, основанных на ОТ, с другими известными подходами к прогнозированию и измерению семантического сходства текстов. Так, краткий обзор актуальных методов приведен в [6]. Также отметим работу [4] с обзором методов тематического моделирования при работе с коллекциями документов, это новое направление в интеллектуальном анализе текстов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы // Успехи математических наук. 2012. 67, № 5. С. 3–110.
2. *Богачев В. И., Колесников А. В., Шапошников С. В.* Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки. Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2023. 664 с.
3. *Khamis A., Tsuchida R., Tarek M., Rolland V., Petersson L.* Scalable optimal transport methods in machine learning: A contemporary survey // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2023. P. 1–20.
4. *Kherwa P., Bansal P.* Topic modeling: A comprehensive review // EAI Endorsed Transactions on Scalable Information Systems. 2019. 7, № 24. P. 159623.
5. *Kusner M. J., Sun Yu, Kolkin N. I., Weinberger K. Q.* Proceedings of the 32nd International Conference on International Conference on Machine Learning, 2015.
6. *Lee S., Lee D., Jang S., Yu H.* Proceedings of the 60th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. Dublin, Ireland : Association for Computational Linguistics, 2022.
7. *Peyré G., Cuturi M.* Computational optimal transport: With applications to Data Science. Now Publishers, 2019. 272 p.
8. *Rolet A., Cuturi M., Peyré G.* Fast dictionary learning with a smoothed Wasserstein loss // Proceedings of the 19th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, 2016. 51. P. 630–638.
9. *Santambrogio F.* Optimal transport for applied mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling. Birkhauser, 2015. 353 p.
10. *Villani C.* Topics in optimal transportation. American Mathematical Society, 2003. 370 p.
11. *Villani C.* Optimal transport: Old and new. Heidelberg : Springer, 2008. 976 p.
12. *Yan H., Gui L., He Yu.* Hierarchical interpretation of neural text classification // Computational Linguistics. 2022. 48, № 4. P. 987–1020.
13. *Yurochkin M., Claiici S., Chien E., Mirzazadeh F., Solomon J.* Proceedings of the 33rd International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'19). Vancouver, Canada, 2019.

Самсолюк Ольга Николаевна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: samsonyuk.olga@gmail.com

Солодуша Светлана Витальевна

Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Солодуша Петр Юрьевич

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: peter.solodusha@mail.ru

Скурыгина Мария Анатольевна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: skurygina-maria@yandex.ru



ЕЩЕ РАЗ О ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. В. А. СРОЧКО

Аннотация. Рассматривается невыпуклая линейно-квадратичная задача (ЛКЗ) оптимального управления со знаконеопределенными матрицами квадратичных форм. Проводится преобразование и параметризация целевого функционала. Из полученного семейства идентичных задач выделяются выпуклые объекты. Оптимальный выбор параметров приводит к выпуклой ЛКЗ, которая может служить тестом для улучшения экстремальных управлений в исходной задаче.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, преобразование и параметризация функционала, выпуклая задача, улучшение экстремальных управлений.

AMS Subject Classification: 49J15, 49M25

Рассмотрим ЛКЗ в следующей постановке

$$\begin{aligned} \Phi(u) \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (1) \\ \Phi(u) = \langle x(T), Cx(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Qx(t) \rangle dt, \\ \dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0, \\ V = \{u(\cdot) \in \hat{C}[t_0, T] : u(t) \in U, t \in [t_0, T]\}. \end{aligned}$$

Отметим симметричность ($n \times n$) матриц C, Q , кусочную непрерывность допустимых управлений и компактность множества U .

Выделим благоприятное свойство выпуклости задачи (1)

$$\begin{aligned} C \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(C) \geq 0, \quad Q \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(Q) \geq 0 \\ \Updownarrow \\ \Phi(u) - \text{выпуклый функционал.} \end{aligned}$$

В этом случае принцип максимума (ПМ) есть необходимое и достаточное условие оптимальности и соответствующие итерационные методы порождают минимизирующие последовательности управлений [1, 3].

Нас интересуют невыпуклые задачи следующей структуры

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(C) < 0, \quad \lambda_{\max}(C) > 0 \quad \text{или (и)} \\ \lambda_{\min}(Q) < 0, \quad \lambda_{\max}(Q) > 0 \\ \Updownarrow \end{aligned}$$

знаконеопределенные матрицы C или (и) Q .

В этом случае ПМ теряет свойство достаточности, задача (1) приобретает многоэкстремальный характер и возникает проблема ее глобального решения [4].

Наша цель состоит в разработке процедуры преобразования и параметризации невыпуклого функционала $\Phi(u)$, которая приводит к семейству выпуклых функционалов, соответствующих в определенном смысле исходной задаче.

Опишем основные этапы этого преобразования на примере знаконеопределенной матрицы C при условии $Q \geq 0$.

Этап 1: «бывыпуклая» декомпозиция функционала.

Решая полную проблему собственных значений для матрицы C , получим собственные пары (λ_i, x^i) , $i = \overline{1, n}$ с ортонормированной системой собственных векторов. При этом имеет место спектральное разложение

$$C = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i,$$

где $X_i = x^i(x^i)^T$ – матрицы ранга 1.

Положим

$$I_+ = \{i = 1, \dots, n : \lambda_i > 0\}, \quad I_- = \{i = 1, \dots, n : \lambda_i < 0\}$$

и сформируем неотрицательно определенные матрицы

$$C_+ = \sum_{i \in I_+} \lambda_i X_i, \quad C_- = \sum_{i \in I_-} |\lambda_i| X_i.$$

Возьмем за основу следующее представление для матрицы C

$$C = C_1 - C_2, \quad C_1 = C_+ + \gamma E, \quad C_2 = C_- + \gamma E.$$

Здесь E – единичная матрица, $\gamma > 0$ – параметр.

Отметим положительную определенность матриц C_1 , C_2 , причем

$$\lambda_{\min}(C_1) = \gamma, \quad \lambda_{\max}(C_2) = |\lambda_{\min}(C)| + \gamma.$$

Определим соответствующее представление для $\Phi(u)$.

Введем выпуклые функционалы

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= \langle x(T), C_1 x(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Qx(t) \rangle dt, \\ \Phi_2(u) &= \langle x(T), C_2 x(T) \rangle. \end{aligned}$$

В результате получаем «бывыпуклую» декомпозицию исходного функционала

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u).$$

Этап 2: параметризация функционала.

Определим функционал

$$\Phi_{\alpha, \beta}(u) = \alpha \Phi_1(u) - \beta \Phi_2(u)$$

с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и матрицей $C(\alpha, \beta) = \alpha C_1 - \beta C_2$.

Сформулируем задачу с параметрами

$$\Phi_{\alpha, \beta}(u) \rightarrow \min, \quad u \in V \quad (2)$$

Укажем объединяющую характеристику семейства задач (2).

Сформируем задачу двухкритериальной оптимизации

$$S(u) = (\Phi_1(u), -\Phi_2(u)) \rightarrow \min, \quad u \in V \quad (3)$$

и будем рассматривать ее решения в смысле Парето (p – оптимальные решения).

Далее используем утверждение [2]: любое глобальное решение задачи (2), $\alpha > 0$, $\beta > 0$ является p – оптимальным в задаче (3).

Таким образом, все задачи семейства (2) на уровне глобального решения являются «родственными» относительно объединяющей задачи (3).

Этап 3: выделение выпуклых задач из (2) и оптимизация параметров.

Свойство выпуклости функционала $\Phi_{\alpha, \beta}(u)$ определяется спектральным условием

$$\lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) = \lambda_{\min}(\alpha C_1 - \beta C_2) \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Это неравенство можно упростить условием нормировки $\beta = 1$ и его реализация приводит к α -параметрическому поиску с минимизацией отклонения $(\alpha - 1)^2$.

Для конкретизации результатов используем оценку снизу

$$\lambda_{\min}(C(\alpha, \beta)) \geq \alpha \lambda_{\min}(C_1) - \beta \lambda_{\max}(C_2)$$

и получаем достаточное условие выпуклости в форме линейного неравенства

$$\alpha \geq \frac{\lambda_{\max}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_1)}\beta = \frac{|\lambda_{\min}(C)| + \gamma}{\gamma}\beta.$$

Обозначим: $\mu = |\lambda_{\min}(C)|$, $k(\gamma) = 1 + \frac{\mu}{\gamma}$.

Поставим задачу оптимального выбора параметров (α, β) в смысле расстояния до целевой пары $(1, 1)$

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 \rightarrow \min, \quad \alpha \geq k(\gamma)\beta.$$

Решение:

$$\alpha_*(\gamma) = k(\gamma)\beta_*(\gamma), \quad \beta_*(\gamma) = \frac{1 + k(\gamma)}{1 + k^2(\gamma)}, \quad (\alpha_*(\gamma) > 1, \beta_*(\gamma) < 1).$$

Отметим свойство сходимости при $\gamma \rightarrow \infty$: $\alpha_*(\gamma) \rightarrow 1$, $\beta_*(\gamma) \rightarrow 1$.

Соответствующий выпуклый функционал:

$$\Phi_*(u) = \beta_*(\gamma)[\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_+(u) + \mu\langle x(T), x(T) \rangle],$$

$$\Phi_+(u) = \langle x(T), C_+x(T) \rangle + \int_{t_0}^T \langle x(t), Qx(t) \rangle dt.$$

В заключение укажем варианты использования полученного представления с фиксированным значением $\gamma > 0$.

1. Найдем решение $u^*(t)$ выпуклой задачи оптимального управления

$$\Phi(u) + \frac{\mu}{\gamma}\Phi_+(u) + \mu\langle x(T), x(T) \rangle \rightarrow \min, \quad u \in V. \quad (4)$$

В результате получаем приемлемую оценку сверху для значения исходной задачи (1): $\min\{\Phi(u), u \in V\} \leq \Phi(u^*)$.

2. Основная проблема глобального решения задачи (1) состоит в улучшении экстремальных управлений (удовлетворяющих ПМ, но неоптимальных).

Пусть получено экстремальное управление $\bar{u} \in V$ задачи (1). Применительно к выпуклой задаче (4) это управление, вообще говоря, не является оптимальным, т. е. не удовлетворяет ПМ. Следовательно, в рамках задачи (4) оно гарантированно улучшается стандартными методами [3]. Это улучшение, вообще говоря, сопровождается уменьшением функционала $\Phi(u)$, например, $\Phi(u^*) < \Phi(\bar{u})$.

Таким образом, выпуклая задача (4) может обеспечить процедуру улучшения экстремальных управлений невыпуклой задачи (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев О. В. Еще раз о необходимых условиях оптимальности особых управлений в системе Гурса – Дарбу // Дискретные и распределенные системы : сб. ст. 1981. С. 168–183.
2. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982. 256 с.
3. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Физматлит, 2000. 160 с.
4. Срочко В. А., Антоник В. Г. Методы решения многоэкстремальных задач оптимального управления: учеб. пособие. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2012. 105 с.

Срочко Владимир Андреевич

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: srochko@math.isu.ru



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕТОДОВ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2024 г. О. В. ХАМИСОВ

Аннотация. Рассматриваются задачи глобальной оптимизации. Исследуется возможность аппроксимации другими задачами глобальной аппроксимации, основанное преимущество которых состоит в наличии эффективных и хорошо себя зарекомендовавших на практике методов решения.

Ключевые слова: невыпуклое программирование, квадратичная оптимизация, целочисленное программирование, глубокие отсечения.

AMS Subject Classification: 90C33, 90C26

1. Постановка задачи. Общая постановка задачи, рассматриваемой в докладе, имеет следующий вид

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X}, \quad (1)$$

где $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — полунепрерывная снизу функция, $S \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $X \subset S$ — компактное множество. В такой постановке можно гарантировать лишь существование оптимального решения задачи (1) при условии $X \neq \emptyset$. Доклад посвящён исследованию методов решения задачи (1) при различных дополнительных предположениях относительно f и X .

2. Методы аппроксимации. Общая схема решения состоит, как обычно, в аппроксимации задачи (1) менее сложными вспомогательными задачами [1]. При этом последовательность оптимальных решений вспомогательных задач должна обладать следующим свойством: каждая предельная точка этой последовательности есть точка глобального минимума задачи (1). Различные требования к вспомогательным задачам, гарантирующим данное свойство, разработаны достаточно подробно, так же как и общие схемы, в рамках которых эти требования выполняются ([1], [4], [8]).

При построении вспомогательных задач приходится исходить из возможности их эффективно-го численного решения. Стандартным образом предполагается, что в качестве вспомогательных используются задачи линейного или выпуклого программирования. С практической точки зрения задачи линейного программирования не представляют сложности (даже задачи с 100 000 000 переменных). Эффективность решения задач выпуклого программирования требует некоторого уточнения. В общей постановке (минимизация выпуклой функции на выпуклом множестве) число переменных может достигать до 1000 ([3]). Если несколько сузить класс задач выпуклого программирования до задач, обладающих определённой структурой, позволяющей применять для их решения полиномиальные методы внутренних точек, то число переменных возрастает до 10 000 000.

Если в задаче (1) X — выпуклое множество, то её аппроксимация задачами выпуклого программирования выглядит естественно, поскольку в этом случае, как известно, f можно заменить её выпуклой оболочкой над X и решать эквивалентную задачу выпуклого программирования. Конечно, выпуклую оболочку можно построить лишь в редких случаях, но сам факт теоретической эквивалентности задачи (1) задаче выпуклого программирования стимулирует усилия по поэтапному (приближённому) построению выпуклой оболочки с одновременным доказательством

сходимости к глобальному минимуму. Ситуация меняется, если X — невыпуклое множество, например, целочисленная решётка многомерного политопа. Выпуклая оболочка допустимой области — снова политоп и в случае нелинейности f глобальный минимум f на выпуклой оболочке может и не быть допустимой точкой, даже если f выпукла.

В докладе предлагается использовать в качестве вспомогательных также задачи невыпуклого программирования. Конечно, с теоретической точки зрения прогресса нет — **NP**-трудные задачи аппроксимируются снова **NP**-трудными задачами. Тем не менее подходящий выбор вспомогательных задач позволяет получать неплохие *практические* результаты и основание для такого выбора довольно прагматическое — наличие хорошего решателя.

3. Квадратичные и целочисленные задачи. Как известно, в настоящее время существуют хорошие решатели задач частично-целочисленного линейного программирования. Рассмотрим примеры эффективного использования этих задач в качестве вспомогательных. Пусть в задаче (1) $f(x) = x^T Qx + c^T x$ — невыпуклая квадратичная функция, $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ — ограниченное многогранное множество. Тогда, используя необходимые условия оптимальности, данную задачу можно свести к задаче частичного 0-1 программирования, в которой кроме переменных x равноправное участие принимают переменные λ — множители Лагранжа. Использование «продвинутого» решателя даёт очень неплохие результаты на тестовых задачах, содержащих в исходной постановке до нескольких сотен переменных x [5]. Идейная основа такой редукции проста: записываются необходимые условия оптимальности, в которых все соотношения линейны, кроме соотношений дополняющей нежёсткости, которые введением вспомогательных 0-1 переменных ([2]) сводятся к линейным, содержащим эти самые 0-1 переменные. После несложных преобразований получаем смешанную 0-1 задачу ЛП. И всё-таки не все свойства исходной непрерывной постановки были использованы. Невостребованным оказался хорошо разработанный аппарат локального поиска. Предположим, что мы нашли стационарную точку при помощи какого-либо метода локального спуска. Переписав это решение в терминах задачи частичного 0-1 программирования, гарантированно получаем допустимую точку, что существенно для вычислительной эффективности применяемого 0-1 решателя. Далее, использование тривиального мультистарта нередко даёт точку глобального минимума (только нам об этом не известно). В этом случае последующее применение 0-1 решателя есть практическое доказательство глобальной оптимальности полученного решения.

4. Методы отсечений. Возможно следующее обобщение. Пусть в (1) f — дифференцируемая функция, X — множество, заданное системой равенств и неравенств с дифференцируемыми функциями в левых частях. Используя различные методы локального поиска, находим рекордное решение. Затем записываем необходимые условия оптимальности и, вводя дополнительные 0-1 переменные, избавляемся от условия дополняющей нежёсткости. В итоге получаем смешанную систему равенств и неравенств с непрерывными и дискретными переменными, для которой известна хотя бы одна допустимая точка. Далее формулируем задачу частично-дискретного программирования, состоящую в минимизации f на корнях этой системы. Часть доклада посвящена исследованию эффективности данного подхода для некоторых классов задач вида (1).

Предположим, теперь, что f в задаче (1) — квазивогнутая функция, а X — снова ограниченное многогранное множество. Глобальный минимум в такой задаче достигается в вершине X . Найдём некоторую вершину (что не представляет трудности). Используя ту или иную процедуру из [8] построим плоскость, отсекающую найденную вершину, и будем искать новую вершину X среди неотсечённых. Как было указано в [7] поиск новой неотсечённой вершины можно проводить, решая вспомогательную задачу линейного 0-1 программирования. Следовательно, располагая мощным 0-1 решателем можно находить глобальный минимум в достаточно серьёзных задачах вогнутого программирования. Данный момент является ключевым, так как задача вогнутого программирования имеет принципиальное значение в глобальной оптимизации, сравнимое с важностью задачи линейного программирования в выпуклой оптимизации.

До сих пор мы говорили о применении методики целочисленного программирования в качестве вспомогательной для решения задач непрерывной глобальной оптимизации. Рассмотрим теперь обратное воздействие.

Применение теории и методов непрерывной оптимизации (в данном случае выпуклого программирования) в целочисленном программировании проиллюстрируем на примере построения нового типа отсечений. Пусть X — ограниченное многогранное множество, x^0 — его нецелочисленная вершина. Требуется построить плоскость, отсекающую x^0 и «сохраняющую» все целочисленные точки X . Как известно, данная задача давно решена и существует несколько типов так называемых правильных отсечений. Все они используют активные в x^0 линейные ограничения. Оказывается, можно построить новый тип глубоких отсечений, учитывающий влияние также и неактивных ограничений [6]. Построение такого типа отсечений основывается на решении сепарабельных задач выпуклого квадратичного программирования. Как показывает практика, в ряде случаев такие отсечения эффективны, в частности при доказательстве того, что X не содержит целочисленных точек.

Использование штрафных функций даёт ещё одну возможность применения методов непрерывной оптимизации в дискретной. Предположим, что в задаче (1) компоненты вектора x должны принимать только целочисленные значения. Добавляя к целевой функции слагаемое вида $N \cdot \sum_{i=1}^n \sin^2(\pi x_i)$ при достаточно большом N , можно при соответствующих требованиях, налагаемых на задачу (1), от задачи целочисленной оптимизации перейти к задаче непрерывной оптимизации. Здесь открываются широкие возможности для комбинирования стандартных методов локального поиска, методов непрерывной глобальной оптимизации и методов дискретной оптимизации. В частности, не трудно показать, что штрафное слагаемое можно представить в виде разности двух выпуклых функций, т.е. представляет собой так называемую d.c. (difference convex) функцию. Это свойство даёт возможность применять хорошо разработанную методику d.c. оптимизации (например, использование выпуклых огибающих целевой функции и, как следствие, мощных методов выпуклого программирования) к исследуемой задаче. Можно вместо добавления штрафного слагаемого к целевой функции ввести ограничения $\sin(\pi x_i) = 0, i = 1, \dots, n$ и снова использовать методы d.c. оптимизации. При таком подходе нет необходимости определять значение штрафного параметра N . В общем случае предлагается такая комбинация непрерывной и дискретной оптимизации. Как известно, методы непрерывной глобальной оптимизации, большинство из которых также, как и методы дискретной оптимизации, представляют собой различные реализации общей схемы ветвей и границ, особенно эффективны на первых итерациях: происходит достаточно существенное улучшение оценки глобального минимума снизу и из рассмотрения удаляются области, не содержащие точки глобального минимума. Далее эффективность непрерывной оптимизации снижается и разумно перейти к задаче дискретной оптимизации в исходной постановке. На практике часто проявляется следующий эффект методов непрерывной глобальной оптимизации. От 50 до 70% вычислительных усилий тратится на то, чтобы доказать, что найденное рекордное значение и есть точка глобального минимума. На взгляд автора методы дискретной оптимизации справляются с задачей доказательства глобальной оптимальности лучше. Поэтому предварительное применение методов непрерывной оптимизации в задачах дискретной оптимизации можно рассматривать, как локализацию области, содержащей оптимальное решение.

В докладе приводятся результаты исследования различных вычислительных схем, основанных на идеях описанных выше. Кроме задач квадратичного и целочисленного программирования рассматриваются задачи обратно-выпуклого программирования, задачи с нецелочисленными дискретными переменными. Представлены результаты предварительных численных экспериментов на тестовых задачах и на некоторых прикладных задачах энергетики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск : Наука, 1977. 164 с.
2. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М. : Наука, 1969. 368 с.
3. Нестеров Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М. : МЦНМО, 2010. 280 с.

4. *Норкин В. И.* О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. 32, № 7. С. 992–1006.
5. *Хамисов О. В.* Численное решение специальных задач невыпуклого квадратичного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. 2005. 12, № 4. С. 81–91.
6. *Хамисов О. В.* Глубокие отсечения в вогнутом и линейном 0-1 программировании // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. 20, № 2. С. 294–394.
7. *Cabot A. V.* Variations on cutting plane method for solving concave minimization problems with linear constraints // Naval Research Logistics. 1974. 21. P. 265–274.
8. *Horst R. A., Tuy H.* Global Optimization. (Deterministic Approaches), 3rd, revised and enlarged edition. Springer-Verlag : Berlin, 1996. 730 p.

Хамисов Олег Валерьевич
Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН,
Иркутский государственный университет
E-mail: isuimeiopt@mail.ru



АЛГОРИТМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПАРАМЕТРАМ

© 2024 г. А. А. БАЛАГУРА, О. В. КУЗЬМИН

Аннотация. Продемонстрированы подходы к перечислению различных типов объектов: с ограничениями, помеченных и непомеченных. Разработана алгоритмическая схема построения геометрических интерпретаций семейств комбинаторных чисел. Рассмотрены вопросы перечисления плоских и неплоских деревьев по различным параметрам.

Ключевые слова: деревья, плоские деревья, решеточные пути, алгоритмы перечисления.

AMS Subject Classification: 06A06, 05C05, 05C31, 05E05

1. Введение. Существует множество подходов к перечислению, которые зависят от особенностей перечисляемых объектов [3]. В работе рассматриваются вопросы перечисления решеточных путей и деревьев, представляющих собой объекты разных типов: с ограничениями, помеченных и непомеченных.

В п. 2 рассматривается перечисление объектов с ограничениями — подмножества решеточных путей. Вводятся основные определения изучаемых решеточных путей. Приводится алгоритмическая схема построения перечислительных интерпретаций решеточных путей, соответствующих семейству комбинаторных чисел.

В п. 3 рассматривается перечисление помеченных объектов — подмножества корневых деревьев. Вводятся основные понятия рассматриваемого класса деревьев, приводятся следствия из теоремы — явный вид и свойства обобщенных расщепленных чисел Шредера, алгоритм построения полного разбиения множества.

В п. 4 построены алгоритмы кодирования и декодирования непомеченных плоских деревьев.

2. Решеточные пути. Многие комбинаторные задачи могут быть выражены в терминах перечисления решеточных путей.

Конечным неотрицательным решеточным путем L в пространстве E^2 называют последовательность $L = (v_1, \dots, v_k)$, где $v_i(x_i, y_i) \in N_0^2$, $1 \leq i \leq k$, $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $v_{i+1} - v_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, тогда L называют решеточным путем типа $[a, b]$ если он проходит от a к b . Следуя [7], рассматриваем не все возможные пути на решетке, а только те, которые не проходят через определенное множество «запрещенных» точек плоскости. Пусть числа φ_n определяются рекуррентной формулой

$$\varphi_{n+2} = k_1\varphi_{n+1} + k_2\varphi_n,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, k_1, k_2 \in N$.

Определим операцию сдвига точки $M(x, y)$ на вектор $N(\alpha_x, \alpha_y) : M \otimes N = (x + \alpha_x, y + \alpha_y)$. Сдвиг множества — сдвиг всех его точек. Обозначим $[a_n, b_n]$ — тип решеточных путей: $a_n = (0; Y_n)$, $b_n = (0; X_n)$, $X_n = X(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1)$, $Y_n = Y(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1)$; $Z_n = Z(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1)$ — множество запрещенных точек. Путь, проходящий хотя бы через одну точку из множества Z_n , назовем запрещенным; все остальные — допустимыми. Пусть Λ — множество всех допустимых решеточных путей типа $[a_n, b_n]$ при заданном Z_n . Пусть $A = A(n, \varphi_0, \varphi_1)$ — множество начальных точек; $B = B(k_1, k_2)$, $C = C(k_1, k_2)$, $D = D(k_1, k_2)$, $F = F(k_1, k_2)$

— множества основных точек; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2), \sigma_i = (n, \varphi_0, \varphi_1), i = 1, 2$ — вектор сдвига по начальным точкам; $\delta = (\delta_1, \delta_2), \delta_i = \delta_i(k_1, k_2), i = 1, 2$ — вектор сдвига основных точек; $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ — множество коэффициентов сдвига основных точек.

Построено правило нахождения $A, B, C, D, F, H, \delta, \sigma$.

Алгоритм 1. *Вход алгоритма: соотношение (1) и начальные условия φ_0, φ_1 .*

Шаг 1. Строим $A, B, C, D, F, H, \delta, \sigma$ по правилу 1.

Шаг 2. Находим числа X_n, Y_n по правилу 1.

Шаг 3. Строим множество запрещенных точек: $Z_n = \{A, B \otimes \sigma \otimes \delta, C \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, C \otimes \sigma \otimes \alpha_1 \delta, B \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, B \otimes \sigma \otimes \alpha_2 \delta, D \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, D \otimes \sigma \otimes \alpha_3 \delta, F \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, F \otimes \sigma \otimes \alpha_4 \delta\}$

Выход алгоритма: a_n, b_n, Z_n .

Идея алгоритма 1 состоит в том, что множества строятся один раз, а далее сдвигаются на построенные вектора в зависимости от n . Доказана [6]:

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2, [a_n, b_n]$ и Z_n построены в соответствии с алгоритмом 1, тогда $|\Lambda[a_n, b_n]| = \varphi_n$.*

3. Перечисление помеченных корневых деревьев. Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d есть такое множество вершин, что: одна специально выбранная вершина называется корнем дерева d , оставшиеся вершины (исключая корень) разбиты на $m \geq 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом [2]. Вершины, не имеющие преемников, называются концевыми вершинами. Вершины, имеющие преемников, называют внутренними вершинами. В настоящей работе там, где это специально оговорено, рассматриваются плоские деревья [7], т. е. поддеревья в любой вершине линейно упорядочены.

Пусть $n \geq 2, 2 \leq k \leq n$. Обозначим $D(n, k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин. Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами $1, 2, \dots, n$. Следующую процедуру повторяем до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными [7]. Пометим числом $n + 1$ вершину v такую, что а) вершина v не помечена, а все ее преемники помечены и б) среди всех непомеченных вершин, все преемники которых помечены, v является вершиной, имеющей преемника с наименьшей меткой. Полученное дерево называется помеченным.

$\bar{D}(n, k)$ — множество непомеченных плоских корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

$\bar{D}(n, k, r_1, \dots, r_n)$ — множество деревьев $d \in \bar{D}(n, k)$ имеющих в точности r_i вершин степени $i, 1 \leq i \leq n$. Будем придерживаться введенных в [1] обозначений:

$v(n, k)$ — количество вершин в дереве d , не считая корень,

$w(n, k)$ — количество внутренних вершин в дереве d , не считая корень,

$\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$.

В [2, 3] получен явный вид *обобщенных* (а при $k = 1$ обычных) *чисел Шредера*:

$$S_{nk} = \sum_{2n-2k, n-k} \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1},$$

$$S_{n1} = \sum_{2n-2, n-1} (2n-r_1-2)! \prod_{i=2}^n [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1},$$

где $n \geq 2, 1 \leq k \leq n$, а суммирование ведется по всем разбиениям $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых и $(2n-2)$ на $(n-1)$ слагаемых, соответственно.

В работе [1] построена биекция между корневыми деревьями и разбиениями, тем самым доказана теорема, аналогичная утверждениям, доказанным в [2, 7] методом производящих функций.

Обозначим $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения: $|D(n, k)| = S_{nk}$ и $|D(n)| = S_{n1}$.*

В [2] введены расщепленные числа Шредера второго рода K_{nm} , которые определяют число корневых деревьев с n концевыми вершинами по параметру m — количеству внутренних вершин. В [1] введены обобщения этих чисел — расщепленные обобщенные числа Шредера K_{nmk} , которые определяют число корневых деревьев с n концевыми вершинами по параметрам m — количеству внутренних вершин и k — количеству приемников корня.

Получен ряд следствий и алгоритмов, приведем некоторые из них.

Следствие 1. Для чисел K_{nm} справедливо соотношение

$$K_{nm} = \sum_{2n-2, n-1}^{\prime} (n+m)! \prod_{i=2}^n [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1},$$

где $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n-2$, а суммирование ведется по всем таким разбиениям $(2n-2)$ на $(n-1)$ слагаемых, у которых $r_1 = n-2-m$.

Следствие 2. Для чисел K_{nmk} справедливо соотношение

$$K_{nmk} = \sum_{2n-2k, n-k}^{\prime\prime} \frac{(n+m-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1},$$

где $2 \leq k \leq n$, $m \leq n-k$, а суммирование ведется по всем таким разбиениям $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых, у которых $r_1 = n-k-m$.

Следствие 3. Числа S_{nk} и K_{nmk} связаны соотношением:

$$S_{nk} = \sum_{m=0}^{n-k} K_{nmk}, \quad k \geq 2.$$

Получен следующий алгоритм, который позволяет строить по разбиению β множества $2m$, на m , $m = n-1$ блоков, полное разбиение α множества n .

Алгоритм 2. Вход алгоритма: разбиение β .

Шаг 1. Из разбиения β уберем все r_1 блоков длины 1;

Шаг 2.

а) Отмечаем корень дерева;

б) элементы блока, содержащего максимальную метку, делаем приемниками корня. Длину этого блока обозначим k ;

Шаг 3. Элементы блока i делаем приемниками концевой вершины с меткой j (каждому элементу блока соответствует отдельная вершина с меткой этого элемента), если и только если:

а) j — максимальная метка из всех меток концевых вершин изображенного дерева;

б) блок i содержит максимальную метку из всех меток в блоках;

Шаг 4. Повторяем шаг 3 для всех оставшихся блоков.

Выход алгоритма: k , разбиение α .

Построенное полное разбиение α содержит k внешних подмножеств разбиения.

4. Перечисление плоских корневых непомеченных деревьев. В рамках рассматриваемого подхода приводятся результаты перечисления подмножества непомеченных корневых плоских деревьев [4]. Предложенные алгоритмы позволили доказать существование взаимно-однозначного соответствия между изучаемым множеством деревьев и множеством неубывающих кортежей и получить алгоритм построения и кодирования всего множества изучаемых деревьев. Поскольку в рассматриваемых деревьях важен порядок внутренних вершин, чтобы его зафиксировать будем придерживаться известного способа обхода дерева по правилу 1: будем обходить дерево в соответствии с df-порядком [4], т. е. в глубину, начиная от корня, совершая обход слева направо. Назовем типом дерева $d \in \bar{D}(n, k)$ последовательность $(n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$

степеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева по правилу 1. Обозначим $\bar{D}(n, k, n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$ — множество деревьев $d \in \bar{D}(n, k)$ типа $(n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$. Опишем способ кодирования деревьев неубывающими кортежами.

Алгоритм 3. *Вход алгоритма:* диаграмма дерева $d \in \bar{D}(n, k)$.

Выход алгоритма: код дерева $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$.

Обходим дерево по правилу 1, пусть $v_1, \dots, v_{w(n,k)}$ — последовательность обхода его внутренних вершин (за исключением корня).

Для всех внутренних вершин $v_i, 1 \leq i \leq w(n, k)$ выполняем

считаем $c(v_i)$ — число концевых вершин пройденных до внутренней вершины v_i , кодируем вершину $v_i: a_i := c(v_i) + 1$.

Для описания алгоритма декодирования зададим дерево в виде графа $T = \langle V, R \rangle$, где V — множество вершин, R — множество ребер. Множество V считаем упорядоченным в соответствии с порядком обхода вершин дерева по правилу 1.

Алгоритм 4. *Вход алгоритма:* код дерева $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$, тип дерева $(n_1, \dots, n_{w(n,k)})$.

Выход алгоритма: дерево $T \in \bar{D}(n, k)$, $T = \langle V, R \rangle$.

Пусть $V = \{v_0\}$, R — пустое множество.

Строим все k приемников корня: добавляем вершины v_1, \dots, v_k в V , ребра $(v_0, v_1), \dots, (v_0, v_k)$ — в R .

Для $1 \leq i \leq w(n, k)$ выполняем

обходя по правилу 1 построенное дерево отсчитываем a_i концевых вершин,

строим n_i приемников у a_i -й вершины:

добавляем элементы $v_{k+(n_1+\dots+n_{i-1})+1}, \dots, v_{k+(n_1+\dots+n_i)+1}$ после a_i -й вершины в V ,

переобозначаем a_i -ю вершину через w_{a_i} ,

добавляем элементы $(w_{a_i}, v_{k+(n_1+\dots+n_{i-1})+1}), \dots, (w_{a_i}, v_{k+(n_1+\dots+n_i)+1})$ в R .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балагура А. А., Кузьмин О. В. Перечислительные свойства комбинаторных полиномов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. 18(1). С. 3–14.
2. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск : Наука. Сибир. Издат. фирма РАН, 2000. 294 с.
3. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. М. : Наука, 1979. 152 с.
4. Balagura A. A., Kuzmin O. V. Encoding and decoding algorithms for unlabeled trees // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 1847(1). P. 012027.
5. Balagura A. A., Kuzmin O. V. Generalised Pascal pyramids and their reciprocals // Discrete Mathematics and Applications. 2007. 17(6). P. 619–628.
6. Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A. Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure // Advances and Applications in Discrete Mathematics. 2019. 20(2). P. 229–236.
7. Stanley R. Enumerated combinatorics, Volume 2. Cambridge University Press, 2005. 767 p.

Балагура Анна Александровна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: irk25@rambler.ru

Кузьмин Олег Викторович

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: quzminov@mail.ru



РЕШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

© 2024 г. В. Ч. ВО, С. НОЙЯГДАМ, Д. Н. СИДОРОВ

Аннотация. В последние годы исследование и применение глубоких нейронных сетей для решения уравнений и систем дифференциальных уравнений стало новым и многообещающим направлением исследований [1] [3] [2]. В данной работе предложен метод использования глубоких нейронных сетей для решения задачи моделирования спроса и предложения энергии. Экспериментальные результаты сравниваются с решениями, полученными традиционными численными методами, и показывают, что результаты обоих подходов сопоставимы. Однако метод, использующий нейронную сеть, показал более высокую точность, но требует больше времени на обучение и вычисления.

Ключевые слова: четырёхмерная система спроса и предложения энергии, машинное обучение, глубокое обучение, ИСКУССТВЕННАЯ нейронная сеть, численные методы .

AMS Subject Classification: 68T07, 65L05, 65L20

1. Описание проблемы. Четырёхмерная система спроса и предложения энергии представляет собой задачу, описывающую динамическую связь между предложением и спросом на энергию между двумя областями А и Б, описываемую следующей системой дифференциальных уравнений [4] [5]:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1 x_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{M}\right) - a_2(x_2(t) + x_3(t)) - d_3 x_4(t) \\ x_2'(t) = -z_1 x_2(t) - z_2 x_3(t) + z_3 x_1(t) [N - (x_1(t) - x_3(t))] \\ x_3'(t) = s_1 x_3(t) (s_2 x_1(t) - s_3) \\ x_4'(t) = d_1 x_1(t) - d_2 x_4(t) \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1(t)$ описывает потребность в энергетических ресурсах региона А, $x_2(t)$ описывает поставку энергетических ресурсов из региона Б в регион А, $x_3(t)$ описывает импорт энергетических ресурсов региона А, $x_4(t)$ описывает возобновляемые энергетические ресурсы региона А. $a_i, d_i, z_i, s_i, N, M > 0$ положительные константы, и $N < M$ [5].

При коэффициентах $a_1 = 0.09$, $a_2 = 0.15$, $z_1 = 0.06$, $z_2 = 0.082$, $z_3 = 0.07$, $s_1 = 0.2$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 0.4$, $M = 1.8$, $N = 1$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.06$, $d_3 = 0.08$ и начальных условиях $x_1(0) = 0.82$, $x_2(0) = 0.29$, $x_3(0) = 0.48$, $x_4(0) = 0.1$ данная система уравнений переходит в хаотическое состояние [4].

Целью данной работы является решение данной системы нелинейных дифференциальных уравнений с указанными параметрами, чтобы определить значения временных рядов для задачи спроса и предложения энергии.

2. Построение модели.

Шаг 1: Проектирование нейронной сети с четырьмя выходами, каждый из которых приближен к искомой функции системы дифференциальных уравнений. Такая нейронная сеть для этой задачи может быть описана функцией $F(t, Wb)$ [1] [3] [2], где t — это переменная времени. Wb

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках темы No FZZS-2024-0003.

— это набор весов и параметров модели, которые нужно найти, причем четыре выхода сети описываются векторной функцией:

$$OutPut(F(t, Wb)) = [X_1(t, Wb), X_2(t, Wb), X_3(t, Wb), X_4(t, Wb)]$$

Цель состоит в том, чтобы найти веса Wb так, чтобы: $X_1(t, Wb) \approx x_1(t)$, $X_2(t, Wb) \approx x_2(t)$, $X_3(t, Wb) \approx x_3(t)$, $X_4(t, Wb) \approx x_4(t)$

Шаг 2: Определение диапазона значений для расчета $t = [a, b]$, разделив этот интервал на N точек с различными значениями t . Эти значения затем используются для обучения и вычислений с целью построения модели.

Шаг 3: Построение функции потерь

Функция потерь для этой задачи построена так, чтобы удовлетворять заданной системе дифференциальных уравнений и начальным условиям [1].

Функция потерь, которая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Loss_{DE_X1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| X_1'(t_i, Wb) - [a_1 X_1(t_i, Wb) \left(1 - \frac{X_1(t_i, Wb)}{M}\right) - a_2 (X_2(t_i, Wb) + X_3(t_i, Wb)) - d_3 X_4(t_i, Wb)] \right\|^2 \\ Loss_{DE_X2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| X_2'(t_i, Wb) - (-z_1 X_2(t_i, Wb) - z_2 X_3(t_i, Wb) + z_3 X_1(t_i, Wb) [N - (X_1(t_i, Wb) - X_3(t_i, Wb))]) \right\|^2 \\ Loss_{DE_X3} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| X_3'(t_i, Wb) - [s_1 X_3(t_i, Wb) (s_2 X_1(t_i, Wb) - s_3)] \right\|^2 \\ Loss_{DE_X4} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| X_4'(t_i, Wb) - [d_1 X_1(t_i, Wb) - d_2 X_4(t_i, Wb)] \right\|^2 \end{aligned}$$

Здесь: $Loss_{DE_X1}$, $Loss_{DE_X2}$, $Loss_{DE_X3}$, $Loss_{DE_X4}$ соответственно являются функциями потерь, определенными для 4 выходных значений, которые необходимо предсказать для нейронной сети, чтобы удовлетворять системе уравнений.

Функция потерь, которая удовлетворяет начальным условиям, определяется следующим образом:

$$Loss_{IC} = \sum_{i=1}^4 \|X_i(t_{initial}, Wb) - X_{i_initial}\|^2$$

Где:

$Loss_{IC}$: значение функции потерь относительно начальных условий системы уравнений

$t_{initial}$: значение t в начальный момент времени

$X_{i_initial}$: значение функции, которую необходимо найти в момент времени $t_{initial}$

Совокупная функция потерь модели определяется следующим образом:

$$Loss = \alpha (Loss_{DE_X1} + Loss_{DE_X2} + Loss_{DE_X3} + Loss_{DE_X4}) + \beta Loss_{IC}$$

Здесь α и β — это вещественные значения, эти веса выбираются для оптимизации скорости сходимости модели.

Шаг 4: Использование алгоритмов оптимизации для минимизации функции потерь и обучения глубокой нейронной сети для нахождения наилучших весов модели.

3. Результаты и оценка: С целью валидации проведен вычислительный эксперимент по созданию нейронной сети с 10 скрытыми слоями, каждый из которых содержит 100 нейронов. Для минимизации функции потерь использован метод стохастической оптимизации Adam [1] [3] Интервал времени $t=[0,10]$ разделен на $N=10000$ равномерно распределенных точек. Для численного метода использовался метод RK45 (метод Рунге – Кутты 4/5-го порядка) и затем вычислены результаты на том же интервале времени, сравнив их с результатами, полученными с помощью нейронной сети на N временных точках.

Для сравнения ошибок методов, подставлены найденные решения в исходную систему уравнений. Вычислены MSE (среднеквадратичная ошибка) используя значений левой и правой частей.

Чем меньше значение MSE, тем меньше ошибка, что свидетельствует о том, что найденное решение хорошо соответствует исходной системе уравнений.

Таблица 1. Сравнение погрешностей методов при условии выполнения исходной системы уравнений

Метод	Ошибка X1(t)	Ошибка X2(t)	Ошибка X3(t)	Ошибка X4(t)
Численный метод	1.62271×10^{-08}	3.27319×10^{-08}	3.51944×10^{-09}	7.08781×10^{-09}
Нейронная сеть с 50 тыс. эпох циклов	9.26199×10^{-09}	4.67321×10^{-09}	3.32865×10^{-09}	3.74985×10^{-09}
Нейронная сеть с 100 тыс. эпох циклов	3.59454×10^{-09}	1.44161×10^{-09}	1.73877×10^{-09}	2.61079×10^{-09}

Кроме того, была проведена прямая оценка погрешностей найденных решений двух методов и оценена с помощью показателей R-квадрат, MAE (средняя абсолютная ошибка), MSE (среднеквадратичная ошибка), RMSE (квадратный корень из среднеквадратичной ошибки)

Таблица 2. Сравнение прямых погрешностей между найденными решениями двух методов в случае использования нейронной сети, обученной на 100 тысячах эпох

Индекс оценки	X1(t)	X2(t)	X3(t)	X4(t)
R-квадрат	0.9999997914797834	0.9999463268947142	0.999922406721115	0.9999964515237518
MAE	0.00010399570651288538	0.0003237207415552603	0.00011491863086838755	0.0001033306235835429
MSE	1.5139239639741063e-08	2.1911433081628517e-07	2.1200183285477086e-08	1.5448040579351636e-08
RMSE	0.0001230416175110725	0.0004680964973339206	0.00014560282718916237	0.00012429014675086533

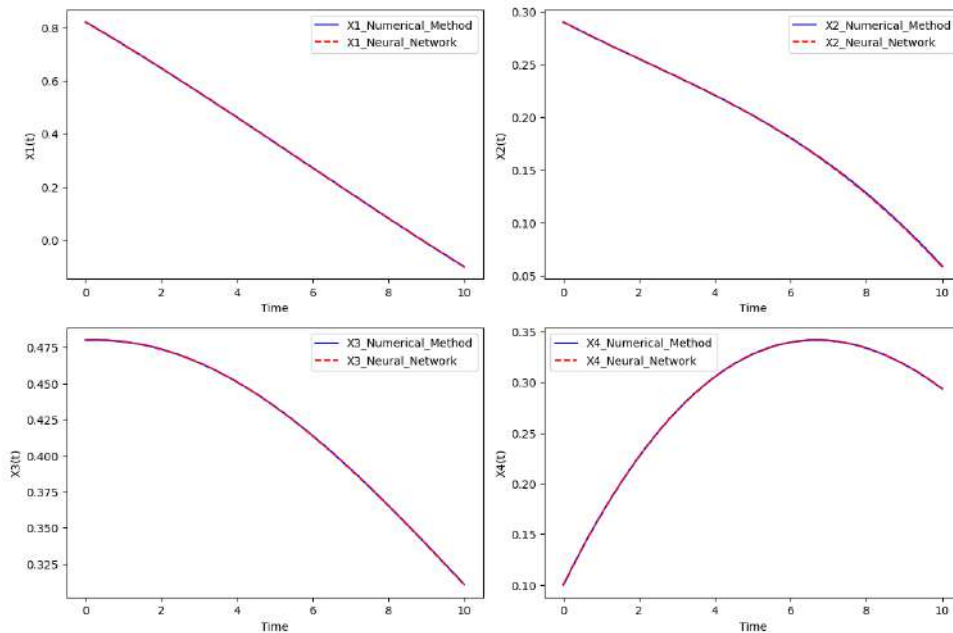


Рис. 1. Сравните результаты между решением, использующим численные методы, и решением, использующим нейронные сети

4. Заключение. Экспериментальные результаты и оценки показывают, что предложенный нами метод, использующий нейронные сети для решения системы спроса и предложения энергии в данном случае, обеспечивает аналогичные решения и более высокую точность по сравнению с численным методом Рунге – Кутты 4/5. С другой стороны, при увеличении количества итераций обучения и времени вычислений модель достигает всё большей точности. Однако недостатком этого метода является требование большого времени вычислений из-за необходимости обучения модели. Кроме того, выбор параметров для достижения наилучшей модели также не является легкой задачей, и эти факторы существенно влияют на скорость сходимости модели. Из вышесказанного следует, что это перспективный метод, но он все еще сталкивается с множеством вызовов, которые необходимо продолжать исследовать в будущем

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gorikhovskii V. I., Evdokimova T. O., Poletansky V. A.* Neural networks in solving differential equations // Journal of Physics: Conference Series. 2022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2308/1/012008>.
2. *Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I.* Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations // IEEE Transactions on Neural Networks. 1998. <https://doi.org/10.1109/72.712178>.
3. *Lu Lu, Xuhui Meng, Zhiping Mao, George Em Karniadakis.* DeepXDE: A Deep learning Library for Solving Differential Equations // Society for Industrial and Applied Mathematics. 2021. <https://doi.org/10.1137/19M1274067>.
4. *Mei Sun, Qiang Jia, Lixin Tian.* A new four-dimensional energy resources system and its linear feedback control // Elsevier. 2007. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.01.125>.
5. *Mei Sun, Yangwei Tao, Xiaofang Wang, Lixin Tian.* The model reference control for the four-dimensional energy supply – demand system // Elsevier. 2011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.04.016>.

Во Ван Чьонг

Иркутский национальный исследовательский технический университет

E-mail: vvtruong@ex.istu.edu; vvtruong@ictu.edu.vn

Нойягдам Самад

Иркутский национальный исследовательский технический университет

E-mail: snoei@istu.edu; samadnoeiaghdam@gmail.com

Сидоров Денис Николаевич

Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН

Иркутский национальный исследовательский технический университет

Харбинский политехнический университет

E-mail: contact.dns@gmail.com



ОБЗОР НЕЙРОСЕТЕЙ В ЗАДАЧАХ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. Р. Р. ГАЛИАКБЕРОВ

Аннотация. Рассматриваются различные типы нейронных сетей, применяемых для решения дифференциальных уравнений: многослойные перцептроны, сверточные нейронные сети, рекуррентные нейронные сети, генеративные состязательные сети и физически-информированные нейронные сети. Рассматривается пример расчётной задачи.

Ключевые слова: машинное обучение, нейронные сети, дифференциальные уравнения, физически-информированные нейронные сети, PINN.

AMS Subject Classification: 68T07

1. Введение. Благодаря стремительному развитию больших данных, алгоритмов и сложных задач, машинное обучение, основанное на анализе данных, стало мощным инструментом для решения сложных задач в области естественных наук и инженерии, включая физику, механику, химию и материаловедение. Однако машинное обучение сталкивается с рядом проблем, таких как высокая стоимость сбора данных, ограниченные возможности для экстраполяции прогнозов и трудности в извлечении объяснимой информации из данных, особенно при анализе сложных физических, инженерных или биологических систем, описываемых соответствующими дифференциальными уравнениями. Для решения дифференциальных уравнений применяют различные типы нейронных сетей, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками. 1. Многослойные перцептроны (MLP). Применение: MLP часто используются для аппроксимации решения дифференциального уравнения как функции от независимой переменной. Преимущества: относительная простота реализации и обучения. Недостатки: могут иметь трудности с аппроксимацией сложных функций и могут быть подвержены переобучению. 2. Сверточные нейронные сети (CNN). Применение: CNN могут быть использованы для решения дифференциальных уравнений в пространстве, например, для задач теплопередачи или моделирования движения жидкостей. Преимущества: способность улавливать пространственные зависимости в данных. Недостатки: требуют больших объемов данных для обучения. 3. Рекуррентные нейронные сети (RNN). Применение: RNN подходят для задач, где решение зависит от истории, например для моделирования динамических систем. Преимущества: способность запоминать прошлые значения и использовать их для прогнозирования будущих. Недостатки: могут быть сложными в обучении и могут страдать от исчезающего градиента. 4. LSTM (Long Short-Term Memory). Применение: LSTM является разновидностью RNN, специально разработанной для решения задач с долговременной зависимостью, например, для моделирования сложных систем. Преимущества: способность запоминать информацию на протяжении длительных промежутков времени. Недостатки: требуют большого объема данных для обучения и могут быть сложными в реализации. 5. Генеративные состязательные сети (GAN). Применение: GAN могут быть использованы для решения дифференциальных уравнений путем генерации решений, которые удовлетворяют условиям уравнения. Преимущества: способность генерировать решения с большим разнообразием. Недостатки: могут быть сложными в обучении и требуют осторожности при интерпретации результатов. 6. Физически-информированные нейронные сети (PINN). Применение: PINN [1] — это

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FZZS-2024-0003).

новый подход, который использует информацию о дифференциальном уравнении для обучения нейронной сети. Преимущества: более точные и стабильные решения, не требующие больших объемов данных. Недостатки: могут быть сложными в реализации и требуют дополнительных усилий для включения физической информации в модель.

Выбор нейронной сети для решения конкретной задачи зависит от типа дифференциального уравнения, характера данных и ожидаемой точности решения, именно поэтому для решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной схемой ядра, можно использовать PINN. С появлением глубокого обучения был предложен более интерпретируемый метод машинного обучения – Физическая информационная нейронная сеть (PINN), которая полностью использует предварительные знания, соответствующие данным обучения в физических и инженерных областях. PINN привлекло значительное внимание благодаря своим возможностям и стало актуальной темой исследований на стыке фундаментальной науки и машинного обучения. Традиционные физико-математические модели для инженерных приложений обычно описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ODE) или дифференциальными уравнениями в частных производных (PDE). Основываясь на идее интеграции физической информации [3], PINN повышает интерпретируемость и обобщаемость машинного обучения, учитывая физические ограничения, которые должны выполняться данными при формировании функции потерь нейронной сети. Этот новый подход к нейронным сетям продемонстрировал свою применимость для моделирования различных нелинейных дифференциальных уравнений. Решения различных PDE могут быть аппроксимированы с помощью PINN, включая нелинейное уравнение Гельмгольца, уравнение Кляйна – Гордона, вязкое уравнение Бургерса с произвольными геометрическими областями, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Эйлера – Лагранжа и нелинейные уравнения дисперсии. Уравнение адвекции-диффузии с пространственным дробным порядком решается с использованием алгоритма PINN с расширением рядов для одномерных и двумерных переменных коэффициентов. Кроме того, Ши и др. предложили физическую ConvNet для решения нелинейных PDE в регулярных или неправильных областях. В последнее время также были решены стохастические дифференциальные уравнения с помощью метода PINN. Кроме того, PINN применяется для решения задач в механике жидкости, механике твердых тел, физической химии и биомедицине. Многие теоретические модели в науке и технике представлены в виде нелинейных интегральных дифференциальных уравнений (IDE) с интегральными терминами. Нелинейность и высокая размерность переменных таких IDE затрудняют их аналитическое решение. Поэтому IDE решаются с использованием различных численных методов, таких как метод гомотопии, вейвлетный численный метод и метод нейронных сетей. В отличие от решения PDE, при решении IDE с помощью PINN требуется дискретизация интегрального оператора. Например, задача IDE может быть преобразована в задачу ODE путем дискретизации интегрального оператора с использованием квадратуры Гаусса – Легендры. Для интегральных операторов дробного порядка операторы целочисленного порядка вычисляются с помощью автоматической дифференциации (AD), а дробного порядка — с использованием числовой дискретизации; эта схема называется fPINN. Внедряя вспомогательный дифференциальный оператор вместо интегрального, IDE решаются с помощью вспомогательной структуры PINN. В данной статье представлена два примера, использующие модель PINN.

Первый пример использования PINN для решения уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу решения одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

где: $u(x, t)$ — температура в точке x в момент времени t , α — коэффициент теплопроводности. Граничные условия: $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$ Начальное условие: $u(x, 0) = 0$

- Выбор нейронной сети: Используем многослойный перцептрон (MLP) с несколькими скрытыми слоями и функцией активации ReLU. Входные данные — координаты x и время t . Выходные данные — температура $u(x, t)$.

- Определение потерь. Функция потерь состоит из двух частей. Потери для удовлетворения дифференциального уравнения:

$$L_{PDE} = \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2. \quad (2)$$

Потери для удовлетворения граничных и начальных условий:

$$L_{BC} = \|u(0, t)\|^2 + \|u(1, t) - 1\|^2 + \|u(x, 0)\|^2. \quad (3)$$

Общая функция потерь:

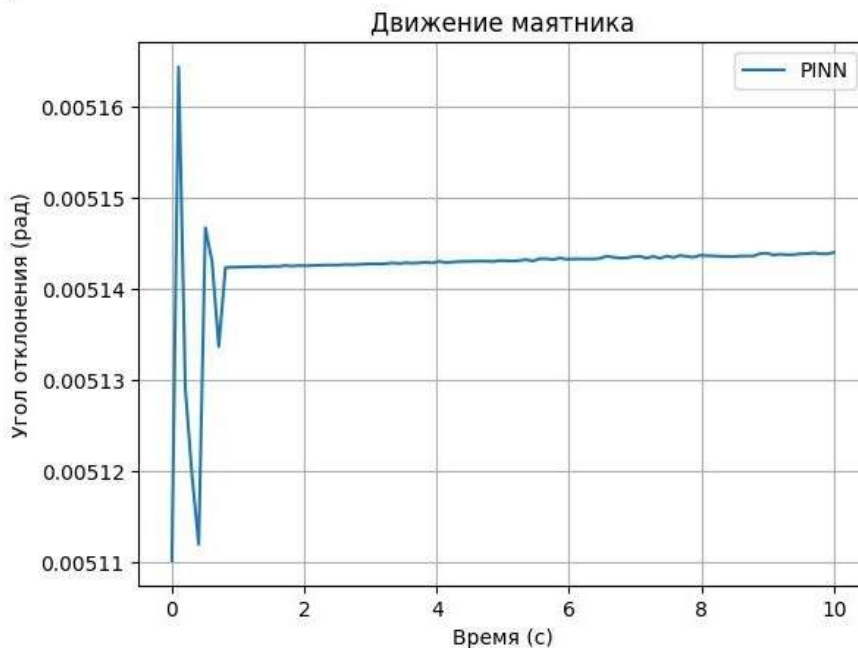
$$L = L_{PDE} + L_{BC}. \quad (4)$$

- Обучение сети. Используем алгоритм градиентного спуска для минимизации общей функции потерь. Обучение выполняется на случайном наборе точек (x, t) в области решения.
- Предсказание. После обучения сеть может использоваться для предсказания температуры $u(x, t)$ в любой точке (x, t) в области решения. Преимущества использования PINN для этой задачи: PINN может получить точное решение уравнения теплопроводности, удовлетворяя как дифференциальному уравнению, так и граничным (начальным) условиям.

Второй пример использования PINN для решения задачи о колебании маятника. Дано уравнение движения маятника:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0, \quad (5)$$

где θ — угол отклонения маятника от вертикали, g — ускорение свободного падения, L — длина маятника. Начальные условия: $g = 9.81$ м/с², $L = 1$ м, $\theta = 0$ рад. Для решения задачи с помощью PINN сначала необходимо создать нейронную сеть, которая будет аппроксимировать решение уравнения. В данном случае нейронная сеть будет иметь входные данные — время t , выходные данные — угол отклонения $\theta(t)$. Затем необходимо обучить эту сеть таким образом, чтобы она удовлетворяла уравнению движения маятника. Для этого можно использовать функцию потерь, которая включает в себя как ошибку предсказания угла отклонения, так и ошибку соответствия уравнению движения. После обучения нейронная сеть сможет предсказывать поведение маятника в различных условиях, включая различные начальные положения и угловые частоты. Ниже представлен график зависимости углового отклонения от времени, полученный с помощью реализованной нейронной сети PINN для этой задачи.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Li H., Shi P., Li X.* Machine learning for nonlinear integro-differential equations with degenerate kernel scheme // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024. P. 108242.
2. *Lou Q., Meng X., Karniadakis G. E.* Physics-informed neural networks for solving forward and inverse flow problems via the Boltzmann-BGK formulation // Journal of Computational Physics. 2021. 447. P. 110676.
3. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational physics. 2019. 378. P. 686–707.

Галиакберов Руслан Рустамович

Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ)

E-mail: ruslan10651999@gmail.com



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СЛИЯНИЯ ДАННЫХ И ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ N-МЕРНЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ АВРОРАЛЬНОГО ОВАЛА

© 2024 г. А. А. ГАРАЩЕНКО

Аннотация. Представлен подход к определению внешней границы аврорального овала с использованием слияния данных и построения дискретных N-мерных интерполяционных сплайнов. Были проведены испытания по подтверждению перспективности данного подхода и эффективности использованных следующих типов данных для изучения природы аврорального овала: изменение ПЭС, ROTI, скорректированное ПЭС.

Ключевые слова: авроральный овал, слияние данных, дискретные N-мерные сплайны.

AMS Subject Classification: 68T10, 68T45

1. Введение. Авроральный овал представляет собой высоковозмущенную под действием частиц солнечного ветра область ионосферы Земли. Действие солнечного ветра в этом районе оказывает негативное влияние на работу систем связи, вызывая помехи в системах навигации и даже нарушая функционирование систем электроэнергетики. В связи с этим становится актуальной задача определения формы аврорального овала, в частности его внешней границы, для возможного снижения негативного влияния описанных выше факторов.

2. Материалы и методы. Уникальность подхода, представленного в данном исследовании, заключается в использовании гетерогенных источников данных и формирования из них мультимодальных изображений посредством их слияния [1]. Для достижения поставленной цели была разработана методика, состоящая из следующей последовательности действий.

На первом этапе происходит считывание гетерогенных данных, для которых производится конвертирование географических координат в геомагнитные. Географические координаты, связанные с полученными данными, являются искаженными [5], и на высотах от 50 километров существенно отличаются от геомагнитных. Для конвертации использовались скорректированные по высоте геомагнитные координаты (AACGM). Затем из полученных данных формируется мультимодальное изображение проекции области северного геомагнитного полюса.

На втором этапе мультимодальные изображения проходят обработку с целью образования формы аврорального овала. Для этого к изображению применяются методы математической морфологии: эрозии, дилатации и замыкания. В рамках нее обрабатываемое двоичное изображение представляется в виде упорядоченного множества чёрно-белых пикселей. После этого применяются методы сегментации овала на изображении.

По выделенному овалу определяется внешняя граница посредством определения минимальной выпуклой оболочки точек в порядке, позволяющем соединить их между собой линией. Внешняя граница определяется с помощью численных методов с использованием интерполяционных замкнутых кривых в виде дискретных N-периодических сплайнов с векторными коэффициентами [3].

Точки минимальной выпуклой оболочки, характеризующей авроральный овал, можно рассмотреть в качестве полюсов будущего сплайна, которые он обязательно должен пересечь. Базисный

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FZZS-2024-0003).

сплайн, на основе которого будет осуществляться интерполяция, описывается следующим образом:

$$Q_{1,n}(j) = \begin{cases} n - j, j \in 0 : n - 1 \\ 0, j \in n : N - n \\ j - N + n, j \in N - n + 1 : N - 1 \end{cases}$$

Здесь n — количество узлов сплайна между соседними полюсами, $N = n \cdot m$ — период сплайна, m — количество полюсов сплайна. Рассчитанные коэффициенты по формуле выше используются для расчета векторов дискретного периодического сплайна:

$$S_1(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \tilde{Q}_{1,n}(j - pn),$$

$$S_v(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Q}_{1,n}(k) S_{v-1}(j - k), v = 2, 3, \dots$$

Здесь v — порядок сплайна, a_p — полюса сплайна. При этом коэффициенты сплайна приводятся к нормализованному виду:

$$\tilde{Q}_{r,n}(j) = \frac{1}{n^{2r-1}} Q_{r,n}(j), j \in Z.$$

Чтобы обеспечить прохождение результирующего сплайна через полюса, требуется первоначально произвести их перерасчет [2]:

$$a_{pv} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Z_v(k)}{\tilde{T}_r(k)} \omega_m^{kp}, p \in 0 : m - 1,$$

$$\tilde{T}_r(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ (2 \sin \frac{\pi k}{m})^{2r} \tilde{\Lambda}_r(k), k \in 1 : m - 1, \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda}_r(k) = \sum_{q=0}^{n-1} \left(2n \sin \frac{\pi qm + k}{N} \right)^{-2r},$$

$$Z_v(k) = F(z_v).$$

Итогом вычисления коэффициентов для интерполяционных сплайнов является последовательность точек, включая промежуточные, через которые проходит внешняя граница аврорального овала.

Для оценки точности определения области покрытия границы в сравнении с эталонным изображением использовался разностный подход, при котором происходит попиксельное сравнение покрытия областей с подсчетом числа пикселей, соответствующих области на изображении с эталона, и числа совпадений местоположений пикселей на сравниваемых изображениях.

В качестве источника физических данных о состоянии ионосферы была выбрана система SIMuRG, система мониторинга и исследования ионосферы с помощью ГНСС. Использовались следующие типы данных: изменение полного электронного содержания (ПЭС) (измерения фазы) в период 2-10 минут [6].

Изменение ПЭС рассчитывается на основе центрированного скользящего среднего (СМА) с заданным окном. Фильтр пропускает частоты только в указанном диапазоне и отбрасывает частоты за его пределами. Перед фильтрацией СМА производится удаление трендов из данных ПЭС с использованием сплайнового сглаживания. Оценка f_S кубического сглаживающего сплайна функции f определяется как минимизатор:

$$\sum_{i=1}^n \{Y_i - f_S(x_i)\}^2 + \lambda \int_a^b f_S''(x) dx$$

где $Y_i = f(x) + \epsilon_i$ — i -й набор из n наблюдений в $[a; b]$, ϵ_i — независимые случайные величины с нулевым средним значением, а λ определяет компромисс между точностью данных и сглаживанием. Положительный коэффициент сглаживания используется для выбора количества узлов. Количество узлов будет увеличиваться до тех пор, пока не будет выполнено условие сглаживания:

$$\sum w_i \{Y_i - f_S(x_i)\}^2 < \lambda,$$

где w_i — веса для сплайн-аппроксимации; в данной системе они все должны быть равны. λ равна длине Y , что должно быть подходящим, если w_i является оценкой стандартного отклонения Y .

Вариации, полученные после удаления тренда и фильтрации СМА, зависят от высоты, которая является следствием геометрии. Для уменьшения данной зависимости амплитуды вариаций, преобразовываются наклонные вариации ПЭС dI_S в эквивалентные вертикальные dI_V как

$$dI_V = \frac{dI_S}{F_K};$$

где F_K обозначает модифицированную функцию однослойного отображения

$$F_K^{-1}(\theta) = \cos \left[\arcsin \left(\left(1 + \frac{h_{max}}{R_E} \right)^{-1} \sin\{\alpha(90 - \theta)\} \right) \right],$$

где θ — высота, h_{max} — высота тонкого слоя ионосферы (506,7 км), R_E — радиус Земли (6371 км), α — поправочный коэффициент (0,9782).

ROTI определяется как стандартное отклонение скорости изменения ПЭС (ROT) за определенный интервал времени N :

$$ROTI = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{m=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}-1} (ROT_m - \overline{ROT})^2}, ROT_m = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Здесь ΔI обозначает изменение ПЭС во времени Δt , которое представляет собой временное разрешение измерений (обычно 30 с). Расчет ROTI выполняется на 5-минутном временном интервале. ROTI для определенного времени включает ROT из интервала $\pm 2,5$ мин, примыкающего к этому времени.

Скорректированное ПЭС представляет собой оценку абсолютного вертикального ПЭС. Для каждой непрерывной наклонной серии ПЭС определяется его минимальное значение I_{min} , а также соответствующая высота θ_{min} и время наблюдения t_{min} . Определяется точка прокальвания ионосферы (IPP) для прямой видимости приемника-спутника в момент t_{min} . Для координат t_{min} и IPP рассчитывается ПЭС по картам ионосферы GIM (I_{GIM}) как трилинейное интерполированное во времени и пространстве значение. Из вертикального I_{GIM} получается наклонное смещение I_{bias} с использованием обратной модифицированной функции однослойного картографирования

$$I_{bias} = I_{GIM} \cdot F_K(\theta_{min}).$$

I_{bias} применяется ко всему наклонному ряду ПЭС, для которого он рассчитан,

$$I'_i = I_i + I_{bias} - I_{min}.$$

Наконец, наклон преобразуется в вертикальный I_V путем прямого преобразования:

$$I_V = \frac{I'_i}{F_K(\theta_i)}.$$

Данные использовались при проверке гипотезы о возможном использовании слияния гетерогенных данных и эксперименте о сравнении с моделью Ovation [4]. В первом случае осуществлялось слияние с искусственно сгенерированными данными, валидация проводилась с использованием изображений, полученных со спутника Polar, принадлежащего NASA. Во втором эксперименте данные из SIMURG использовались без слияния с другими данными. Его целью было сравнение работы модели Ovation с представленным подходом.

3. Результаты. Для первого эксперимента были выбраны данные ROTI, изменений ПЭС в период 2-10 минут, скорректированное ПЭС за 23.10.2002 во временном интервале с 11:25 до 12:02 UTC. В табл. 1 представлены результаты испытаний для пяти моментов времени из указанного выше временного периода. Для второго эксперимента использовались данные за 4.08.2024 в 10:27 UTC. Результаты испытаний представлены в табл. 2.

Таблица 1

Момент времени	Точность сегментации		
	ROTI	ПЭС	Скорректированное ПЭС
11:25	0,0776	0,0785	0,0783
11:33	0,0967	0,1182	0,088
11:42	0,1263	0,1153	0,0903
11:52	0,0621	0,0966	0,0693
12:02	0,0983	0,0721	0,076

Таблица 2

ROTI	ПЭС	Скорректированное ПЭС
0,1759	0,2284	0,2047

В соответствии с результатами можно заключить, что все типы данных достаточно точно характеризуют поведение аврорального овала и могут использоваться для его сегментации. Варьирование точности незначительно и существенно выделяется для скорректированного ПЭС в сравнении с ПЭС и ROTI для первого эксперимента. Результаты второго эксперимента без слияния данных показывает несколько больший процент ошибок при сравнении с результатами работы модели OVATION.

4. Заключение. В ходе данной работы был представлен подход к определению внешней границы аврорального овала с использованием слияния данных и построения дискретных N-мерных интерполяционных сплайнов. Проведенные испытания показывают перспективность использования данного подхода и представленных типов данных (изменение ПЭС, ROTI, скорректированное ПЭС).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананченко И. В., Гайков А. В., Мусаев А. А.* Технологии слияния гетерогенной информации из различных источников (DATA FUSION) // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2013. 45, № 19. С. 98–105.
2. *Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В.* Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование // Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. 2009. С. 371-381.
3. *Чашников Н. В.* Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и поверхности Кунса : дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2010.
4. *Machol J. L. et al.* Evaluation of OVATION Prime as a forecast model for visible aurorae // Space Weather. 2012. 10, № 3.
5. *Shepherd S. G.* Altitude-adjusted corrected geomagnetic coordinates: Definition and functional approximations // Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2014. 119, № 9. P. 7501–7521.
6. *Yasyukevich Y. V. et al.* SIMuRG: System for ionosphere monitoring and research from GNSS // GPS solutions. 2020. 24. P. 1–12.

Александр Алексеевич Гаращенко

Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ)

E-mail: garashchenkoa@mail.ru



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ВЫРАЖАЕМОЕ ЧЕРЕЗ ЧИСЛА ЛАХА

© 2024 г. Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА

Аннотация. Изучается вероятностное распределение, порожденное разбиениями n -множества на упорядоченные подмножества. Считается, что все разбиения являются равновероятными. Доказана асимптотическая нормальность данного распределения.

Ключевые слова: числа Лаха, распределение, производящая функция, математическое ожидание, дисперсия.

AMS Subject Classification: 05A15, 60E05

1. Упорядоченные разбиения и числа Лаха. Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Это множество разбивается на непустые подмножества. Если число таких подмножеств равно k , где $k = \overline{1, n}$, то число разбиений равно l_k^n , где l_k^n — знакоположительное число Лаха [2]. Как известно, числа Лаха могут быть определены рекуррентным соотношением

$$l_k^n = l_{k-1}^{n-1} + (n-1+k)l_k^{n-1}, k = \overline{0, n}, n = \overline{1, \infty}. \quad (1)$$

При этом полагают

$$l_n^n = 1, n = \overline{0, \infty}; l_k^n = 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Очевидно, что $l_0^n = 0$, если $n > 0$,

$$l_1^n = n!, n = \overline{1, \infty}$$

2. Вероятностное распределение. Предположим, что исходное множество было разбито на случайное число упорядоченных подмножеств. Рассмотрим случайную величину ξ_n — число подмножеств, на которые было разбито n -множество. Считаем, что при каждом n все разбиения являются равновероятными. Тогда распределение величины ξ_n имеет вид

$$P\{\xi_n = k\} = \frac{l_k^n}{\sum_{i=1}^n l_i^n}, k = \overline{1, n}, n = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

Обозначим

$$l_n = \sum_{i=1}^n l_i^n.$$

Изучим асимптотическое поведение распределения (2). Для этого рассмотрим производящую функцию чисел Лаха $l_n(x) = \sum_{k=1}^n l_k^n x^k$, а затем и производящую функцию исследуемого распределения $P_n(x) = \sum_{k=1}^n P\{\xi_n = k\} x^k$.

Лемма. При любом натуральном n все корни многочлена $l_n(x)$ различны, действительны и неположительны.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Поскольку $l_1(x) = x$, $l_2(x) = x(x+2)$, то убеждаемся, что при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение справедливо.

Предположим, что при некотором натуральном n многочлен $l_n(x)$ имеет n действительных неположительных корней. Покажем, что тогда многочлен $l_{n+1}(x)$ имеет $n+1$ действительных неположительных корней. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$H_n(x) = x^n e^x l_n(x). \quad (3)$$

Очевидно, что эта функция имеет те же корни, что и многочлен $l_n(x)$, кроме того корень $x = 0$ кратности n и корень $x = -\infty$. Следовательно, общее число корней (с учетом кратных) равно $2n + 1$.

Продифференцируем функцию $H_n(x)$. Имеем

$$H'_n(x) = ((x + n)l_n(x) + xl'_n(x))x^{n-1}e^x.$$

На основании рекуррентного соотношения (1),

$$H'_n(x) = x^{n-1}e^x l_{n+1}(x).$$

Но в силу формулы (3), $H_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x l_{n+1}(x)$. Следовательно,

$$H_{n+1}(x) = x^2 H'_n(x).$$

По теореме Ролля, функция $H'_n(x)$ имеет корни в промежутках между корнями функции $H_n(x)$. Таким образом, $H'_n(x)$ имеет $2n$ неположительных действительных корней, т.е. число таких корней у функции $H_{n+1}(x)$ равно $2n + 2$.

Поскольку

$$l_{n+1}(x) = x^{-n-1}e^{-x}H_{n+1}(x),$$

то очевидно, что этот многочлен имеет $n + 1$ действительный неположительный корень, что и требовалось доказать. \square

Замечание. Так как производящая функция изучаемого распределения (2) имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{l_n} l_n(x),$$

то ее корни совпадают с корнями функции $l_n(x)$, а значит, являются действительными и неположительными. Отсюда следует, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов. Поэтому асимптотическое поведение распределения (2) зависит от поведения дисперсии рассматриваемой случайной величины ξ_n .

3. Числовые характеристики. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины ξ_n . Имеем:

$$E\xi_n = \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^n kl_k^n.$$

Используя рекуррентную формулу (1), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kl_k^n &= \sum_{k=1}^n (l_k^{n+1} - l_{k-1}^n - nl_k^n) = \\ &= l_{n+1} - (n+1)l_n, \end{aligned}$$

т. е.

$$E\xi_n = \frac{l_{n+1}}{l_n} - n - 1. \quad (4)$$

Применяя дважды рекуррентную формулу к l_k^{n+2} , получим

$$l_k^{n+2} = l_{k+1}^{n+1} + (n+1)l_k^{n+1} + kl_{k-1}^n + knl_k^n + k^2l_k^n.$$

Выразив отсюда $k^2l_k^n$, найдем

$$E\xi_n^2 = \frac{l_{n+2}}{l_n} - (3+2n)\frac{l_{n+1}}{l_n} + 2n + n^2,$$

т. е.

$$D\xi_n = \frac{l_{n+2}}{l_n} - \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 - \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1. \quad (5)$$

Для выяснения асимптотического поведения распределения величины ξ_n нужно изучить поведение дисперсии этой величины при $n \rightarrow \infty$.

4. Предельные теоремы. Сначала получим асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$ для $\frac{l_{n+1}}{l_n}$ и $\frac{l_{n+2}}{l_n}$.

В работе [1] дано следующее определение допустимой функции:

Пусть $p(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Если коэффициенты a_n степенного ряда функции $e^{p(t)}$ являются положительными числами для всех достаточно больших n , то функция $e^{p(t)}$ является допустимой.

В этой же работе приведена следующая теорема:

Теорема 1. Если $f(t)$ — допустимая целая функция со степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, то

$$a_n \sim f(r_n) r_n^{-n} (2\pi b(r_n))^{-\frac{1}{2}},$$

где $r_n > 0$, а функция b определяется равенствами

$$a(r_n) = n, \quad a(r) = r \frac{d}{dr} \ln f(r), \quad b(r) = r \frac{d}{dr} a(r).$$

Рассмотрим двойную производящую функцию чисел Лаха [2]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n l_k^n x^k \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{xt}{1-t}\right).$$

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

Таким образом, имеем разложение функции $e^{\frac{t}{1-t}}$ в степенной ряд с коэффициентами $a_n = l_n \frac{1}{n!}$. Очевидно, что $p(t) = \frac{t}{1-t} = \sum_{i=1}^{\infty} t^i$, т.е. $p(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Так как $a_n > 0$ при $n > 0$, то функция $e^{\frac{t}{1-t}}$ является допустимой и можно применить теорему 1. Имеем:

$$l_n \sim n! \exp\left(\frac{r_n}{1-r_n}\right) r_n^{-n} (2\pi b(r_n))^{-\frac{1}{2}},$$

$$a(r) = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad b(r) = a(r) \frac{1+r}{1-r}, \quad b(r_n) = n \frac{1+r}{1-r},$$

где

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{\sqrt{4n+1}}{2n}.$$

На основании данных результатов, находим:

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = n + \sqrt{n} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6}$$

$$\left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 = n^2 + 2n\sqrt{n} + \frac{5}{2}n + \frac{7}{4}\sqrt{n} + O(1), \tag{7}$$

$$\frac{l_{n+2}}{l_n} = n^2 + 2n\sqrt{n} + \frac{7}{2}n + \frac{13}{4}\sqrt{n} + O(1). \tag{8}$$

Подставляя асимптотические разложения (6), (7), (8) в формулы (4) и (5), приходим к утверждению:

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$

$$E\xi_n = \sqrt{n} - \frac{1}{4} + o(1),$$

$$D\xi_n = \frac{\sqrt{n}}{2} + O(1).$$

Следовательно, $D\xi_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. доказана

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{D\xi_n}P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \rightarrow 0,$$

где $x_{nk} = \frac{k - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендер Э. А. Асимптотические методы в теории перечислений // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. 1979. С. 266–310.
2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М. : ИЛ, 1963. 288 с.

Колокольникова Наталья Арсеньевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: k_n_a_05@mail.ru



КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ И ПЕРЕСЧЕТА КОМПОЗИЦИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЗНАЧЕНИЯ ЕГО НАТУРАЛЬНЫХ ЧАСТЕЙ

© 2024 г. О. В. КУЗЬМИН, М. В. СТРИХАРЬ

Аннотация. Предложен алгоритм перечисления и пересчета композиций натурального числа на основе комбинаторных объектов иерархической структуры, таких как треугольник Паскаля, пирамида Паскаля и гиперпирамида Паскаля. Получено рекуррентное соотношение, лежащее в основе перечисления и пересчета композиций натурального числа с произвольным количеством ограничений на значения его натуральных частей, а также формула для пересчета в явном виде и производящая функция числа композиций.

Ключевые слова: композиция числа, гиперпирамида Паскаля, пирамида Паскаля, треугольник Паскаля, полиномиальные коэффициенты, триномиальные коэффициенты, биномиальные коэффициенты, рекуррентное соотношение, производящая функция.

AMS Subject Classification: 05A05, 11B75, 11B39, 11P81

1. Введение. Структура многих информационных объектов может быть представлена в виде иерархической или рекурсивной зависимости, что приводит к возможности описания этих объектов с помощью формальных комбинаторных множеств, для которых применимы различного рода алгоритмы комбинаторной генерации [1–3]. Для реализации процедуры построения элементов ряда комбинаторных множеств в конце XX века было введено понятие обобщенной пирамиды Паскаля [4]. В 2010 г. были изучены сечения обобщенной пирамиды Паскаля [6], которые позволили расширить число исследуемых комбинаторных множеств и получить ряд новых иерархических и рекурсивных зависимостей. Частными случаями обобщенной пирамиды Паскаля являются всеми известные треугольник и пирамида Паскаля [4]. Данная работа является продолжением изучения композиций натурального числа с ограничениями [5], в которой были выведены формулы для пересчета числа композиций с тремя ограничениями на основе плоских сечений пирамиды Паскаля и получены рекуррентные соотношения и производящие функции числа таких композиций. Мы же получим новое рекуррентное соотношение между элементами гиперпирамиды Паскаля, которое позволит пересчитывать и перечислять композиции натурального числа с произвольным количеством ограничений на значения его натуральных частей.

2. Основные понятия. Композицией натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы других натуральных чисел [8]. Слагаемые, составляющие композицию, называются ее частями, а количество частей называется длиной композиции. Известно, что для числа n существует 2^{n-1} композиций, из которых $\binom{n-1}{k-1}$ композиций имеют длину k . Число $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ являются биномиальными коэффициентом или числом сочетаний из n элементов по k элементов. Например, для числа 5 существует $2^{5-1} = 16$ композиций, из которых, $\binom{5-1}{3-1} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ композиций имеют длину 3:

$$\begin{aligned}
5 &= 5 = 4+1 = 1+4 = 3+2 = 2+3 = \\
&= 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = \\
&= 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1,
\end{aligned}$$

В данной работе мы накладываем ограничения на значения натуральных частей, а именно исследуем композиции натурального числа m , состоящие строго из частей m_1, m_2, \dots, m_s , которые, для определенности в дальнейшем, образуют упорядоченное множество натуральных чисел, т.е. $m_1 < m_2 < \dots < m_s$. Например, для числа $m = 5$ существует 13 композиций, состоящих строго из частей $m_1 = 1, m_2 = 2$ и $m_3 = 3$:

$$\begin{aligned}
5 &= 3+2 = 2+3 = \\
&= 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = \\
&= 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1.
\end{aligned}$$

Не умоляя общности рассматриваемых случаев, далее положим, что наибольший общий делитель всех частей равен 1, т.е. $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$. В противном случае, если $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = \mu \neq 1$, то рассматриваемые композиции числа m будут существовать только в случае $m = \mu k$, $k \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ и число таких композиций будет совпадать с числом композиций числа k , составленных из частей $m_1/\mu, m_2/\mu, \dots, m_s/\mu$, где $\gcd(m_1/\mu, m_2/\mu, \dots, m_s/\mu) = 1$.

Полиномиальными коэффициентами называются числа вида

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{s-1}! (n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1})!}, \quad (1)$$

которые являются обобщениями биномиальных и триномиальных коэффициентов [4] на случай размерности s и совпадают с коэффициентами разложения многочлена:

$$\begin{aligned}
&(x_0 + x_1 + \dots + x_{s-1})^n = \\
&= \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \dots \sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-2}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} x_0^{k_1} x_1^{k_2} \dots x_{s-1}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1}}.
\end{aligned}$$

Гиперпирамидой Паскаля [9] называется бесконечный иерархический s -мерный массив полиномиальных коэффициентов, удовлетворяющих следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} &= \binom{n}{k_1-1, k_2, \dots, k_{s-1}} + \binom{n}{k_1, k_2-1, \dots, k_{s-1}} + \dots + \\
&+ \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}-1} + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}
\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\binom{0}{0, 0, \dots, 0} = 1; \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} = 0, \text{ если } \min(n, k_1, k_2, \dots, k_{s-1}, n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1}) < 0.$$

Применяемое представление (1) упорядочивает расположение полиномиальных коэффициентов в гиперпирамиде Паскаля, подобно тому, как расположены биномиальные и триномиальные коэффициенты соответственно в треугольнике и пирамиде Паскаля [4].

3. Соотношения для перечисления и пересчета композиций. Введем в рассмотрение сумму полиномиальных коэффициентов, составляющих m -е гиперплоское сечение [7] гиперпирамиды Паскаля, $m \in \mathbf{N}$, следующего вида:

$$\begin{aligned}
&S_m \left(\frac{m_1}{m_s} - 1, \frac{m_2}{m_s} - 1, \dots, \frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) = \\
&= \sum_{i_1=0}^{\lfloor \frac{m}{m_1} \rfloor} \sum_{i_2=0}^{\lfloor \frac{m}{m_2} - i_1 \rfloor} \dots \sum_{i_{s-1}=0}^{\lfloor \frac{m}{m_{s-1}} - i_1 - i_2 - \dots - i_{s-2} \rfloor} \binom{m}{\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1}}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Теорема 1. Число различных композиций натурального числа m , состоящих из натуральных частей m_1, m_2, \dots, m_s , где $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$, равно сумме полиномиальных коэффициентов, составляющих m -е гиперплоское сечение гиперпирамиды Паскаля вида (2).

Замечание. Число $S_0 = \binom{0}{0, 0, \dots, 0} = 1$, соответствует вершине гиперпирамиды Паскаля и условно определяет количество композиций числа $m = 0$, состоящих из любых натуральных частей. Поэтому далее берем значения m из множества неотрицательных целых чисел, т. е. считаем, что $m \in \mathbf{N}_0$, это позволит в дальнейшем получить рекуррентные соотношения и производящие функции для числа композиций.

Обозначим $S_m = S_m\left(\frac{m_1}{m_s} - 1, \frac{m_2}{m_s} - 1, \dots, \frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right)$ и рассмотрим последовательность $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}$ композиций натурального числа m , состоящих строго из натуральных частей m_1, m_2, \dots, m_s , где $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$.

Теорема 2. Последовательность чисел $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + \dots + S_{m-m_s} \quad (3)$$

с начальными условиями

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{m_1-1} = 0; \quad (4)$$

S_m , при $m = m_1, \dots, m_2 - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}, \quad (5)$$

S_m , при $m = m_2, \dots, m_3 - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}, \quad (6)$$

...

S_m , при $m = m_{s-2}, \dots, m_s - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + \dots + S_{m-m_{s-1}}. \quad (7)$$

Сопоставим последовательности сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}$ формальный степенной ряд и запишем производящую функцию для этих сумм.

Теорема 3. Производящая функция сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$, имеет вид

$$f_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \dots - x^{m_s}}.$$

4. Алгоритм перечисления и пересчета композиций. Используя полученные выше рекуррентные соотношения (3) – (7), можно составить следующий комбинаторный алгоритм для перечисления и пересчета композиций натурального числа m с ограничениями на значения его натуральных частей. Приведем пример для четырех частей, т. е. считаем, что $s = 4$.

1. Задаем значения натурального числа m и, в порядке возрастания, значения частей m_1, m_2, m_3, m_4 , так, чтобы $\gcd(m_1, m_2, m_3, m_4) = 1$.

2. Находим число композиций, используя рекуррентные соотношения (3)–(7) и составляем композиции по правилу:

2.1. Для $m = 0$ согласно замечанию, приведенному после теоремы 1, в любом случае формально считаем, что $S_0 = 1$. Благодаря этому в дальнейшем сможем найти композиции самих частей.

2.2. Если $1 \leq m \leq m_1 - 1$, то согласно начальным условиям (4) не существует ни одной композиции числа m , составленной из частей m_1, m_2, m_3, m_4 .

2.3. Если $m_1 \leq m \leq m_2 - 1$, то согласно соотношению (5) существует столько композиций числа m , сколько существует композиций числа $(m - m_1)$ и все они состоят только из частей вида m_1 . Находим их путем добавления к имеющимся композициям числа $(m - m_1)$ справа числа m_1 .

2.4. Если $m_2 \leq m \leq m_3 - 1$, то число композиций находим согласно рекуррентной формуле (6) и составляем композицию числа m только из частей m_1 и m_2 следующим образом: ко всем

существующим композициям числа $(m - m_1)$ добавляем справа число m_1 , а ко всем имеющимся композициям числа $(m - m_2)$ добавляем справа число m_2 .

2.5. Если $m_3 \leq m \leq m_4 - 1$, то число композиций находим согласно соотношению (7) и составляем композицию числа m только из частей m_1, m_2 и m_3 следующим образом: ко всем найденным композициям числа $(m - m_1)$ добавляем справа число m_1 , ко всем существующим композициям числа $(m - m_2)$ добавляем справа число m_2 , а ко всем имеющимся композициям числа $(m - m_3)$ добавляем справа число m_3 .

2.6. Начиная с $m = m_4$ число композиций находим согласно формуле (3) и составляем композицию числа m уже из всех частей m_1, m_2, m_3 и m_4 следующим образом: ко всем существующим композициям чисел $(m - m_1), (m - m_2), (m - m_3)$ и $(m - m_4)$ добавляем справа соответственно числа m_1, m_2, m_3 и m_4 .

3. Как только m достигает заданного значения, получаем окончательный результат.

5. Заключение. В работе получено явное выражение для пересчета композиций натурального числа m , состоящего из частей $m_1, m_2, \dots, m_s, m_1 < m_2 < \dots < m_s, \gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$, а также рекуррентное соотношение, на основе которого построен комбинаторный алгоритм пересчета и пересчета композиций, и производящая функция числа композиций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А. В., Бирюков Е. С.* О практической реализации некоторых алгоритмов, связанных с проблемой композиции чисел // Кибернетика и программирование. 2015. № 1. С. 27–45.
2. *Кручинин В. В.* Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа n // Доклады ТУСУР. 2008. 17, № 3. С. 113–119.
3. *Кручинин В. В.* Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе применения производящих функций многих переменных и приближенных вычислений // Доклады ТУСУР. 2022. 25, № 1. С. 55–60.
4. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск : Наука, 2000. 294 с.
5. *Кузьмин О. В., Стрихарь М. В.* Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023) : материалы 5 Междунар. конф. Иркутск, 18-23 сент. 2023 г. М. : ВИНТИ РАН, 2024.
6. *Кузьмин О. В., Серегина М. В.* Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации // Дискретная математика. 2010. 22, № 3. С. 83–93.
7. *Стрихарь М. В.* Актуальные задачи прикладной дискретной математики : сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2024.
8. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.
9. *Okbaeva N.* Pascal's triangle, its planar and spatial generalizations // in: International Scientific Journal. Theoretical and Applied Science. Philadelphia, USA, 2022. 03 (107). P. 815–823.

Кузьмин Олег Викторович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: quzminov@mail.ru

Стрихарь Марина Валерьевна
Иркутский государственный университет путей сообщения (ИрГУПС),
Забайкальский институт железнодорожного транспорта (ЗабИЖТ)
E-mail: mseryogina@mail.ru



ПРОСТОЙ АЛГОРИТМ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА (3,2), ОСНОВАННЫЙ НА МАТРИЧНЫХ КОДИРУЮЩИХ КНИГАХ ОСОБОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ

© 2024 г. С. М. КУЛИКОВ, В. А. СУРИМОВА

Аннотация. Описывается простой и быстрый (3,2) алгоритм разделения секрета, использующий для кодирования и декодирования особым образом определенные матрицы.

Ключевые слова: разделение секрета, тени, секрет.

AMS Subject Classification: 94A62

1. Введение. Алгоритмы разделения секрета совмещают в себе средства защиты данных от естественных и рукотворных угроз. (k, p) алгоритм разделения секрета — это кодирующая система, в которой секретное число S кодируется в k чисел, называемых тенями (shadows) (y_1, \dots, y_k) , а для декодирования теней обратно в x достаточно любых p чисел — теней из (y_1, \dots, y_k) . Наиболее известным классическим алгоритмом разделения секрета является схема Шамира и Блекли [1; 2]. Базовой идеей алгоритма Шамира является факт, что полином степени $k - 1$ в 2-мерном пространстве определяется координатами k точек, а секрет — точка пересечения с осью Y . Среди недостатков схемы Шамира является, то что необходимо помнить и где-то хранить порядок теней. Алгоритмы разделения секрета обычно используются для разового разделения секретного ключа ограниченной длины, например 512-битной строки. Для разделения секрета, которым является файл целиком, необходимы простые и быстрые методы, работающие в реальном времени в процессе его передачи или архивирования.

2. Теория. Будем рассматривать (k, p) схему разделения секрета, в которой строка байтов произвольной длины кодируется в k строк байтов такой же длины. Кодирование проходит последовательно в цикле побайтно и независимо. Таким образом, в цикле по байтам строки будем делить каждый байт — секретное целое число в диапазоне $(0-255)$ на k чисел-теней. Упростим задачу и будем рассматривать только $(3, 2)$ пороговую схему. Будем полагать, что для восстановления секретного байта, будет достаточно знать любые 2 из теневых байтов, независимо от порядка, в котором они кодировались. Формально $(3, 2)$ схема может быть представлена двумя функциями:

1. Декодирующей функцией 3 аргументов:

$$S = S(x, y, z), \quad (1)$$

где S — секрет, x, y, z — 3 тени.

2. Линк-функцией связи теней:

$$f(x, y, z) = c. \quad (2)$$

На основе первой функции строятся алгоритмы для кодирования секрета S в 3 тени $(S \Rightarrow (x, y, z))$ и обратного кодирования любой пары теней в секрет $S (xy, xz, yz \Rightarrow S)$. Вторая функция необходима для связывания 3 теней, т. е. вычисление одной, если известны 2 другие. Основное требование $(3, 2)$ схемы — любые два аргумента из трех (x, y, z) однозначно определяют значение функции S . То есть

$$S(x, y, z) = S(x, y, \cdot) = S(x, \cdot, z) = S(\cdot, y, z), \quad (3)$$

где $(.)$ — неизвестное значение, $S(x, y, .)$ — проекция 3-мерной функции $S(x, y, z)$ на плоскость (X, Y) . Далее мы попробуем сконструировать простейшее семейство функций, удовлетворяющих требованию 3. Для того чтобы удовлетворялось требование (3), точки (x, y, z) должны принадлежать 2-мерной поверхности, определяемой функцией связи (2), которая, в свою очередь, была бы симметричной к любой перестановке аргументов, т. е.

$$f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x). \quad (4)$$

Такие функции типа «статистики» известны в математической статистике, например:

- 1) $f = x + y + z$
- 2) $f = x^2 + y^2 + z^2$
- 3) $f = x * y * z$

3. Решение. Рассмотрим функции связи, которые связывают точки, соответствующие целым числам x, y, z в диапазоне $(0-m)$:

$$z = \text{Mod}(m - x - y, m). \quad (5)$$

Уравнение (5) означает, что основная декодирующая функция $S(x, y)$ должна иметь равные значения в следующих 6 точках, где $x > y$:

$$\begin{aligned} S(x_1, y_1) &= S(y_1, x_1) = S(y_1, m - x_1 - y_1) = \\ &= S(x_1, m - x_1 - y_1) = S(m - x_1 - y_1, x_1) = S(m - x_1 - y_1, y_1). \end{aligned} \quad (6)$$

А также независимо и в следующих 6 точках, где $x < y$

$$\begin{aligned} S(x_2, y_2) &= S(y_2, x_2) = S(y_2, 2m - x_2 - y_2) = \\ &= S(x_2, 2m - x_2 - y_2) = S(2m - x_2 - y_2, x_2) = S(2m - x_2 - y_2, y_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Это значит, что декодирующая функция $S(x, y, z)$ имеет два набора доменов области определения: D1–D6, D7–D12 для соответствия квазисимметрии, определяемых соотношениям (6), (7) (см. рис. 1). Итак, мы определили требования для декодирующей функции схемы (3,2) в конечном m -поле с тем, чтобы независимо от порядка любая пара теней однозначно обеспечивала обратное кодирование секрета. Так как мы в дальнейшем собираемся написать алгоритм для побайтного кодирования файлов, то будем полагать, что $m=255$.

Для первичного заполнения кодами матрицы S мы должны их выбрать по возможности равномерно из диапазона $(0-255)$ разместить в доменах D1, D7 и симметрично отобразить на всю область определения. Это можно сделать двумя способами.

Можно «обойти» все точки (элементы матрицы) доменов D1, D7 и присваивать случайное целое, равномерно распределенное в диапазоне $(0-255)$.

Детерминированный способ — это «обойти» все точки (элементы матрицы) доменов D1, D7 по заранее намеченной траектории (например построчно сканируя) и просто присваивать следующий код из строки целых $(0-255)$. Число элементов в доменах D1, D7 равно $m/6$. В случае $m=255$ любой целое число в диапазоне $(0-255)$ будет использовано в качестве кода примерно $255/6=42,5$ раз.

4. Программа и эксперименты. Разработанный алгоритм был реализован в виде программы на языке Fortran. Программы разделения секрета была реализована в виде программы, в которой на вход поступала полная директория диска с файлами-секретами произвольного формата. На выходе файлы-тени помещались в три отдельные папки на том же или другом диске. Файлы-тени имели те же имена и с точностью до байта тот же объем, что и файл-секрет. Работа программы фактически эмулировала копирование файлов. Для эксперимента была выбрана папка, содержащая 50 фотографий общим объемом 250 Мб. Было выполнено 5 прогонов на одних и тех же данных. Вычисления проводились на обычном ноутбуке с процессором Intel Core i7. Среднее суммарное время копирования с разделением заняло в среднем заняло 86 с, при этом чистое время кодирования примерно 0,08 с. Основное время работы программы заняли процедуры чтения-записи и побайтной распаковки-упаковки.

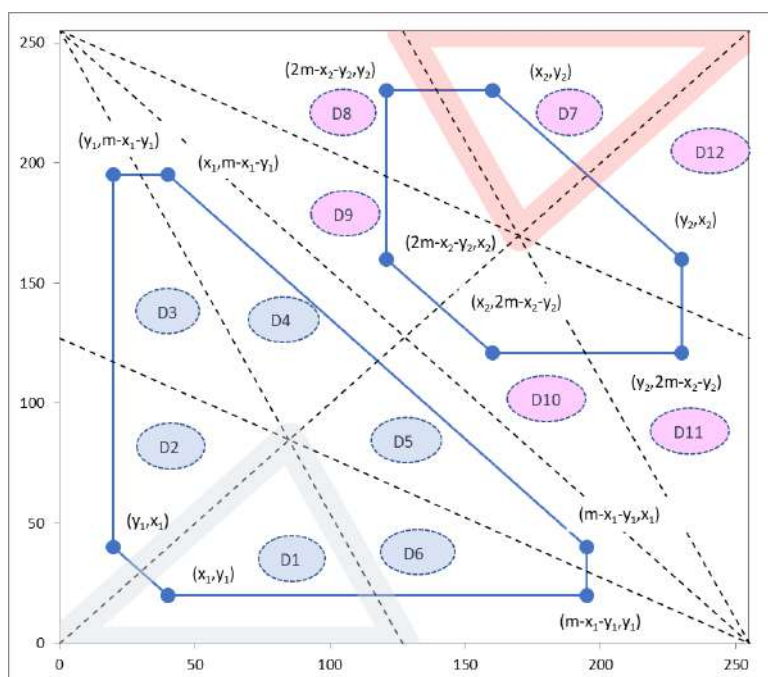


Рис. 1. Область определения функции $S(x,y,z)$. Под-области или домены: D1–D6 — это области симметрии для функции связи (6), D7–D12 — области симметрии для функции связи (7). Линии на рисунке соединяют точки с одинаковыми значениями функции S .

Для сравнения была написана простая программа, реализующая (3,2) схему Шамира. И если общее время выполнения программы заняло тоже время, то чистое время кодировки примерно в 5-6 раз превышало время, потраченное программой, реализующей наш предложенный метод.

5. Заключение. В работе описывается простой алгоритм разделения секрета, основанный на чтении матриц кодирования и декодирования специального вида. Преимуществом алгоритма является его простота и скорость работы. На этапе кодирования теней из секрета выполняются две операции: генерации случайного целого числа и выбор значения из кодирующей матрицы, на этапе декодирования только обращение к матрице декодирования. Также преимуществом является то, что нет необходимости хранить и использовать номер тени, они абсолютно «равноправны» по любым двум из трех восстанавливается секрет. Алгоритм пригоден для программ хранения файлов любого размера для секретного хранения в трех хранилищах, время шифрования практически не отличимо от времени простой операции чтения-записи. Настоящий алгоритм может быть использован в системах с ответственным хранением персональных данных, когда требуется быстрый и надежный доступ к разделенным секретным хранилищам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blakley G. R.* Safeguarding cryptographic keys // Proceedings of the 1979 AFIPS National Computer Conference. Montvale : AFIPS Press, 1979. P. 313–317.
2. *Shamir A.* How to share a secret // Commun. ACM. 1979. 22, № 11. P. 612–613.

Куликов Сергей Михайлович
 НМИЦ гематологии Минздрава России
 E-mail: smkulikov@mail.ru

Суримова Валерия Александровна
 НМИЦ гематологии Минздрава России
 E-mail: surimova.lera@mail.ru



ОБЗОР ТАКСОНОМИЙ ВЕБ-ТАБЛИЦ

© 2024 г. В. В. ПАРАМОНОВ, А. О. ШИГАРОВ

Аннотация. Таблицы повсеместно применяются для представления реляционных данных в различных средах и форматах. В частности, в веб-среде на сегодняшний день существует большое количество таблиц. Одним из наиболее популярных форматов их представления в данной среде является HTML. Веб-таблицы могут использоваться как для представления данных (так называемые подлинные таблицы), так и для компоновки веб-страниц (неподлинны). В свою очередь подлинны таблицы могут иметь различные особенности форматирования, организации функциональных областей в совокупности непосредственно влияющие на подходы к автоматическому пониманию таблиц и извлечению из них данных. Одной из распространенных проблем при извлечении информации из подлинных веб-таблиц является определение функциональных и компоновочных типов таблиц. В настоящее время исследователям и практикам доступен широкий спектр таксономий типов таблиц. Имеющиеся таксономии могут быть использованы для классификации типов таблиц, что позволит выбрать алгоритмы их дальнейшей обработки. В большинстве существующих таксономий представлены общие типы таблиц, однако отсутствуют соглашения по их именованию. Это привело к появлению запутанной терминологии. В данной работе приводится сопоставление существующих таксономий типов таблиц, выявляющее их схожесть и различия.

Ключевые слова: извлечение таблиц, определение классов типов, таксономия таблиц, компоновка таблиц, понимание таблиц.

AMS Subject Classification: 68V99, 68T10

1. Введение. Современные исследования срезов содержимого сети Интернет обнаружили наличие там большого количества веб-таблиц, содержащих реляционные данные. В свою очередь, эти данные могут быть использованы во многих приложениях, таких как обработка информации, извлечение знаний, обобщение статей, классификация документов, интеграция данных и т.д. [12]. Следует отметить, что веб-таблицы могут иметь различную структуру организации взаимосвязанных элементов, определяющую её тип. Множество типов таблиц составляет таксономию. Таксономии используются для классификации таблиц. Понимание типа, в свою очередь, делает возможным автоматизированное проведение ролевого и структурного анализа данных. В настоящее время исследователями предложены различные таксономии отличающиеся как терминологией, так и содержанием. В работе рассматриваются и сопоставляются наиболее известные таксономии.

2. Таксономии типов HTML-таблиц. Одной из первых таксономий была представлена в работе Ю. Ванга и Я. Ху [13], опубликованной в 2002 г. В ней авторы предлагают фундаментальное деление всего множества таблиц на два типа: *подлинны* и *неподлинны*. *Подлинны* — таблицы, которые используются для представления данных, а, в свою очередь, *неподлинны* — нужны для компоновки веб-страниц. Подлинны таблицы зачастую могут содержать ценные данные из различных областей знаний. Можно сказать, что в этом случае структура таблицы используется для передачи логики взаимосвязей между данными в ячейках.

В 2008 г. М. Кафарелла с соавторами представили одну из фундаментальных в данной области работ, в которой описываются высококачественные реляционные данные, представленные в веб-таблицах [2]. В своем исследовании авторы представляют фундаментальное разделение таблиц на 2 типа: *реляционные* и *нереляционные*. Данные типы соотносятся с *подлинными* и *неподлинными*

Исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований Сибирского отделения РАН, проект №121030500071-2.

таблицами соответственно в классификации Ю. Ванга и Я. Ху. Именно реляционные таблицы содержат информацию, представляющую интерес для извлечения и последующей обработки.

На основе существующих типов Е. Крестан и П. Пантель [3,4] предлагают более подробную таксономию. Для определения типов таблиц авторы использовали синтаксический анализатор позволивший извлечь 2,6 млрд веб-таблиц, которые не содержат внутренних таблиц в своих ячейках. В ходе анализа этих таблиц было предложено разбиение таблиц на определенные типы и описаны проблемы, связанные с извлечением данных из них. Эта таксономия типов таблиц показана на рис. 1. В рамках нашего исследования интерес представляют реляционные таблицы.



Рис. 1. Таксономия Е. Крестана и П. Пантеля

Л. Лаутерт [7] к лексическим функциям, представленным в [2], добавил ещё пять новых функций: положение внутренних веб-таблиц и соотношение ячеек, содержащих неупорядоченные списки, упорядоченные списки. Предложенная методика использована для извлечения таблиц из англоязычной Википедии, новостных сайтов и т. д. Разработанная таксономия подразделяется на основную и вторичную классификации. Основная включает в себя такие типы веб-таблиц, как *горизонтальная*, *вертикальная*, *матричная*. Во вторичной представлены новые, не описанные до этого типы веб-таблиц: *краткая* — содержит объединенные ячейки; *разделенная* — имеет последовательные упорядоченные повторяющиеся метки; *вложенная* — таблица является частью другой таблицы; *многозначная* — таблица, в ячейках которой имеется несколько значений; *составная многозначная* — содержит многозначные данные, относящиеся к одному определенному типу. Следует отметить, что во вторичной классификации таблицы могут относиться к различным типам одновременно.

Дж. Эбериус и К. Брауншвейг представляют два подхода к классификации веб-таблиц [5]. Первый объединяет классификацию макетов с обнаружением таблиц в единую классификационную задачу. Второй трактует обе задачи как отдельные последовательные задачи классификации. В обоих создаются функции, с помощью которых считывается структура таблицы, определяется согласованность данных в ячейках, наличие тегов заголовков и т. д. Авторы в своём исследовании опираются на работу [4] и обнаруживают такие таблицы, как *неподлинные* или *компоновочные* и *подлинные*, которые, в свою очередь, делятся на *вертикальные*, *горизонтальные*, *матричные*, и *другие* — включающие все таблицы не вошедшие в указанные типы.

Взяв за основу типы таблиц приведенные в работах [4, 7], К. Брауншвейг представляет свою таксономию [1]. В ней выделяются такие типы таблиц как *вертикальные списки*, *горизонтальные списки*, *матрицы* и *атрибут/значение*. Также в работе рассматриваются *вложенные таблицы*, которые, в свою очередь, классифицируются в соответствии с указанными типам.

Работы О. Лемберга с соавторами посвящены извлечению и классификации таблицы из набора Web Data Commons. В результате представлена таксономия, состоящая из *реляционных таблиц*, содержащих сущности, описываемые атрибутами представленными *строками* и *столбцами*. Также выделяются таблицы, в которых набор атрибутов описывает одну определённую сущность. Такие таблицы называются *сущностными таблицами*. В таксономии также представлены *матричные таблицы*.

К. Нишида представляет подход к классификации таблиц, основанный на сочетании рекуррентной нейронной сети (RNN) и свёрточной нейронной сети (CNN) [9]. Авторы основываются на том,

¹<https://webdatacommons.org>

что таблицы представлены семантическими тройками: субъект, свойство, объект. Предложенная в результате исследования таксономия включает в себя *реляционные таблицы, таблицы сущностей, матричные таблицы и другие*. Следует отметить, что в данной таксономии матричные таблицы не содержат свойств.

М. Гашеми-Гол и П. Секей предлагают классификатор [6], который базируется на неконтролируемом методе встраивания таблиц в векторное пространство для выполнения классификации таблиц с минимальным вмешательством пользователя. Разработанная ими таксономия представлена такими типами, как *реляционные таблицы, таблицы сущностей, матричные таблицы, списки и таблицы без данных*.

Эти же типы таблиц приведены в работе З. Ванга [14]. Однако автор разделяет *вертикальные* и *горизонтальные реляционные таблицы*. Для обработки использовались таблицы, извлеченные из Википедии (WikiTable) и WDC WebTable Corpus [8]. Эти же источники данных лежали в основе исследований по извлечению таблиц проведенных С. Ролданом. В результате он продолжил классифицировать подлинные таблицы как: *горизонтальные списки, вертикальные списки, форма, матричные таблицы* [10, 11].

3. Выводы. В работе было проведено исследование по сравнению наиболее распространенных таксономий подлинных веб-таблиц. Установлено, что существующие таксономии отличаются именованиями типов таблиц. Например, термины «вертикальный список», «горизонтальная веб-таблица», «реляционная таблица» и «горизонтальный список» обозначают один и тот же тип таблицы. Различные таксономии содержат разное количество типов таблиц — от трех до пяти. Это приводит к терминологической запутанности. Соответствие терминологии таксономий рассмотренных в данной работе приведено в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1. Соответствие терминологии таксономий типов таблиц

Крестан	Вертикальные списки	Горизонтальные списки	Матрицы	Таблицы атрибутов/значений	Перечисления
Лаутерт	Горизонтальные веб-таблицы	Вертикальные веб-таблицы	Матричные веб-таблицы	Вертикальные веб-таблицы	-
Ебериус	Вертикальные списки	Горизонтальные списки	Матричные таблицы	-	-
Брауншвейг	Вертикальные списки	Горизонтальные списки	Матричные таблицы	Таблицы атрибутов/значений	-
Лемберг	(Горизонтальные) Реляционные таблицы	(Вертикальные) Реляционные таблицы	Матричные таблицы	Таблицы сущностей	-
Нишида	(Вертикальные) Реляционные таблицы	(Горизонтальные) Реляционные таблицы	Матричные таблицы	Таблицы сущностей	-
Гашеми-Гол	Реляционные таблицы	-	Матричные таблицы	Таблицы сущностей	Списки
Ванг	(Вертикальные) Реляционные таблицы	(Горизонтальные) Реляционные таблицы	Матричные таблицы	Таблицы сущностей	Списки
Ролдан	Горизонтальные списки	Вертикальные списки	Матричные таблицы	Формы	-

Следует отметить, что имеющееся на текущий момент множество таксономий не является исчерпывающим. Например, никак не выделяются таблицы, содержащие иерархически заголовки, не учитывается сходство некоторых из табличных представлений, таких как список, сущность, матрица, перечисление. Это подчеркивает необходимость изучения, расширения и гармонизации существующих таксономий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Braunschweig K.* Recovering the semantics of tabular web data: Dissertation // 2015, <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-184502>.
2. *Cafarella M. J., Halevy A., Wang D. Zh., Wu E., Zhang Y.* Webtables: exploring the power of tables on the web // Proceedings of the VLDB Endowment. 2008. 1 1. P. 538–549.
3. *Crestan E., Pantel P.* A fine-grained taxonomy of tables on the Web // in: Proceedings of the 19th ACM International Conference on Information and Knowledge management, 2010. P. 1405–1408.
4. *Crestan E., Pantel P.* Web-scale table census and classification // in: Proceedings of the fourth ACM international conference on Web search and data mining, 2011. P. 545–554.
5. *Eberius J., Braunschweig K., Hentsch M., Thiele M., Ahmadov A., Lehner W.* Building the Dresden Web Table Corpus: A Classification Approach // 2015.
6. *Ghasemi-Gol M., Szekely P.* Tabvec: Table vectors for classification of web tables // 2018 / [arXiv: 1802.06290](https://arxiv.org/abs/1802.06290).
7. *Lautert L. R., Scheidt M. M., Dorneles C. F.* Web table taxonomy and formalization // ACM SIGMOD Record. 2013. 42 3. P. 28–33.
8. *Lehmberg O., Ritze D., Meusel R., Bizer C.* A large public corpus of web tables containing time and context metadata // in: Proceedings of the 25th International Conference Companion on World Wide Web, 2016. P. 75–76.
9. *Nishida K., Sadamitsu K., Higashinaka R., Matsuo Y.* Understanding the semantic structures of tables with a hybrid deep neural network architecture // in: Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2017. 31.
10. *Roldán Salvador J. C.* Enterprise Data Integration: On Extracting Data from HTML Tables // 2020.
11. *Roldán J. C., Jiménez P., Szekely P., Corchuelo R.* TOMATE: A heuristic-based approach to extract data from HTML tables // Information Sciences. 2021. 577. P. 49–68.
12. *Seongchan K., Ying L.* Functional-Based Table Category Identification in Digital Library // in: 2011 International Conference on Document Analysis and Recognition, 2011. P. =1364–1368 <https://doi.org/10.1109/ICDAR.2011.274>.
13. *Wang Y., Hu J.* Detecting tables in html documents // in: International Workshop on Document Analysis Systems. Springer, 2002. P. 249–260.
14. *Wang Z., Dong H., Jia R., Li J., Fu Z., Han S., Zhang D.* Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery & Data Mining, 2021.

Парамонов Вячеслав Владимирович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: slv@icc.ru

Шигаров Алексей Олегович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: shigarov@icc.ru



ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КЛЕТОЧНЫХ КУЛЬТУР МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ

© 2024 г. И. С. ПЕТРУШИН, Ю. А. ОВЕРЧЕНКО, Ю. А. МАРКОВА

Аннотация. Объектом исследования является штамм ризосферной бактерии вида *Rhodococcus qingshengii* VKM Ac-2784D. Рассмотрено применение методов компьютерного зрения для задачи определения морфологических показателей бактериальных клеток. Для упрощения и автоматизации этого процесса разработано веб-приложение, позволяющее определять размеры и площади отдельных клеток, рассчитывать необходимые статистические характеристики. Описаны подходы для предварительной обработки исходных изображений, алгоритм автоматизированного обнаружения бактериальных клеток на изображении и статистического анализа численных признаков. Оно может быть использовано в ходе исследований влияния различных условий культивирования на морфологию клеток. Перечень рассчитываемых статистических метрик и гистограмм может быть расширен под нужды исследователя.

Ключевые слова: биоплёнка, морфология, компьютерное зрение, веб-приложение, клеточная культура.

AMS Subject Classification: 65D19

1. Введение. Морфология бактерий является одним из таксономических признаков бактерий, учитываемых при их идентификации. В то же время она не является постоянной особенно у некоторых видов микроорганизмов, таких как *Mycobacterium* и *Rhodococcus*. Это связано с тем, что любые вариации условий внешней среды приводят к перестройке клеточной стенки и мембраны бактерий, а также способствуют изменению метаболизма. В результате происходит изменение морфологии клетки [3]. Таким образом, в зависимости от действия разных факторов бактериальные клетки изменяют свою морфологию от более округлых до вытянутых палочек. При этом в неблагоприятных условиях, при действии антибиотиков или при недостатке источника углерода бактерии, как правило, приобретают более округлую форму, и напротив, в полноценной среде культивирования они более вытянутые [1]. Таким образом, анализируя форму бактериальной клетки можно оценить, насколько благоприятна для жизнеспособности исследуемого микроорганизма среда его культивирования, с целью выбора наиболее оптимальных условий. Кроме того, можно выяснить степень воздействия исследуемого вещества. Анализ морфологии клеток простой и дешевый метод, однако он чрезвычайно трудоемкий, так как приходится вручную сравнивать разные микрофотографии. Для упрощения и автоматизации этого процесса авторами было разработано веб-приложение, которое позволяет определять размеры и площади отдельных клеток, рассчитывать необходимые статистические характеристики.

2. Материалы и методы. Объектом исследования является штамм ризосферной бактерии вида *Rhodococcus qingshengii* VKM Ac-2784D [6]. Исследуемый штамм был изолирован из ризосферы пырея (*Elytrigia repens*) и обладает способностью к разложению компонентов нефти [4]. Для производства биомассы штаммы культивировали в ферментере, который контролировал и поддерживал основные параметры выращивания. Культивирование было закончено через 24 ч

Работа выполнена в рамках базовой тематики под № гос. регистрации 122041100050-6. Расчёты выполнены на оборудовании ЦКП «Биоинформатика» ИЦиГ СО РАН. Авторы выражают благодарность Д. Н. Сидорову и А. В. Киселёву за обсуждение и полезные комментарии во время разработки продукта.

при раннем стационарном состоянии. Синтетическая среда 8E, использованная для выращивания, содержала 1,5 г/л $(NH_4) 2HPO_4$, 0,7 г/л KH_2PO_4 , 0,8 г/л $MgSO_4 7H_2O$ и 0,5 г/л NaCl (pH 7,2). Исследование морфологических показателей выполнялось по снимкам светового микроскопа Primo Star (Zeiss, Германия) при увеличении $\times 100$, полученных с помощью специализированного ПО. Алгоритм обработки изображений реализован на языке программирования Python, с использованием библиотек OpenCV и NumPy. Обработка и статистическое исследование результатов измерений реализовано с использованием модуля Pandas.

3. Обработка изображения. Изначально цветное изображение на первом этапе преобразуется в оттенки серого (это обусловлено использованием библиотеки OpenCV [2]). Перевод изображения в оттенки серого позволяет сократить размер файла по сравнению с полноцветным изображением, что, в свою очередь, значительно сокращает время обработки. Также следует отметить, что большинство библиотек, предоставляющих возможности работы с изображениями, в том числе наложения фильтров и получения информации с изображения, работают только с изображениями в оттенках серого. На следующем этапе вычисляется оптимальный порог и получается бинарное изображение. Задача обнаружения объектов заключается в установлении наличия на изображении объекта, обладающего некоторыми определенными характеристиками. Одним из наиболее простых способов для выполнения поставленной задачи является выбор порога по яркости, или пороговая классификация [5]. Такой подход позволяет разделить изображение на фон и объект; объектом будет являться совокупность пикселей выше найденного порога, а фоном — ниже. В данном случае оптимальный порог определяется с помощью метода Оцу, который использует гистограмму изображения для расчета порога. Затем в OpenCV передается изображение в оттенках серого, максимальное и минимальное значение яркости пикселей по одному каналу от 0 до 255. Перед поиском контуров объектов необходимо очистить бинарное изображение от шума. Очень часто микроснимки содержат множество мелких шумов, которые могут стать причиной недостоверных результатов. В качестве лишней информации на снимке могут присутствовать засветы или темные пятна, зависящие от условий, в которых был сделан снимок, масляные пятна, пыль и др. Для очистки изображения нами использовались морфологические преобразования эрозии и дилатации, а также их комбинации — открытие и закрытие [7]. В результате эрозии мелкий шум подавляется, но и контуры изучаемых объектов уменьшаются на размер подобранного структурного элемента. Для того чтобы вернуть исходный размер объектам необходимо использовать обратную к эрозии операцию — дилатацию или расширение, с тем же размером структурного элемента. После выполнения обеих операций исчезнувший после эрозии шум не вернется даже в результате дилатации, а утерянная информация о размерах объекта восстановится. Финальным этапом предобработки является сегментация, возвращающая бинарное изображение с выделенными белыми контурами детектированных объектов на черном фоне. Контуры бинарного изображения могут быть однозначно перенесены на оригинальное изображение. В результате мы получаем оригинальное изображение с выделенными контурами. Вторая часть алгоритма посвящена выполнению вычислений. После определения числа бактерий на снимке необходимо измерить их размеры (длину и ширину, а затем и площадь). Для этого рассмотрим каждую бактерию как отдельный объект. С помощью функций OpenCV определяется контур бактерии и его центральная точка. По полученной центроиде строится эллипс (метод возвращает координаты центра, длины большой и малой осей и контур эллипса). По этим параметрам вычисляется площадь бактерии. Все результаты измерений подвергаются фильтрации (удаляются неверно определенные объекты, имеющие аномально большую площадь, длину и ширину).

Заключительный этап — статистическая обработка сформированной выборки. В результате выполнения программы пользователь получает статистические данные по размерам бактерий для каждого снимка.

4. Реализация веб-приложения. Применение разработанной программы для обработки и получения данных с реальных снимков с микроскопа возвращает ожидаемый результат в том случае, если снимки имеют одинаковое разрешение и формат. Интерфейс программы реализован

с помощью Python-фреймворка Flask с набором инструментов Werkzeug, а также шаблонизатора Jinja2. При создании интерфейса были использованы как базовые возможности Flask, языка разметки HTML, каскадных CSS-таблиц и функции JavaScript. Так, помимо функций загрузки, обработки и выгрузки снимков и таблиц данных, пользователю доступна возможность интерактивного выбора зон на изображении для дальнейшей обработки.

На входе алгоритм веб-приложения получает изображение исследуемой биопленки в формате CZI или JPEG. Каждый этап программы обрабатывает один снимок за другим, сохраняя полученные данные в общедоступном массиве (промежуточные файлы). Полученные значения подвергаются статистическому анализу. Конечный результат выполнения программы выводится в виде таблицы.

5. Заключение. Реализованное веб-приложение представляет собой алгоритм обнаружения бактериальных клеток на снимке и извлечения их количественных морфологических показателей. Оно может быть использовано в ходе исследований влияния различных условий культивирования на морфологию клеток. Перечень рассчитываемых статистических метрик и гистограмм может быть расширен под нужды исследователя в открытом программном коде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Campos M., Suroutsev I. V., Kato S., Paintdakhi A., Beltran B., Ebmeier S.E. A constant size extension drives bacterial cell size homeostasis // Cell. 2014. 159, № 6. P. 1433–1446.
2. Escrivá D. M., Laganiere R. OpenCV 4 Computer Vision Application Programming Cookbook: Build complex computer vision applications with OpenCV and C++. Packt Publishing Ltd, 2019. 494 p.
3. Jun S., Si F., Pugatch R., Scott M. Fundamental principles in bacterial physiology-history, recent progress, and the future with focus on cell size control: A review // Reports on Progress in Physics. 2018. 81. P. 1–96.
4. Markova Y. A., Petrushin I. S., Belovezhets L. A. Detection of gene clusters for biodegradation of alkanes and aromatic compounds in the *Rhodococcus qingshengii* VKM Ac-2784D genome // Vavilov Journal of Genetics and Breeding. 2023. 27, № 3.
5. Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 1979. 9, № 1.
6. Petrushin I. S., Markova Y. A., Karepova M. S., Zaytseva Y. V., Belovezhets L. A. Complete Genome Sequence of *Rhodococcus qingshengii* Strain VKM Ac-2784D, Isolated from *Elytrigia repens* Rhizosphere // Microbiol. Resour. Announc. 2021. 10, № 11.
7. Singh H. Advanced Image Processing Using OpenCV. Apress, 2019.

Петрушин Иван Сергеевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: ivan.kiel@gmail.com

Оверченко Юлия Алексеевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: ower4enko0909@gmail.com

Маркова Юлия Александровна
Сибирский институт физиологии и биохимии растений СО РАН (СИФИБР СО РАН)
E-mail: juliam06@mail.ru



ПРОГНОЗ КАЧЕСТВА ФЛОТАЦИОННОГО ПРОЦЕССА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

© 2024 г. М. А. ПОПОВ, Р. В. КОНОНЕНКО

Аннотация. Рассмотрено применение методов регрессионного анализа для прогнозирования качества протекания процесса флотации железной руды. Протестированы три регрессионных алгоритма машинного обучения для решения задач, связанных с обогащением полезных ископаемых, проведена оценка качества полученных моделей.

Ключевые слова: регрессионный анализ, обогащение полезных ископаемых, флотация полезных ископаемых, машинное обучение.

AMS Subject Classification: 93-10, 93C95

1. Описание используемых данных. На данный момент большинство современных обогатительных горнодобывающих предприятий генерируют большое количество данных, возникающих в процессе обогащения минерального сырья. Эти данные содержат различные параметры оборудования, сведения о поступающем на производство сырье, результаты лабораторных измерений.

Ключевым показателем качества протекания процесса является процент содержания кремнезёма в итоговом концентрате.

В качестве исходных данных был взят набор измерений с промышленной установки [?], объемом 737 тыс. строк, содержащий 23 параметра процесса флотации, среди них присутствуют как параметры, измеряемые лабораторными методами, так и настройки оборудования. Целью моделирования является прогнозирование содержания кремнезёма в итоговом концентрате. Данные были подвергнуты обработке и фильтрации.

На основе корреляционной матрицы отобраны характеристические переменные, оказывающие наибольшее влияние на целевой показатель процесса. Данные включённые в модель перечислены ниже:

- 1) Amina Flow
- 2) Ore Pulp pH
- 3) Flotation Column 01 Air Flow
- 4) Flotation Column 02 Air Flow
- 5) Flotation Column 03 Air Flow
- 6) Flotation Column 04 Level
- 7) Flotation Column 05 Level
- 8) Flotation Column 06 Level
- 9) Flotation Column 07 Level
- 10) % Iron Concentrate

2. Регрессионный анализ с применением алгоритмов машинного обучения. Для предсказания целевой переменной было решено воспользоваться регрессионными алгоритмами машинного обучения, данный подход позволяет упростить процесс анализа данных и выявить

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FZZS-2024-0003).

неявные связи между параметрами в модели, из всего разнообразия алгоритмов выбраны следующие:

- Lasso linear model
- Ridge linear model
- Random forest.

Данные алгоритмы хорошо подходят для моделей с большим количеством переменных, которые коррелированы между собой. Все данные были разбиты на обучающую и тестовую выборки и поданы на вход алгоритмов.

Для оценки качества выбранной модели используем критерии R^2 и RSS , чем ближе R^2 к единице и чем меньше значение RSS , тем выше качество полученной модели.

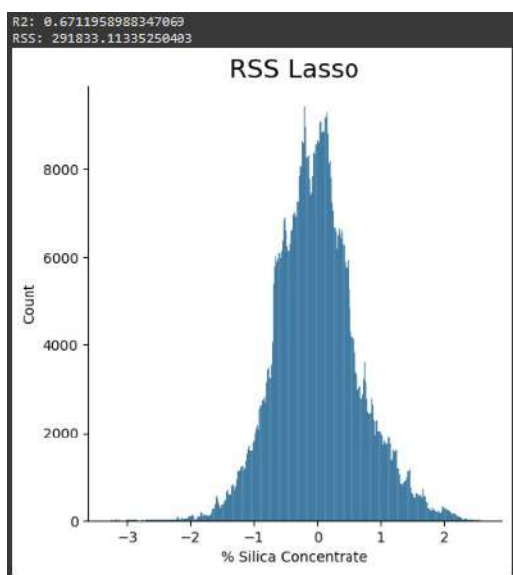


Рис. 1. Оценка качества модели, обученной по регрессионному алгоритму Lasso

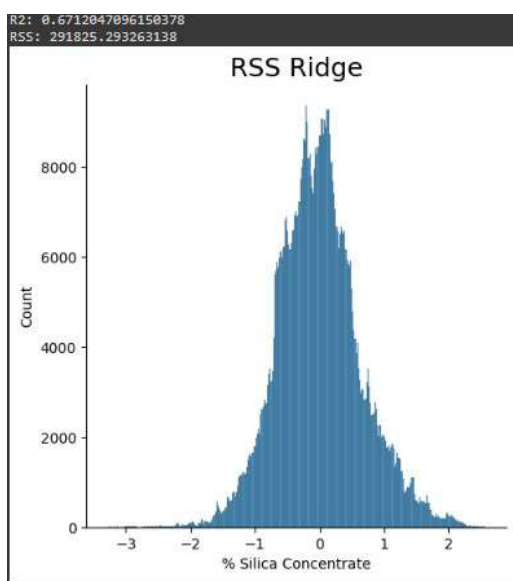


Рис. 2. Оценка качества модели, обученной по регрессионному алгоритму Ridge

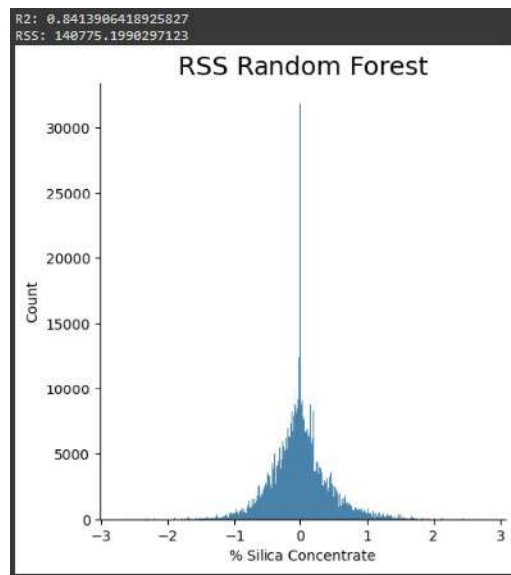


Рис. 3. Оценка качества модели, обученной по регрессионному алгоритму Random forest

Из выбранных регрессионных алгоритмов машинного обучения наилучшие результаты показал алгоритм случайного леса. После проверки на тестовых данных получена модель со следующим критериями $R2 = 0,83$ и $RSS = 7932,55$.

Полученная модель может предсказывать содержание кремнезёма в итоговом концентрате с приемлемой точностью без проведения лабораторных испытаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лодойн Д.* Разработка и обоснование методов повышения эффективности обогащения медно-молибденовых руд путем использования адаптивных систем управления с многоуровневыми моделями флотации : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 25.00.13. // 2003. 40 с.
2. *Сорокер Л. В.* Разработка эффективных методов исследования и автоматизированного управления флотационными комплексами в цветной металлургии : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.06. // 2004. 56 с.

Попов Максим Алесеевич

Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ)

E-mail: popovma.kvantum@gmail.com

Кононенко Роман Владимирович

Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ)

E-mail: istu_politeh@mail.ru



ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ТИПОВ КОНФИГУРАЦИЙ «1С:ПРЕДПРИЯТИЯ»

© 2024 г. В. А. ПОПОВА

Аннотация. Использование языков программирования с динамической типизацией активно применяется при создании программного обеспечения различного уровня сложности. Одним из основных достоинств таких языков является возможность не задавать типы переменным, что позволяет ускорить процесс разработки и упростить написание кода. Однако, по сравнению со статически типизированными языками, динамическая типизация может привести к снижению надежности и качества программ. Поэтому важно применять специальные методы и инструменты для снижения вероятности ошибок, связанных с неправильным использованием типов данных. Для некоторых динамически типизированных языков, таких как Haskell, OCaml, Standard ML, JavaScript и Python, уже разработаны инструменты для проверки корректности типов. Однако на данный момент для языка программирования «1С:Предприятие» не существует механизма, который бы эффективно выявлял ошибки, связанные с несоответствием типов.

Ключевые слова: статическая проверка типов, динамическая типизация, система типов, 1С:Предприятие, дерево типов конфигурации, механизм статического анализа.

AMS Subject Classification: 68N15, 68-04

1. Этапы реализации программного комплекса. В рамках работы по данной теме описывается процесс создания механизма статической проверки типов для языка программирования «1С:Предприятие». Процесс включает выполнение следующих этапов:

- 1) Анализ предметной области и рассмотрение существующих методов статической проверки типов.
- 2) Определение видов типов в конфигурациях, разработанных на языке программирования «1С:Предприятие».
- 3) Разработка формата для представления всех типов, используемых в конфигурациях «1С:Предприятия».
- 4) Реализация синтаксического анализа кода модулей конфигураций 1С.
- 5) Тестирование разработанного механизма статической проверки типов.

2. Результаты разработки программного комплекса. Результаты данной работы представлены в ряде публикаций. В [1] изложены выводы по анализу системы типов в «1С:Предприятие». В процессе разработки механизма статической проверки был создан формат под названием «Дерево типов конфигурации» (ДТК), который предназначен для описания объектов конфигурации и типов, определённых в платформе. Такое название выбрано, поскольку каждый объект конфигурации наследует функциональные характеристики от одного или нескольких типов, присутствующих в системе «1С:Предприятие». Примечательно, что файл в формате ДТК может быть сгенерирован для любой конфигурации на данной платформе.

Для реализации статической проверки соответствия типов было необходимо представить программный код конфигурации в виде абстрактного синтаксического дерева (AST) [5]. На основе данных о типах «1С:Предприятие» и структуры программного комплекса, описанного в [2] с использованием диаграммы классов, были разработаны правила для выявления несоответствия

Исследование проведено при финансовой поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых № 091-24-302 «Тестирование программного комплекса для статической проверки типов и апробация результатов диссертационного исследования».

типов в исходном коде конфигураций на платформе «1С:Предприятие». В [3] были определены правила проверки типов для выражений, содержащих бинарные операции. Далее разрабатывались правила для проверки присвоения типов переменным, определения конструкторов объектов, корректности обращения к свойствам объекта и других аспектов. Порядок проверки каждой такой структуры данных языка программирования «1С:Предприятие» подробно описан в [2, 4].

Для полноценного применения механизма статической проверки типов в процессе разработки конфигураций «1С:Предприятия» ведётся работа по созданию плагина для среды разработки Eclipse. Также планировалось внедрить разработанный механизм в конфигуратор «1С:Предприятия», но в настоящий момент такая возможность не предоставляется из-за закрытого доступа к ядру 1С.

Со средой разработки Eclipse интеграция возможна в виде плагина, но для этого потребовалось адаптировать механизм статической проверки посредством переноса его реализации на язык программирования Java. Для такой задачи потребовалось выбрать инструменты разработки, которые аналогичны инструментам, применяющимся в языке C++ для реализации механизма статической проверки. Таким образом, для лексического анализа выбран JFlex, который является аналогом Flex для C++. В качестве синтаксического анализатора выбран CUP, который хорошо совместим с JFlex.

На текущий момент удалось создать тестовую версию плагина, которая позволяет проверять часть конструкций языка таких, как условные операторы, бинарные операции и свойства объекта.

Далее требуется реализовать проверку корректности циклических конструкций, а также параметров и возвращаемых значений методов конфигураций «1С:Предприятия».

Дальнейшее развитие проекта. После завершения работы над плагином будет выполняться апробация результатов работы. Ожидаемым результатом работы является оценка эффективности и надёжности разработанных методов статической проверки типов в условиях промышленной разработки программ «1С:Предприятие». Эта оценка позволит оценить производительность и точность методов статической проверки типов в реальных сценариях, а также идентифицировать потенциальные области для улучшения. Также результатом работы является апробация результатов, что предоставит ценные выводы об эффективности статической проверки типов в процессе улучшения качества программного обеспечения и сокращении времени разработки программ на платформе «1С:Предприятие».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балюк А. С., Попова В. А.* Разработка программного комплекса для конвертации конфигурации платформы «1С:Предприятие» в UML-модель // Сложные системы модели, анализ и управление. 2021. № 4. С. 137–145.
2. *Попова В. А.* Проектирование механизма статического анализа для выявления ошибок несоответствия типов в программах на динамических языках программирования // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022) : материалы 4-й Междунар. конф. Иркутск, 19–22 сент. 2022 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 142–145.
3. *Попова В. А.* Проверка соответствия типов конструкций динамического языка программирования на основании построения AST // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск, 5–9 дек. 2022 г. Иркутск : Изд-во ИДСТУ СО РАН, 2022. С. 114–115.
4. *Попова В. А.* Разработка правил для выявления ошибок несоответствия типов выражений в языке программирования «1С:Предприятие» // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023) : материалы 4-й Междунар. конф. Иркутск, 18–23 сент. 2023 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2023. С. 169–172.
5. *Balyuk A. S., Popova V. A.* Static type-checking for programs developed on the platform 1С:Enterprise // CEUR Workshop Proceedings. 2021. P. 101–111.

Попова Виктория Алексеевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: victorypopova1@gmail.com



О ВОПРОСАХ ОБМЕНА ДАННЫМИ С МОБИЛЬНЫМ ПРИЛОЖЕНИЕМ НА ПЛАТФОРМЕ «1С: ПРЕДПРИЯТИЕ»

© 2024 г. Л. В. РЯБЕЦ, А. С. ЗИНЧЕНКО

Аннотация. Рассматриваются подходы к реализации мобильных рабочих мест для поддержки отраслевых решений на платформе «1С: Предприятие», перечисляется ряд ограничений, которые могут возникнуть при реализации приложения на мобильной платформе, такие как различие структур основной и мобильной конфигурации, большой объем передаваемых данных, работа в офлайн-режиме, поддержка различных версий мобильной конфигурации. Предлагаются решения данных вопросов.

Ключевые слова: мобильное приложение, мобильная платформа, обмен данными.

AMS Subject Classification: 68U35

1. Введение. Платформа «1С: Предприятие» является единой технологической средой, посредством которой разрабатываются программные продукты для различных бизнес-областей. Одним из направлений разработки является поддержка отраслевых решений с помощью мобильных рабочих мест пользователей, предназначенных для функционирования на устройствах под управлением операционных систем Android, iOS, Microsoft Windows [2].

Для организации доступа к данным информационной базы «1С» на мобильных устройствах используются различные подходы, рассмотрим их особенности и ограничения.

1. Мобильный клиент является клиентским приложением для одной из поддерживаемых операционных систем. По сути, такое приложение является аналогом тонкого клиента платформы «1С», который использует веб-сервер для организации доступа к информационной базе. Достоинством данного подхода является скорость реализации мобильной версии для конкретного прикладного решения, так как разработка сводится к адаптации исходной конфигурации с учетом ограничений мобильного устройства. Вместе с тем стоит отметить, что пользовательские формы прикладного решения могут быть достаточно сложными и непригодными для автоматической адаптации под мобильное устройство, в таком случае необходимо будет выполнить ручную настройку таких форм. Основной особенностью работы мобильного клиента является необходимость постоянного подключения к серверу информационной базы организации. Данный аспект может являться критическим в случае невозможности использования сети интернет ввиду ограничений информационной безопасности.

2. Мобильное приложение — приложение на мобильной платформе «1С», использует архитектуру тонкого клиента, работающего с файловым вариантом информационной базы, которая находится на том же мобильном устройстве. Приложения на мобильной платформе могут функционировать в офлайн-режиме, но для взаимодействия с основной системой необходимо реализовать механизмы обмена данными. Скорость разработки таких решений ниже, чем разработка мобильного клиента, так как в данном случае разработка ведется на специальной версии платформы, предназначенной для работы на мобильном устройстве под управлением одной из поддерживаемых мобильных операционных систем, и сводится к реализации отдельного решения.

Для большинства прикладных решений первый подход является предпочтительным, поскольку позволяет пользователю взаимодействовать со всей информационной базой. Вместе с тем при решении сложных задач на мобильном устройстве и при отсутствии постоянного подключения

к серверу информационной базы использование мобильного приложения является безальтернативным вариантом, что подводит разработчика к решению набора инфраструктурных задач. В специализированной литературе [1,2] рассматриваются примеры разработки достаточно простых случаев, в которых не учитывается ряд ограничений, возникающих при реализации сложных программ.

2. Постановка задач. Рассмотрим ограничения, которые могут быть сформулированы при разработке мобильного приложения с большим количеством пользовательских сценариев.

2.1. Различные структур конфигураций. При формировании целостного пакета структура прикладных объектов основной конфигурации и конфигурации мобильного приложения могут существенно отличаться. Например, ссылки, незначимые для пользователя мобильного приложения, могут заменяться на их текстовые представления. Таким образом, структура конфигурации мобильного приложения не является подмножеством основной конфигурации прикладного решения, что исключает возможность использования автоматического обмена данными.

2.2. Объем передаваемых данных. Основной проблемой взаимодействия информационной базы и мобильного приложения является вопрос обмена данными. В основной информационной базе может содержаться большой объем передаваемых данных. Например, в информационной базе могут использоваться десятки тысяч позиций номенклатуры, при этом разные пользователи работают с различными наборами позиций, отражающих сферу решаемых ими задач. Следствием этого является невозможность использования предлагаемого платформой плана обмена с автоматической регистрацией.

2.3. Работа в офлайн-режиме. Мобильное приложение должно корректно работать при отсутствии подключения к серверу информационной базы, следствием чего является необходимость формирования целостного пакета данных из исходной информационной базы.

2.4. Поддержка различных версий мобильной конфигурации. Особенностью современных приложений является их постоянная модификация в соответствии с требованиями бизнеса, законодательства, нормативных актов и т. д. Таким образом, встает вопрос об удобной поддержке взаимодействия двух прикладных решений (основного и мобильного) в условиях постоянного изменения конфигураций. В связи с этим необходимо обеспечение поддержки различных версий мобильного приложения одной версией основной конфигурации.

3. Предлагаемые решения. Общая схема предлагаемых решений представлена на рис. 1.

3.1. Различные структур конфигураций. Для построения корректного пакета обмена данными предлагается в основной конфигурации хранить XML-описание для создания фабрики XDTO [4]. Такая фабрика позволяет разработчику основной конфигурации формировать JSON-пакеты обмена в соответствии со структурой конфигурации мобильного приложения. На стороне мобильного приложения такие JSON-пакеты десериализуются автоматически, что существенно уменьшает время приема данных. В обратную сторону, мобильное приложение при отправке данных в основную информационную базу формирует пакет обмена только в соответствии со своей структурой.

3.2. Объем передаваемых данных. Необходимо реализовать описание логики, которая позволит эффективно по времени регистрировать данные для обмена, не замедляя при этом основные бизнес-процессы пользователей. Для решения данной задачи технологической платформой «1С: Предприятие» предусмотрен универсальный механизм обмена данными — план обмена [3], форматы обмена данных основаны на XML, а элементами обмена являются узлы обмена. Технологическая платформа предусматривает два способа регистрации изменений прикладных объектов конфигурации:

- 1) автоматическая регистрация, которая может выполняться при изменении или удалении прикладного объекта информационной базы определенного типа;

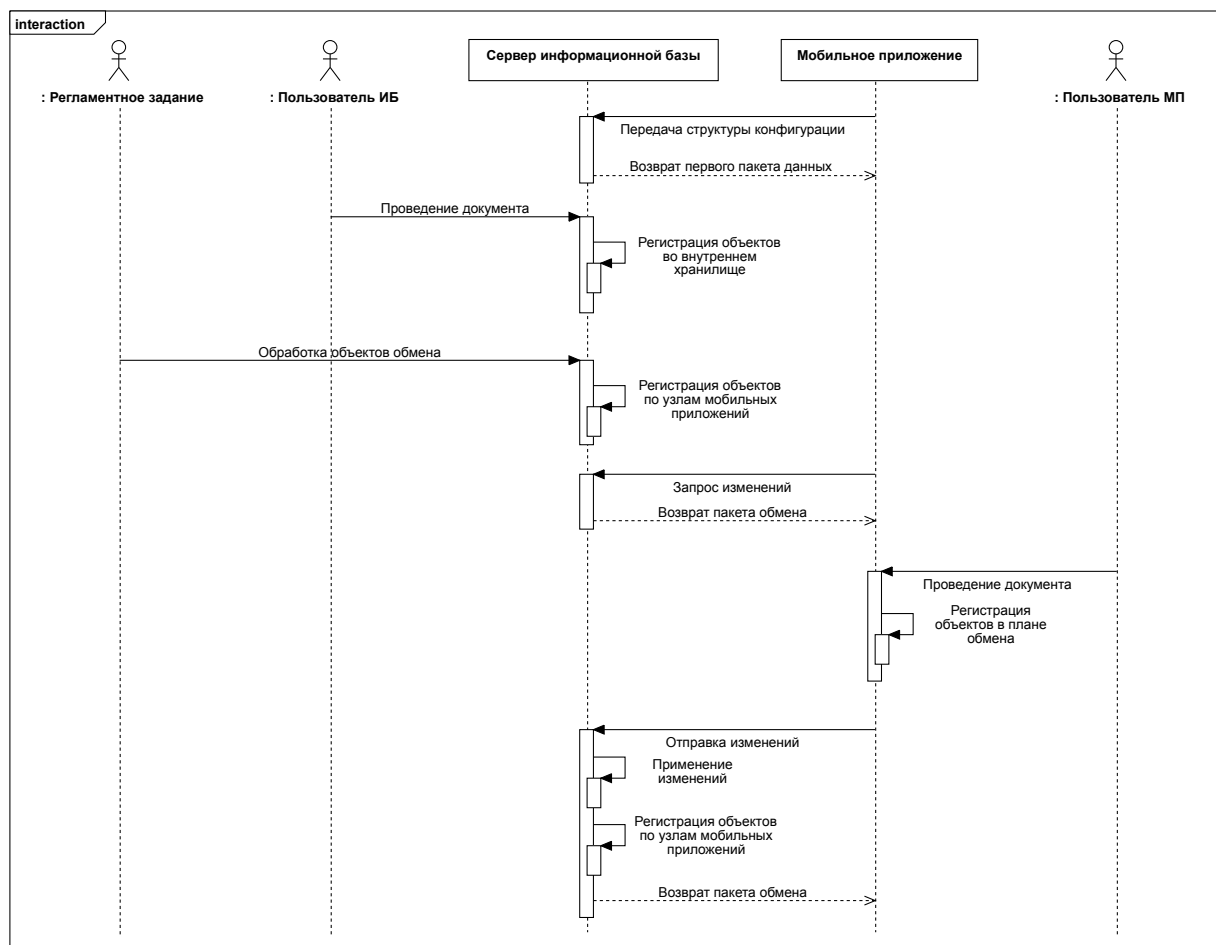


Рис. 1. Последовательность обмена данными между сервером информационной базы (ИБ) и мобильным приложением (МП)

- 2) принудительная регистрация — решение о регистрации объекта информационной базы принимается разработчиком на основании контекста данных и задачами, решаемыми пользователем конкретного мобильного устройства.

Для принятия решения о регистрации данных могут потребоваться некоторые вычислительные ресурсы, поэтому в момент выполнения транзакции все объекты, потенциально подлежащие регистрации, записываются в специальное хранилище (регистр сведений). Такое решение при использовании мобильных приложений позволяет не увеличивать нагрузку на СУБД при выполнении критических операций пользователя, например, проведение документа. Далее с помощью специализированного регламентного задания [6] проверяется необходимость регистрации того или иного объекта в мобильном приложении конкретного пользователя. Частоту выполнения такого задания настраивает администратор, исходя из нагрузки сервера.

3.3. Работа в офлайн-режиме. При реализации формирования пакета обмена данными необходимо создать наиболее полное представление основной конфигурации с учетом как ссылочной связи между объектами информационной базы, так и структурой конфигурации мобильного приложения. При этом нужно учесть, что процессы упаковки, передачи и распаковки данных необходимо оптимизировать по времени выполнения. Наиболее критическим является процесс распаковки, так как он выполняется на мобильном устройстве, производительность которого существенно уступает серверу.

Предлагаемым решением является формирование JSON-пакетов данных, которые затем помещаются во встроенный тип платформы «ХранилищеЗначения» с максимальным показателем степени сжатия применяемого алгоритма сжатия без потерь Deflate. Полученные двоичные данные оборачиваются в формат XML и передаются в план обмена, что обуславливается необходимостью отслеживания последовательности передаваемых данных. Обмен осуществляется посредством HTTP-сервиса [5].

3.4. Поддержка различных версий мобильной конфигурации. Для реализации поддержки разных версий мобильного приложения предлагается выполнять передачу структуры мобильного приложения по требованию сервера при первом подключении приложения. Такая реализация возможна, так как при формировании пакета данных сервер ориентируется на структуру мобильной конфигурации конкретного устройства.

Предложенные подходы были использованы при разработке мобильного приложения для отраслевого решения на платформе «1С: Предприятие». При первом подключении мобильного приложения к серверу информационной базы удалось добиться передачи около 2000 объектов информационной базы менее чем за 30 с. Кроме того набор тестовых данных первого пакета включал 20% записей регистра сведений, содержащего печатные формы документов (фактически, это подготовленные на стороне сервера отчеты для пользователя мобильного приложения).

При выработке предложенных подходов рассматривались также решения обмена данными через стандартный интерфейс OData и через веб-сервисы. Они были реализованы в виде тестовых решений, но показали более низкую производительность и скорость работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбалка В. В. Пример быстрой разработки мобильного приложения на платформе «1С: Предприятие 8.3». М. : 1С-Паблишинг, 2019. 329 с.
2. Хрусталева Е. Ю. Знакомство с разработкой мобильных приложений на платформе «1С: Предприятие 8». 3-е изд. М. : 1С-Паблишинг, 2022. 276 с.
3. Глава 15. Механизмы обмена данными: Планы обмена // в кн.: Руководство разработчика Платформа «1С: Предприятие 8.3.22», 2024, <https://its.1c.ru/db/v8326doc#bookmark:dev:TI000000730>.
4. Глава 16. Работа с различными форматами данных: Механизм XDTO // в кн.: Руководство разработчика Платформа «1С: Предприятие 8.3.22», 2024, <https://its.1c.ru/db/v8322doc#bookmark:dev:TI000001824:xdto>.
5. Глава 17. Интеграция с внешними системами: HTTP-сервисы // в кн.: Руководство разработчика Платформа «1С: Предприятие 8.3.22», 2024, <https://its.1c.ru/db/v8321doc#bookmark:dev:TI000001357>.
6. Глава 19. Механизм заданий: Регламентные задания // в кн.: Руководство разработчика Платформа «1С: Предприятие 8.3.22», 2024, <https://its.1c.ru/db/v8323doc#bookmark:dev:TI000000794>.

Рябец Леонид Владимирович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: l.riabets@gmail.com

Зинченко Анна Сергеевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: a.zinchenko@gmail.com



О МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ: КВАНТОВАНИЕ, ДИСТИЛЛЯЦИЯ И ПОИСК АРХИТЕКТУР

© 2024 г. О. И. СИНИЧКИН

Аннотация. Рассматриваются методы оптимизации моделей глубокого обучения, включая квантование, дистилляцию знаний и автоматизированный поиск архитектур. Анализируются способы уменьшения вычислительных затрат и памяти, повышение эффективности моделей при ограниченных ресурсах и особенности применения функции Softmax в этих методах.

Ключевые слова: дистилляция, квантование, глубокое обучение, свёрточные нейронные сети, рекуррентные нейронные сети.

AMS Subject Classification: 90C30

1. Введение. Современные методы оптимизации моделей глубокого обучения, такие как квантование, дистилляция и автоматизированный поиск архитектур (NAS), играют ключевую роль в адаптации моделей для устройств с ограниченными вычислительными ресурсами. Эти методы помогают уменьшить объем занимаемой памяти, снизить энергопотребление и сохранить высокую точность предсказаний. В этой статье мы рассмотрим ключевые методы оптимизации: квантование, дистилляцию (включая триpletную дистилляцию) и методы NAS. Особое внимание будет уделено функции Softmax, включая примеры вычислений и её применение в контексте этих методов.

2. Квантование. Квантование — это процесс преобразования параметров модели, таких как веса и активации, из чисел с высокой точностью (например, 32-битных чисел с плавающей точкой) в числа с меньшей точностью (например, 8-битные целые числа). Это позволяет значительно сократить объем памяти и ускорить вычисления без значительной потери точности [5].

Формула квантования весов

$$\hat{w} = \text{round}\left(\frac{w}{s}\right) \times s \quad (1)$$

где w — исходное значение веса, s — масштабирующий коэффициент, а \hat{w} — квантованное значение веса.

Пример Если $s = 0.5$ и $w = 1.3$, то после квантования:

$$\hat{w} = \text{round}\left(\frac{1.3}{0.5}\right) \times 0.5 = \text{round}(2.6) \times 0.5 = 3 \times 0.5 = 1.5 \quad (2)$$

Это приводит к уменьшению точности представления весов, но значительно снижает вычислительные затраты.

Выражаю благодарность региональному отделению Фонда содействия инновациям в лице директора А. В. Сергиенко.

3. Дистилляция. Дистилляция знаний (Knowledge Distillation) — это метод, при котором небольшая модель («студент») обучается на основе предсказаний более сложной модели («учителя»). Вместо бинарных меток используется вероятностное распределение предсказаний учителя, что позволяет студенту лучше улавливать сложные зависимости в данных [1].

Формула функции потерь для дистилляции

$$\mathcal{L}_{\text{distill}} = \alpha \cdot \text{H}(y, \sigma(z^s)) + (1 - \alpha) \cdot \text{H}(\sigma(z^t/T), \sigma(z^s/T)) \quad (3)$$

где H — функция кросс-энтропии, σ — функция Softmax, T — температура (temperature), регулирующая сглаживание вероятностей, а α — коэффициент, регулирующий вес обычной и дистилляционной потерь. *Пример*

Пусть логиты учителя равны $z^t = \{3.0, 1.0, -1.0\}$, а логиты студента $z^s = \{2.0, 0.5, 0.0\}$. При температуре $T = 2$ распределение вероятностей вычисляется как:

$$\sigma(z^t/T) = \left\{ \frac{e^{3.0/2}}{e^{3.0/2} + e^{1.0/2} + e^{-1.0/2}}, \frac{e^{1.0/2}}{e^{3.0/2} + e^{1.0/2} + e^{-1.0/2}}, \frac{e^{-1.0/2}}{e^{3.0/2} + e^{1.0/2} + e^{-1.0/2}} \right\} \quad (4)$$

$$\approx \{0.62, 0.26, 0.12\}$$

Эти вероятности используются для обучения студента, позволяя ему лучше воспроизводить предсказания учителя [2].

Триплетная дистилляция

Триплетная дистилляция улучшает стандартную дистилляцию, используя дополнительные сведения о различиях между классами, что позволяет улучшить обучение студента.

4. Поиск архитектур. Поиск архитектур (Neural Architecture Search, NAS) — это метод автоматизированного проектирования нейронных сетей. Он включает оптимизацию структуры сети с целью нахождения наилучшей архитектуры для конкретной задачи с учетом ограничений по вычислительным ресурсам и энергопотреблению.

Формула задачи оптимизации

$$\mathcal{A}^* = \arg \min_{\mathcal{A}} \{ \mathcal{L}_{\text{val}}(\mathcal{A}) + \lambda \cdot \text{Cost}(\mathcal{A}) \} \quad (5)$$

где \mathcal{A} — архитектура, \mathcal{L}_{val} — функция потерь на валидационном наборе, Cost — вычислительная стоимость архитектуры, а λ — коэффициент, регулирующий вес вычислительной стоимости [4].

5. Softmax: Примеры и вычисления. Функция Softmax преобразует логиты модели в вероятности, которые интерпретируются как вероятность принадлежности к различным классам.

Формула Softmax

$$\sigma(z_i) = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^n e^{z_j}} \quad (6)$$

Пример 1

Для логитов $z = \{2.0, 1.0, 0.1\}$:

$$\sigma(z_1) = \frac{e^{2.0}}{e^{2.0} + e^{1.0} + e^{0.1}} \approx \frac{7.39}{7.39 + 2.72 + 1.11} \approx 0.659 \quad (7)$$

$$\sigma(z_2) \approx \frac{2.72}{7.39 + 2.72 + 1.11} \approx 0.242 \quad (8)$$

$$\sigma(z_3) \approx \frac{1.11}{7.39 + 2.72 + 1.11} \approx 0.099 \quad (9)$$

В этом случае модель предсказывает вероятность 65.9% для первого класса, 24.2% для второго и 9.9% для третьего [3].

Пример 2 При температуре $T = 2.0$:

$$\sigma(z_1/T) = \frac{e^{2.0/2}}{e^{2.0/2} + e^{1.0/2} + e^{0.1/2}} \approx \frac{2.72}{2.72 + 1.65 + 1.05} \approx 0.502 \quad (10)$$

$$\sigma(z_2/T) \approx 0.304 \quad (11)$$

$$\sigma(z_3/T) \approx 0.194 \quad (12)$$

В этом случае распределение вероятностей становится более равномерным [2].

6. Заключение. Квантование, дистилляция и автоматизированный поиск архитектур (NAS) являются ключевыми методами оптимизации моделей глубокого обучения, особенно в условиях ограниченных вычислительных ресурсов. Эти подходы позволяют значительно сократить размер и сложность моделей, сохраняя при этом высокую точность. Функция Softmax играет важную роль в интерпретации предсказаний модели, и её правильное использование, включая температурное масштабирование, может существенно улучшить качество обучения и предсказаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chollet F.* Deep Learning with Python. Shelter Island : Manning Publications, 2018. 384 p.
2. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep Learning. Cambridge : MIT Press, 2016. 800 p.
3. *Kingma D. P., Ba J. B.* Adam: A Method for Stochastic Optimization // International Conference on Learning Representations (ICLR). 2015, <https://arxiv.org/abs/1412.6980>.
4. *Rasmussen C. E., Williams C. K. I.* Gaussian Processes for Machine Learning. Cambridge : MIT Press, 2006. 248 p.
5. *Scholkopf B., Smola Al. J.* Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond. Cambridge : MIT Press, 2002. 624 p.

Синичкин Олег Игоревич
Тольяттинский государственный университет (ТГУ)
E-mail: o.i.sinichkin@mail.ru



ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ БПЛА ПО ЛИНИИ ВИЗИРОВАНИЯ

© 2024 г. В. Р. БАРСЕГЯН, М. Г. МКРТЧЯН, А. Г. МАТЕВОСЯН

Аннотация. Работа посвящена вопросам математического моделирования и разработке алгоритма управления беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), оснащенных видеокамерой, обеспечивающего сближение с неподвижной целью, находящейся на поверхности земли. При разработке алгоритма сближения учитываются данные, полученные из видеокамеры. Используя математическую модель координатно-временной зависимости движения БПЛА, предлагается алгоритм гарантированного управления полетом, обеспечивающий сближение БПЛА с целью методом погони.

Ключевые слова: беспилотные летательные аппараты, управление полетом, линия визирования, метод погони, управление по видеоизображению.

AMS Subject Classification: 93C05, 93C85, 93C95, 70Q05

1. Введение. В настоящее время все большее распространение получают применения БПЛА в военных целях, что является весьма актуальным. Вообще область применения БПЛА достаточно широка и не ограничена военной отраслью [4, 6–8]. Многообразие сфер применения предполагает использование разных типов БПЛА. Когда спрос на БПЛА различного назначения стремительно растет, изучение задач управления ими является, несомненно, актуальным направлением исследований [1–3, 5–9]. В частности, важно решить задачи полета автономно управляемых БПЛА. Для автономного управления и наведения БПЛА большую роль играет положение и ориентация аппарата в пространстве во время его полета [5]. Для определения положения и ориентации аппарата чаще всего применяются системы позиционирования GPS/ГЛОНАСС. Полет БПЛА может функционировать с различной степенью автономии. Важные прикладные значения имеют задачи автономного управления БПЛА. Для осуществления автономного полета в процессе проектирования в БПЛА устанавливается соответствующее программное обеспечение на выполнение различных задач в автономном режиме управления, т.е. без участия человека. Для решения таких задач предлагается использовать методы теоретической механики, динамики полета, наведения, управления динамическими системами и теории наблюдения. В данной работе, используя математическую модель координатно-временной зависимости движения БПЛА, исследуется задача математического моделирования и разработки алгоритма управления БПЛА, оснащенной видеокамерой для сближения с неподвижной целью, которая находится на поверхности земли.

2. Об основных результатах. Рассматривается БПЛА, оснащенный органами управления: тягой двигателя и аэродинамическими рулями (углы отклонения руля высоты, руля направления). БПЛА как динамический объект управления представляет собой сложную динамическую систему. Для управления движением БПЛА необходимо воздействовать на силы и моменты, действующие на летательный аппарат [1–3, 6]. Предполагается, что БПЛА обладает системой позиционирования и оснащен видеокамерой, т.е. на БПЛА с помощью подвеса (гимбала) закреплена видеокамера с некоторым полем зрения (Рис. 1). Предполагается также, что в системе отсчета на

Работа выполнена при поддержке Комитета по высшему образованию и науки РА, в рамках исследовательского проекта № 23-2DP-1B001.

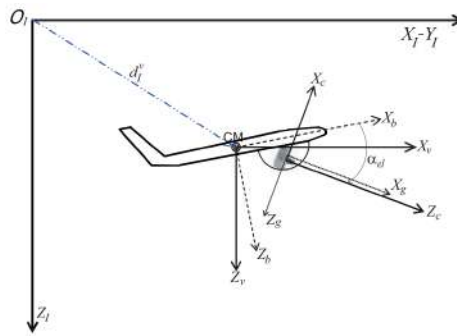


Рис. 1. Схема БПЛА и системы координат.

некотором расстоянии от БПЛА на земле расположен неподвижный объект, называемый целью. Цель находится в поле зрения видеокамеры. Размерами цели будем пренебрегать, поэтому считается, что цель – точка. Обозначим ее через p_{obj}^I . Этой точке соответствует линия визирования – прямая, соединяющая точку с началом координат O .

Требуется найти такое управление БПЛА, которое на основе данных, полученных из видеокамеры, наведет по линии визирования (по линии погони) летательный аппарат к цели. Отметим, что при наведении методом погони на каждом шаге у БПЛА должны совпадать вектор скорости и направление на цель (линия визирования).

В первую очередь для решения задачи необходимо найти координаты цели, т. е. переводить полученные данные (координаты) из видеокамеры в систему отсчета координат летательного аппарата. Сближение летательного аппарата по линии погони является классической задачей механики программного движения.

Для определения координат цели и описания управления БПЛА по линии погони используются следующие системы координат:

$X_I Y_I Z_I$ – неподвижная (инерциальная) система координат.

$X_v Y_v Z_v$ – подвижная система координат, зафиксированная в центре тяжести (C_M) БПЛА. Все оси параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат.

$X_b Y_b Z_b$ – система координат, относящаяся к корпусу летательного аппарата. Начальная точка этой системы расположена в центре тяжести (C_M) БПЛА, а ось X_b направлена вдоль корпуса летательного аппарата в направлении полета. Ось Y_b указывает на правое крыло, а Z_b указывает вниз. Оси системы координат, относящиеся к корпусу летательного аппарата, наклонены к осям подвижной системы координат на углы ϕ , ψ , ϑ , соответственно.

$X_g Y_g Z_g$ – система координат, связанная с подвесом (гимбалом). Эта система также расположена в центре тяжести (C_M) БПЛА, угол азимута на ось Z_g равен α_{az} , а угол азимута на ось Y_g равен α_{el} .

$X_c Y_c Z_c$ – система координат, связанная с устройством визуализации (видеокамерой). Ось X_c перпендикулярна картинной плоскости, ось Y_c направлена к правому крылу, а Z_c направлена к цели.

Эти системы координат необходимы для описания перехода из одной координатной системы к другой, используя переходные матрицы. Так, если имеем V^i вектор v в i -й системе и хотим переходить в систему j -ю, то используем следующую формулу:

$$V^j = V^i T_i^j, \quad T_i^j = \begin{pmatrix} R_i^j & -d_i^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где T_i^j матрица преобразования из системы i -й в систему j -ю, а R_i^j и d_i^j соответственно векторы матриц поворота и смещения при переходе из i -й системы к j -й.

Вообще используются следующие переходные матрицы: от инерциальной системы ($X_I Y_I Z_I$) к системе БПЛА ($X_v Y_v Z_v$) – матрица T_v^I , от системы БПЛА ($X_v Y_v Z_v$) к системе корпуса БПЛА

$(X_b Y_b Z_b)$ – матрица T_v^b , от системы корпуса БПЛА $(X_b Y_b Z_b)$ до системы гimbала $(X_g Y_g Z_g)$ – матрица T_b^g , от системы $(X_g Y_g Z_g)$ к системе камеры $(X_c Y_c Z_c)$ – матрица T_g^c .

Рассматривается математическая модель видеокамеры и переход из пиксельных координат изображения цели, полученной на камере, к системе координат $X_c Y_c Z_c$ (Рис. 2). Преобразование

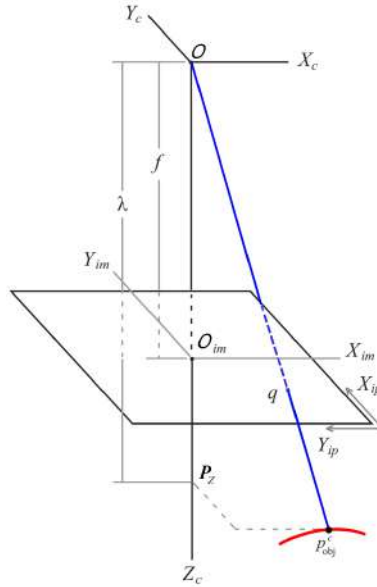


Рис. 2. Схема математической модели видеокамеры и системы координат.

пикселей в метры в системе координат изображения $(X_c Y_c Z_c)$ по методу Трукко и Верри [9] представляется следующим образом:

$$x_{im} = (-y_{ip} + 0_y) S_y, \quad y_{im} = (-x_{ip} + 0_x) S_x. \quad (2)$$

Используя похожие треугольники $OO_{im}q$ и $OP_zP_{obj}^c$, получим

$$\frac{x_{im}}{f} = \frac{p_x}{p_z}, \quad \frac{y_{im}}{f} = \frac{p_y}{p_z} \quad (3)$$

где f – это фокусное расстояние камеры, (x_{ip}, y_{ip}) – координаты в пикселях, (x_{im}, y_{im}) – координаты в метрах, параметры $(0_x, 0_y)$ – расстояние от центра изображения до координат в пикселях, а (S_x, S_y) – коэффициенты преобразования из пикселей к метрам. Также обозначим через $\lambda = p_z$ проекцию расстояния от камеры до цели на ось Z_c .

В задаче необходимо определить положение цели P_{obj}^I относительно инерциальной системы $(X_I Y_I Z_I)$. Если известна величина λ , то положение цели P_{obj}^I определяется формулой

$$P_{obj}^I = [CT_g^c T_b^g T_v^b T_I^v]^{-1} \Lambda q, \quad (4)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda q = CP_{obj}^c = \begin{bmatrix} 0 & f_x & 0_x & 0 \\ -f_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_{obj}^c, \quad f_x = \frac{f}{S_x}, \quad f_y = \frac{f}{S_y}. \quad (5)$$

Таким образом, при помощи видеокамеры, закрепленной на корпусе БПЛА, находим координаты цели. Далее, имея вычисленные координаты цели, решаем задачу сближения БПЛА с целью методом погони.

Для построения алгоритма управления движением БПЛА по линии визирования и обеспечения сближения с целью используются линеаризованные уравнения движения БПЛА [1-3]. При

наведении методом погони на каждом шаге, имея координаты цели, определяются такие управления, под воздействием которых вектор скорости БПЛА из текущего состояния направляются на цель (по линии визирования).

На следующем шаге, в случае отклонения БПЛА от линии погони, аналогичным образом вектор скорости БПЛА направляется на цель. Алгоритм обеспечивает сближение БПЛА с целью с заданной точностью.

В определенные дискретные моменты времени определяется текущее положение $(x_{\text{ТП}}, y_{\text{ТП}}, -h_{\text{ТП}})^T$ БПЛА. Желаемое положение БПЛА – это положение $(x_{\text{жел}}, y_{\text{жел}}, -h_{\text{жел}})^T$ полученной динамики БПЛА.

Если текущее положение БПЛА отклоняется от желаемого положения, то для приведения его в желаемое положение используются следующие формулы:

$$x_{\text{жел}} = x_{\text{ТП}} \cos \alpha, \quad y_{\text{жел}} = y_{\text{ТП}} \sin \beta. \quad (6)$$

Здесь α и β углы линии визирования относительно оси X_b и Y_b , соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р., Матевосян А. Г. Об одной задаче управления беспилотным летательным аппаратом самолетного типа с заданными промежуточными значениями разных частей координат // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023. № 2. С. 86–96.
2. Барсегян В. Р., Симомян Т. А., Матевосян А. Г. Об одной задаче оптимального управления квадрокоптером с заданным промежуточным значением части координат фазового вектора // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2024. № 2. С. 59–72.
3. Барсегян В. Р., Симомян Т. А., Матевосян А. Г. Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат // Вестник российских университетов. Математика. 2024. 29, № 145. С. 29–42.
4. Верещагин И. Ф. Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. Пермь, 1972. 520 с.
5. Латонов В. В., Тихомиров В. В. Управление линией визирования цели по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2018. № 1. С. 53–59.
6. Лемешонок Т. Ю., Сизова А. А., Баранов Н. Е., Санников В. А. Математические модели динамики движения летательных аппаратов. СПб., 2020. 122 с.
7. Телухин С. В., Матвеев В. В. Беспилотный летательный аппарат как объект управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 7–10.
8. Эпов М. И., Злыгостев И. Н. Применение беспилотных летательных аппаратов в аэрогеофизической разведке // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2012. 2, № 3. С. 22–27.
9. D. Blake Barber, Joshua D. Redding, Timothy W. McLain, Randal W. Beard, Clark N. Taylor Vision-based Target Geo-location using a Fixed-wing Miniature Air Vehicle // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2006. № 47. P. 361–382.

Барсегян Ваня Рафаелович
Институт механики НАН Армении
Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: barseghyan@sci.am

Мкртчян Манук Граирович
Институт механики НАН Армении
E-mail: mkmanuk@yandex.ru

Матевосян Арам Гагикович
Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: amatevosyan@ysu.am, matevosaram@gmail.com



РЕШЕНИЕ НАВИГАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА, ОСНАЩЕННОГО ЛАЗЕРНЫМ ДАЛЬНОМЕРОМ

© 2024 г. Ю. Ф. ВШИВКОВ, А. Ю. НАМАКОНОВ, В. В. ХОЙЛОВ

Аннотация. Работа посвящена решению практически значимой задачи по управлению и поиску кратчайшего пути движения мобильного робота. В качестве объекта исследования использовалась робототехническая платформа TurtleBro. Рассмотрены основные типы датчиков и инструменты управления для навигации робота. Приведена методика управления робототехническим комплексом на основе созданного программного кода.

Ключевые слова: навигационная задача, алгоритм A*, робот TurtleBro, Robot Operating System,

AMS Subject Classification: 70Q05, 93C85

В настоящее время активно развиваются и применяются в различных сферах робототехнические системы (роботы). Одной из основных проблем применения роботов является решение навигационной задачи [2].

Математическая модель движения робота, описывается дифференциальными уравнениями относительно линейной и угловой скоростей в декартовых (1) и полярных (2) координатах соответственно:

$$(yf'_x - xf'_y)\omega - f'_x v_x - f'_y v_y + f'_t = 0 \quad (1)$$

$$-h'_\rho \omega + (\cos\psi + h'_\psi \frac{\sin\psi}{\rho})v_x + (\sin\psi - h'_\psi \frac{\cos\psi}{\rho})v_y + h'_t = 0 \quad (2)$$

Для определения угла поворота в пространстве, в робототехнике принято использовать кватернионы. Это позволяет избежать проблемы, связанной с невозможностью поворота вокруг оси независимо от со-вершенного вращения по другим осям. Представление кватерниона имеет вид (3) и состоит из действительной единицы и трех мнимых единиц с действительными элементами [1].

$$q = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \quad (3)$$

Таким образом, применение кватернионов позволяет представить конечный поворот в пространстве в простой и удобной форме представления операции вращения (4), где Λ и R – не скалярные кватернионы.

$$R' = \Lambda R \Lambda^{-1} \quad (4)$$

В качестве объекта исследования использовалась робототехническая платформа TurtleBro со специализированной операционной системой Robot Operating System (ROS) [3]. Для определения пространственного положения и навигации, на роботе используются следующие элементы:

- инерционный датчик IMU (inertial measurement unit), который считывает данные с энкодеров колес и измеряя линейную и угловую скорости определяет окончательные данные одометрии;
- лазерный дальномер типа TOF (time-of-flight range sensors) измеряет время, которое прошло от момента отправления лазерного луча в исследуемое пространство до его отражения и попадания на приемник. Зная это время, робот вычисляет расстояние до окружающих его предметов;
- камера для визуального контроля.

Навигационная задача разделяется на две подзадачи: локализация и картографирование. Из этого следуют две разновидности навигационной задачи: навигация по заранее построенной карте и SLAM-навигация. Также существуют две разновидности задачи локализации: локальная (определение относительных координат) и глобальная (определение абсолютных координат).

Для нахождения кратчайшего пути движения робота по построенной карте, применён алгоритм A^* . Данный алгоритм принимает граф как входные данные, а выходными данными является путь, который нашел алгоритм. Он объединяет точную стоимость пути от начальной точки до любой вершины n и эвристическую оценку стоимости от вершины n до цели. A^* уравнивает их по мере продвижения к цели и каждый раз проверяет вершину n с наименьшим значением [4].

Алгоритм был реализован на языке программирования Python и запущен в ROS. Работа кода заключается в следующих действиях: разбиение карты на сетку, заполнение матрицы, выбор начальной и целевой точек, передача матрицы и координат точек в алгоритм A^* , вывод пути и движение робота по вычисленной траектории (рис. 1).

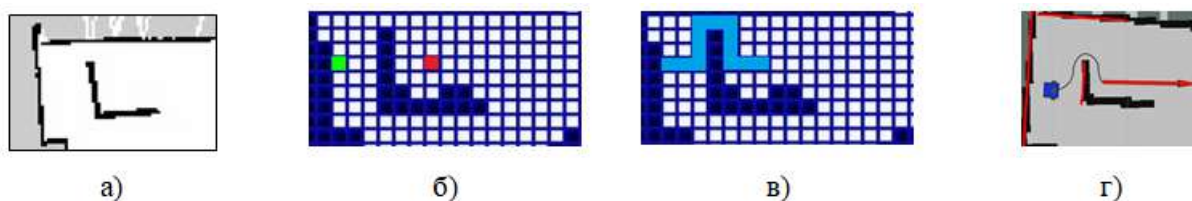


Рис. 1. а — построенная карта; б — сетка с выбранной начальной и конечной ячейкой; в — полученный путь; г — отображение пути в Rviz

Решение навигационной задачи на основе робототехнической платформы TurtleBro включает несколько этапов:

1. Подключение робота к компьютеру и запуск специализированной графической программы Rviz, которая предназначена для визуализации информации от разных систем робота, в частности лидара.

2. Создание карты (рис. 2). Для этого выполняется запуск программы gmapping на роботе, подключается визуализация в Rviz и производится проезд робота по полигону с использованием веб-интерфейса.

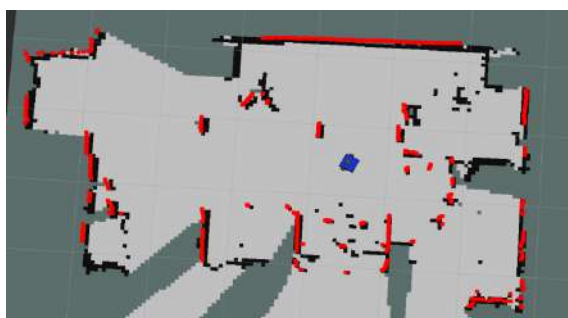


Рис. 2. Создание карты в Rviz

3. Локализация робота (рис. 3). В данном случае производится отображение предполагаемого множества позиций робота, которые по мере движения робота уточняются за счет сопоставления очертаний карты и дальнометрических данных от лидара.

4. Планирование маршрута. Производится загрузка алгоритма в глобальный планировщик, далее через Rviz или терминал задается целевая точка. После чего алгоритм сам построит кратчайший маршрут, и робот проедет по данному маршруту.

Структурная схема управления и навигации мобильным роботом представлена на рис. 4.

Заключение. В ходе выполнения работы была разработана методика управления робототехническим комплексом на платформе TurtleBro и реализован алгоритм A^* для поиска кратчайшего

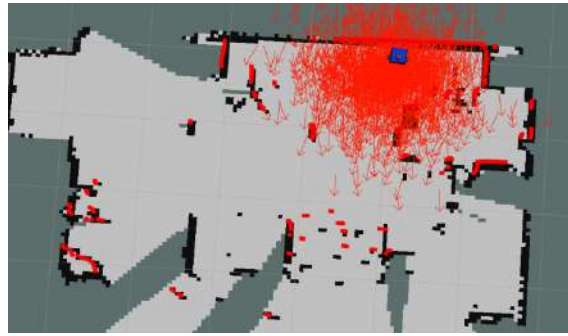


Рис. 3. Область предполагаемых позиций



Рис. 4. Структурная схема управления и навигации мобильным роботом

пути движения робота. Проведены экспериментальные исследования на компьютерной модели и на мобильном роботе. Эксперименты подтвердили работоспособность алгоритма обеспечивающего безопасное движение мобильного робота в среде с препятствиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
2. Минин А. А. Навигация и управление мобильным роботом, оснащенный лазерным дальномером : автореф. ... канд. техн. наук : 05.02.05. М., 2008.
3. TurtleBro // Voltbro: [сайт]. URL: <https://voltbro.ru/turtlebro/> (дата обращения: 14.08.2024)..
4. A* Search Algorithm // GeeksforGeeks: [сайт]. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/a-search-algorithm/> (дата обращения: 14.08.2024)..

Вшивков Юрий Федорович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: 1988ufv@mail.ru

Намаконов Алексей Юрьевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: leha.namakonov@mail.ru

Хойлов Виктор Васильевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: Khoilov2000@gmail.com



ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ЗАРЯДА НАКОПИТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ КОЛМОГорова – АРНОЛЬДА

© 2024 г. М. Х. ДАО, Д. Н. СИДОРОВ

Аннотация. В данном исследовании мы предлагаем использовать сети Колмогорова – Арнольда (KAN) в качестве потенциального метода оценки состояния заряда (SoC), используя адаптивные функции активации KAN для улучшения возможностей прогнозирования. SoC является важнейшим фактором для определения оставшейся полезной энергии, что необходимо для прогнозирования срока службы устройства и обеспечения его безопасной работы. Это значительное достижение в применении технологии глубокого обучения для точной и эффективной оценки SoC устройств хранения энергии.

Ключевые слова: состояние заряда, машинное обучение, сети Колмогорова – Арнольда.

AMS Subject Classification: 62M10, 68T07

1. Введение. Накопители энергии играют важную роль в различных отраслях и сферах применения. Они позволяют эффективно использовать возобновляемые источники энергии и обеспечивают резервное питание в случае перебоев. Для оптимизации использования энергии, обеспечения надежности системы и повышения экономической эффективности необходима точная оценка уровней хранения энергии. В последние годы методы машинного обучения стали мощными инструментами для прогнозирования и эффективного управления уровнями хранения энергии. Новым подходом в этой области является использование сетей Колмогорова – Арнольда (KAN), основанных на теореме представления Колмогорова – Арнольда [4, 8]. Применение KAN для оценки состояния заряда (SoC) накопителей энергии показало значительный потенциал для развития прогностических моделей в этой области.

2. Описание набора данных. В данной работе для оценки состояния заряда (SoC) устройств хранения энергии используется эталонный набор данных для литий-ионного аккумулятора LG18650HG2, представленный на сайте Mendeley и опубликованный Филлипом Коллмейером, Миной Нагуиб и Майклом Скеллсом [7]. Экспериментальные испытания проводились при различных температурах. Испытания проводились на новом аккумуляторе LG HG2 емкостью 3 Ач в термокамере объемом 8 кубических футов. Для тестирования использовался канал многофункционального тестера батарей Digatron 5 В, 75 А, обеспечивающий точность 0,1 % при измерении напряжения и тока по всей шкале.

3. Построение модели. Сеть Колмогорова – Арнольда (KAN) представляет собой новую архитектуру нейронных сетей, призванную заменить традиционные многослойные перцептроны (MLP). Она была создана на основе теоремы о представлении Колмогорова – Арнольда [1, 2], в то время как MLP основана на универсальной теореме аппроксимации [6]. Теорема Колмогорова – Арнольда утверждает, что каждая многомерная непрерывная функция f зависящая от $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, в ограниченной области, может быть представлена в виде конечной композиции более простых непрерывных функций, включающих только одну переменную. Формально вещественная, гладкая и непрерывная многомерная функция $f(x) : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ может быть представлена в виде конечной суперпозиции одномерных функций:

Работа была поддержана грантом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Проект № 075-15-2022-1215).

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \Phi_q \left(\sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right) \quad (1)$$

Здесь $\Phi_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\phi_{q,p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ так называемые внешние и внутренние функции, соответственно.

КАН используют эту теорему о представлении для создания другой архитектуры, заменяя линейные веса одномерными функциями на основе В-сплайнов, которые структурированы как обучаемые функции активации. В-сплайны представлены следующими базисными функциями [3]:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t \leq t_{i+1} \text{ и } t_i < t_{i+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i} N_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1} - t}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} N_{i+1,j-1}(t)$$

Где $j = 1, 2, \dots, p$. Тогда кривая, определяемая

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \rho_i N_{i,p}(t) \quad (3)$$

называется В-сплайном.

Рассмотрим применение сети КАН к задаче оценки SoC с набором данных литий-ионного аккумулятора LG18650HG2 с тремя входами (температура, напряжение, ток) и одним выходом (SoC):

- Связь в виде многомерного уравнения:

$$SoC = F(\text{Температура}, \text{Напряжение}, \text{Ток})$$

- На основе теоремы Колмогорова – Арнольда мы можем записать композицию одномерных функций, которые независимо зависят от отдельных признаков:

$$SoC = f(\phi_{Te}(\text{Температура}) + \phi_{Ha}(\text{Напряжение}) + \phi_{To}(\text{Ток}))$$

- Или в более общем смысле:

$$\begin{aligned} SoC &= f_1(\phi_{Te_1}(\text{Температура}) + \phi_{Ha_1}(\text{Напряжение}) + \phi_{To_1}(\text{Ток})) \\ &f_2(\phi_{Te_2}(\text{Температура}) + \phi_{Ha_2}(\text{Напряжение}) + \phi_{To_2}(\text{Ток})) \\ &f_3(\phi_{Te_3}(\text{Температура}) + \phi_{Ha_3}(\text{Напряжение}) + \phi_{To_3}(\text{Ток})) \\ &\dots \\ &f_m(\phi_{Te_m}(\text{Температура}) + \phi_{Ha_m}(\text{Напряжение}) + \phi_{To_m}(\text{Ток})) \end{aligned}$$

Процесс построения модели оценки SoC с использованием КАН включает в себя несколько этапов. Во-первых, тщательно выполняется этап подготовки данных, включающий проверку, очистку данных (удаление нечисловых значений) и нормализацию данных. Затем набор данных делится на две части: 80 % для обучения и оставшиеся 20% для тестирования.

Чтобы улучшить качество сигнала и снизить уровень шума, мы применили фильтр скользящего среднего к данным о напряжении (Среднее напряжение) и токе (Средний ток). Это не только сглаживает данные, но и способствует более точному прогнозированию.

Архитектура модели построена на основе архитектуры сетей Колмогорова – Арнольда (КАН) в сочетании с тщательно подобранными функциями активации для повышения точности прогнозирования состояния заряда (SoC). Процесс обучения и проверки сфокусирован на оптимизации функций В-сплайна и параметров сети для минимизации ошибок прогнозирования и повышения производительности модели. В частности, обучение В-сплайновых функций проводилось в соответствии с подробной процедурой, описанной на диаграмме справа.

Заключительный этап включает в себя оценку и тонкую модификацию модели на основе ключевых показателей, таких как R-квадрат, RMSE, MAE и MAX (максимальная ошибка). Итоговые

результаты визуализируются путем сравнения прогнозируемых и фактических значений, что позволяет всесторонне оценить эффективность модели.

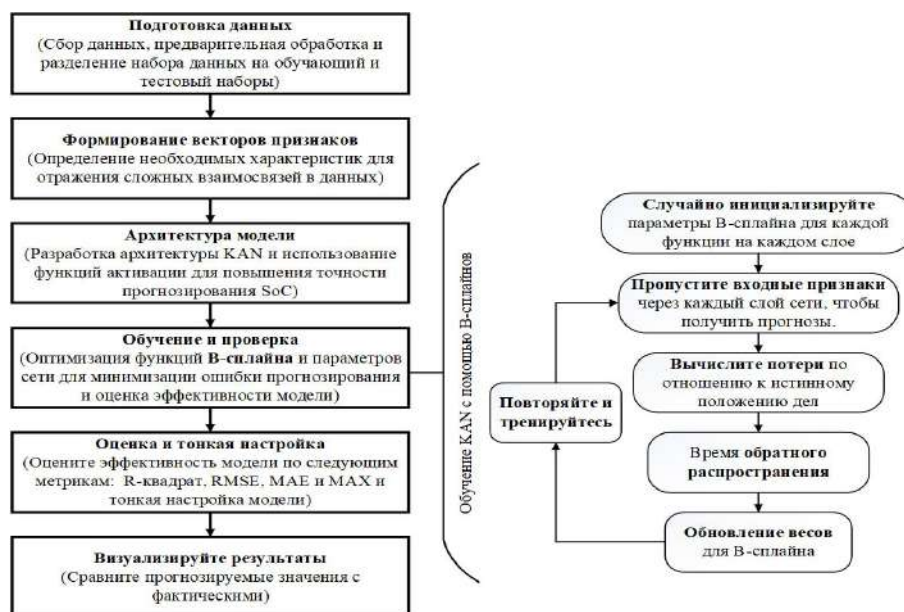


Рис. 1. Диаграмма процесса обучения с использованием сетей KAN

4. Результаты экспериментов. Используя KAN-модель [5] для обучения и прогнозирования состояния заряда (SoC) для набора данных литий-ионных аккумуляторов LG18650HG2 и сравнивая результаты прогнозирования с результатами предложенного метода Полносвязные сети прямого распространения (FNN), мы оценили модель по следующим показателям: R-квадрат, RMSE, MAE и MAX (Максимальная ошибка). Окончательные результаты прогнозирования показывают, что ошибка прогнозирования модели KAN, разработанной в данном исследовании, значительно ниже, чем у метода FNN, а стабильность модели выше при работе с зашумленными наборами данных.

ТАБЛИЦА 1. Таблица ошибок

Индекс	Полносвязные сети прямого распространения (FNN)	Сети Колмогорова – Арнольда (KAN)
SoC (%)		
Ошибка (%)		
R-квадрат	0.9944511385706118	0.998217611353285
RMSE (Среднеквадратичная ошибка)	0.01841306237780721	0.010435788969690258
MAE (Средняя абсолютная ошибка)	0.025973253472965818	0.012417057413896326
MAX (%) (Максимальная ошибка)	17.581482368857507	16.048283162747808

5. Заключение. Экспериментальные результаты показывают, что сети Колмогорова – Арнольда (KAN) превосходят традиционные Полносвязные сети прямого распространения (FNN). Однако мы должны тщательно настроить размер и функции активации модели, чтобы полностью использовать потенциал KAN, не вызывая проблем с переобучением. Это особенно важно при использовании ограниченных данных или более сложных моделей. В будущем мы продолжим экспериментировать KAN в сочетании с другими нейронными сетями, такими как LSTM и RNN, или интегрировать KAN с различными традиционными нейронными сетями, чтобы создать модель с наилучшей производительностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. О функции трех переменных // Известия АН СССР. 1957. 114. С. 679–681.
2. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Известия АН СССР. 1956. 108. С. 179–182.
3. Boor C. de. A practical guide to splines. New York : Springer-Verlag, 1978.
4. Vaca-Rubio C. J., Blanco L., Pereira R., Caus M. Kolmogorov-Arnold Networks (KANs) for Time Series Analysis // arXiv preprint. 2024, <https://arxiv.org/abs/2405.08790> / arXiv: 2405.08790.
5. Kind Xiaoming Kolmogorov Arnold Networks (KANs). //, <https://github.com/KindXiaoming/pykan>.
6. Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural Networks. 1989. 2, № 5. P. 359–366.
7. Kollmeyer P., Naguib M., Skells M. LG 18650HG2 Li-ion Battery Data // Mendeley Data, V2. 2020 DOI: <https://doi.org/10.17632/b5mj79w5w9.2>.
8. Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljacic M., Hou T. Y., Tegmark M. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks // arXiv preprint. 2024, <https://arxiv.org/abs/2404.19756> / arXiv: 2404.19756.

Дао Минь Хиен

Иркутский национальный исследовательский технический университет
E-mail: dmhien@ex.istu.edu

Сидоров Денис Николаевич

Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский национальный исследовательский технический университет
Харбинский политехнический университет, Китай
E-mail: contact.dns@gmail.com



К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИТЕЛЕЙ МНОГОКВАРТИРНОГО ДОМА И УПРАВЛЯЮЩЕЙ КОМПАНИИ

© 2024 г. В. С. ЗАХАРЧЕНКО, Н. Н. ШЕЛОМЕНЦЕВА

Аннотация. Продемонстрирован один из возможных подходов к анализу и поиску решений изучаемого процесса, основанного на применении методов математического моделирования. Проблема эффективного взаимодействия жителей многоквартирного дома с управляющей компанией с целью повышения их удовлетворенности описывается как задача оптимального управления. В качестве целевой функции предложено ввести характеристику, численно отражающую удовлетворенность жителей дома в произвольный момент времени. Задачу повышения общей удовлетворенности предлагается рассмотреть через повышение (максимизацию) результативности деятельности управляющей компании, в качестве управления выступает объем денежных средств, который используется управляющей компанией для обслуживания МКД.

Ключевые слова: взаимодействие экономических субъектов, задача оптимального управления, математическое моделирование, удовлетворенность, результативность.

AMS Subject Classification: 91-10; 91-05

В современном обществе управление жилищным фондом играет важную роль в повседневной жизни граждан. Жители многоквартирных домов все чаще активно взаимодействуют с управляющими компаниями, выражая свои требования и ожидания по поводу качества предоставляемых услуг. Однако часто возникают проблемы, связанные с неудовлетворенностью потребителей, недостаточным качеством обслуживания и непрозрачностью процесса взаимодействия. Решение данных проблем бурно обсуждается экспертами отрасли и научным сообществом [1] – [2].

Использование математического подхода к проблемам взаимодействия жителей многоквартирного дома с управляющей компанией открывает новые возможности для разработки стратегий по повышению качества обслуживания и удовлетворенности потребителей. При построении математической модели необходимо учесть такие параметры, как качество предоставляемых услуг (например, уборка, ремонт, обслуживание лифтов), своевременность выполнения необходимых работ, прозрачность финансовых операций, доступность и качество управленческих решений, а также качество коммуникации с жителями. Указанные факторы разнородны, меняются с течением времени t , и, очевидно, было бы неправильно сворачивать их в один показатель.

Обозначим удовлетворенность жителей отдельного многоквартирного дома через $K(t)$, требование к уровню которого можно сформулировать в виде неравенства:

$$K(t) \geq K_{min}(t), \quad (1)$$

где $K_{min}(t)$ — вектор удовлетворенности, координаты которого составлены из минимально допустимых показателей качества жилья. Неравенство означает, что каждая координата вектора $K(t)$ должна быть не меньше соответствующей координаты вектора $K_{min}(t)$.

Как показывает практика, эффективность деятельности управляющей компании (УК) часто не определяется количеством собранных ею денежных средств с собственников жилья. Естественно рассматривать задачу повышения общей удовлетворенности через повышение (максимизацию) результативности деятельности УК, которую можно задавать упорядоченным набором показателей $q(t)$, характеризующих степень реализации запланированной деятельности и достижения запланированных результатов. Требования к показателям результативности деятельности УК выразятся неравенством, аналогичным неравенству (1):

$$q(t) \geq q_{min}(t), \tag{2}$$

где $q_{min}(t)$ – вектор минимально допустимого (по каждому из показателей) качества предоставляемых услуг.

Удовлетворенность $K(t)$ в момент времени t определяется вектором $q(t)$ на всем предшествующем интервале времени $\tau \in [t_0, t]$, а также техническим состоянием объекта с момента его принятия на обслуживание УК: $\tau < t_0$. Удовлетворенность $K(t)$ можно описать соотношением

$$K(t) = K(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau, q(\tau), K(\tau))d\tau, \tag{3}$$

где вектор-функции $q(\tau)$ описывает результативность деятельности управляющей компании при $\tau \geq t_0$, $F(\tau, q(\tau), K(\tau))$ – некоторая вектор функция указанных переменных, отражающая формирование определенного уровня удовлетворенности в ходе эксплуатации МКД и подлежащая определению. Функциональная зависимость (3) демонстрирует очевидный факт: чем лучше техническое состояние МКД (задаваемое вектором $K(t_0)$) и эффективнее работа УК, тем выше удовлетворенность жителей. Управление деятельностью УК с математической точки зрения следует рассматривать как вектор-функцию $u(t)$, представляющую объем денежных средств, который используется УК для обслуживания МКД. Управление в УК в период времени $\theta \leq \tau$ оказывает непосредственное влияние лишь на вектор $q(\tau)$ качества предоставляемых услуг:

$$q(\tau) = \int_0^\tau f(\theta, u(\theta))d\theta, \tag{4}$$

где $f(\theta, u(\theta))$ – вектор функция, которая описывает влияние управления в УК на ее результативность, и подлежат определению.

Выражения (3), (4) являются математической моделью процесса взаимодействия жителей многоквартирного дома с управляющей компанией с целью повышения их удовлетворенности и демонстрируют высокую алгоритмическую сложность поставленной задачи.

Интегральным выражениям (3), (4) эквивалентна система дифференциальных уравнений (при учете всех необходимых факторов и введении начальных условий, таких как $K_0 = K(t_0)$ и т. п.):

$$\frac{dK(t)}{dt} = F(t, q(t), K(t)), \tag{5}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t, u(t)). \tag{6}$$

Следующие этапы исследования должны быть направлены на установление вида вектор функций $q(t)$, $K(t)$, $F(t, q, K)$, $f(t, u)$.

Поиск оптимального управления $u(\theta)$, заданным на некотором $\theta \in [\tau_0, \tau]$, должен осуществляться в результате решения одной из следующих оптимизационных задач:

$$K(t, u(\theta)) \rightarrow \max_{u(\theta)}, \tag{7}$$

$$K(t, u(\theta)) \rightarrow K_{opt}, \tag{8}$$

где K_{opt} – заданный вектор. Векторный критерий (7) должен пониматься как система критериев, в которых максимизируется каждая координата вектора K .

Поскольку своевременная и результативная деятельность УК, описываемая $q(t)$, должна приводить к повышению уровня удовлетворенности населения, то задача (7) сводится к задаче оптимального управления организацией деятельностью УК (а при определенных условиях тождественна этой задаче):

$$q(t, u(\theta)) \rightarrow \max, \quad u = u(\theta). \tag{9}$$

Естественно, что задачи (7) и (9) существенно упростятся, если будет предложен корректный и всесторонне обоснованный способ свертки векторных показателей K и q в соответствующие скалярные показатели, после чего векторные критерии (7) и (9) примут скалярную форму.

Предложенный в данной работе подход может служить основой для разработки теоретических и прикладных моделей взаимодействия жителей МКД с управляющими компаниями с целью повышения качества жизни населения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов В. Р., Солопова Н. А.* Подходы к поведению анализа удовлетворенности собственников квартир многоквартирных домов качеством услуг управляющих компаний // Международный журнал прикладных наук и технологий Integral. 2021. № 1. С. 298–303.
2. *Белая М. Н., Кравцова С. Е., Гитовская И. В.* Анализ процедур оценки качества управляющих организаций жилищно-коммунальных услуг для формирования потребительского рейтинга // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2020. № 2. С. 86–90.

Захарченко Варвара Сергеевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: varvaraz@bk.ru

Шеломенцева Наталья Николаевна
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: natshel@bk.ru



ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ШАПИРО В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ГРУППЫ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© 2024 г. Д. С. ЛУКЪЯНЦЕВ, Н. Т. АФАНАСЬЕВ, А. Б. ТАНАЕВ

Аннотация. Предложена численная схема и приведены результаты математического моделирования гравитационного замедления времени распространения электромагнитного излучения в сложном поле тяготения группы астрофизических объектов. Численное интегрирование уравнений геометрической оптики проводится в вакууме с эффективным показателем преломления, выраженным через гравитационный потенциал. Рассчитаны дистанционно-временные характеристики излучения для различных конфигураций полей тяготения. Показано, что для случаев двух и трех изолированных гравитационных объектов могут сформироваться многозначные ДВХ. Вследствие эффекта гравитационного линзирования допустим многопутевый процесс распространения излучения в пункт наблюдения с различными задержками Шапиро вдоль каждого пути. Эти измеряемые задержки дают дополнительную информацию о структуре сложного гравитационного потенциала и наряду с другими характеристиками принятого излучения могут быть использованы для обнаружения массивных неизлучающих астрофизических объектов.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, гравитационное поле, групповая задержка, эффект Шапиро.

AMS Subject Classification: 85-10

1. Введение. Хорошо известно, что одним из следствий общей теории относительности (ОТО) [5, 8, 11] является гравитационное замедление времени при распространении электромагнитного излучения вблизи массивного астрофизического объекта [1, 2]. Этот эффект был предсказан Ирвином Шапиро для случая распространения радиоизлучения вблизи Солнца [10]. Поставленные эксперименты по радиолокации поверхностей Меркурия и Венеры с высокой точностью подтвердили замедление времени. Задержка импульсов радара, вызванная гравитационным полем Солнца, составила порядка 200 микросекунд, что было на пределе возможностей технологий прошлого века. В настоящее время благодаря интенсивному развитию прецизионного оборудования с использованием новой элементной базы на практике реализуются тонкие эксперименты, связанные с наблюдениями гравитационных возмущений от объектов, удаленных на космологические расстояния [6, 7]. Поэтому интерес к эффекту Шапиро возродился вновь. В частности, в гамма-астрономии большое внимание уделяется поиску гравитационно-линзированных гамма-всплесков. Под воздействием поля тяготения массивного объекта, встречающегося в окрестности луча зрения на источник, в результате линзирования может реализоваться двухпутевое распространение кратковременного гамма-импульса. Вследствие эффекта Шапиро эти моды импульса достигнут наблюдателя в разные моменты времени, причем величина групповой задержки между модами пропорциональна массе гравитационного объекта.

Измерения замедления Шапиро имеет большое значение и при интерпретации наблюдаемого радиоизлучения пульсаров. Массивные объекты, движущиеся в окрестности луча зрения, направленного на пульсар, оказывают влияние на временные характеристики излучения и приводят к модуляции моментов прихода импульсов пульсара. Длительные наблюдения моментов прихода импульсов пульсаров используют для обнаружения невидимых объектов большой массы.

Для количественных оценок направления распространения и временной задержки электромагнитного излучения в гравитационном поле одиночного массивного объекта обычно используют

метод построения хода лучей в линзе, когда вместо реальных лучевых траекторий используют их асимптоты. Однако в случае нескольких объектов метод асимптотического представления траекторий лучей не достаточно точен, и для расчета сложной интерференционной картины, связанной с влиянием гравитации, необходимо построение истинных траекторий.

Целью данной работы является создание схемы численного моделирования гравитационного замедления времени распространения электромагнитного излучения (эффекта Шапиро) в сложном поле тяготения группы астрофизических объектов.

2. Математический аппарат и результаты численного моделирования. Расчеты направления распространения электромагнитного излучения в сложном гравитационном поле проводились на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений в полярной системе координат [3, 9]:

$$\frac{dR}{d\varphi} = R \operatorname{ctg} \beta; \quad \frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \beta - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1, \quad (1)$$

где R, φ — радиальная и угловая координаты луча, β — угол рефракции луча, n — эффективный показатель преломления вакуума в присутствии поля тяготения, который при условии аддитивного вклада каждого объекта в искривление пространства задавался в виде [4]:

$$n = 1 + \frac{R_g}{R} + \sum_{i=1}^N A_i \exp[-b_{\varphi i}(\varphi - \varphi_{Li})^2 - b_{Ri}(R - R_{Li})^2], \quad (2)$$

где R_g — гравитационный радиус основного объекта поля тяготения, N — количество дополнительных областей возмущения; $A_i, \varphi_{Li}, R_{Li}, b_{\varphi i}, b_{Ri}$ — амплитуда вклада каждого гравитационного объекта в изменение показателя преломления вакуума, координаты положения и масштабы областей возмущения, соответственно.

Для расчета групповой задержки излучения использовалось уравнение вида:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{nR}{c \sin \beta}, \quad (3)$$

где c — скорость света.

Задержки Шапиро вычислялись по следующей схеме. Проводился численный расчет групповой задержки путем совместного интегрирования уравнений (1) и (3) при заданных параметрах модели показателя преломления (2). Фиксировалась конечная угловая координата луча φ_k , прошедшего на расстояние R_k . Затем проводился прицельный расчет групповой задержки излучения при распространении в чистом вакууме (при $n = 1$) до угловой координаты φ_k . Заключительным шагом являлся расчет разности между полученными групповыми задержками.

Расчеты задержек Шапиро проводились при выбранных начальных условиях. Радиальная и угловая координаты источника электромагнитного излучения $(R_n(\varphi_n); \varphi_n) = (50 \text{ cul}; 0 \text{ rad})$, где cul — условная единица длины. Начальное значение функции $\beta(\varphi_n) = \beta_n$, где β_n варьировался в диапазоне $[-0.78; -0.20] \text{ rad}$. Параметры модели (2) составляли: $R_g = 1 \text{ cul}$, $A_1 = 0.5$, $b_{\varphi 1} = 3.24$, $b_{R1} = 1 \text{ cul}^{-2}$, $\varphi_{L1} = 0.4 \text{ rad}$, $R_{L1} = 10 \text{ cul}$, $A_2 = 0.5$, $b_{\varphi 2} = 2.89$, $b_{R2} = 1 \text{ cul}^{-2}$, $\varphi_{L2} = 0.6 \text{ rad}$, $R_{L2} = 10 \text{ cul}$. Расчет проводился до расстояния $R_k = 50 \text{ cul}$. На рис.1 представлены результаты численного моделирования дистанционно-временных характеристик (ДВХ) для различных конфигураций полей тяготения, где по оси y указаны значения задержек Шапиро.

Как следует из рис.1а, в случае одиночного гравитационного объекта с увеличением пути распространения излучения происходит рост задержки Шапиро. Чем ближе к гравитирующему объекту распространяется луч, тем больше величина задержки. Для случая двух гравитационных объектов (см. рис.1б) зависимость ДВХ качественно другая. Следует отметить, что вследствие эффекта линзирования на определенные расстояния приходят несколько лучей с различными значениями задержки Шапиро. Для восстановления гравитационного потенциала сложного поля

тяготения такие разнесенные по времени лучи полезны и информативны. Для другого пространственного расположения двух гравитационных объектов (см. рис.1в) хорошо виден эффект гравитационного линзирования, который приводит к увеличению пути распространения луча. Однако, поскольку задача ограничивается распространением луча с одной стороны несимметричной системы астрофизических объектов, то многопутевости в зависимости ДВХ для рассматриваемого случая не наблюдается. Случай сложного гравитационного поля для трех астрофизических объектов (см. рис.1г) показывает формирование области, в которой возможно многопутевое распространение излучения с различными задержками Шапиро вдоль каждого пути. Как и в случае рис.1б, многозначность ДВХ на рис.1г дает дополнительную информацию для восстановления структуры гравитационного потенциала.

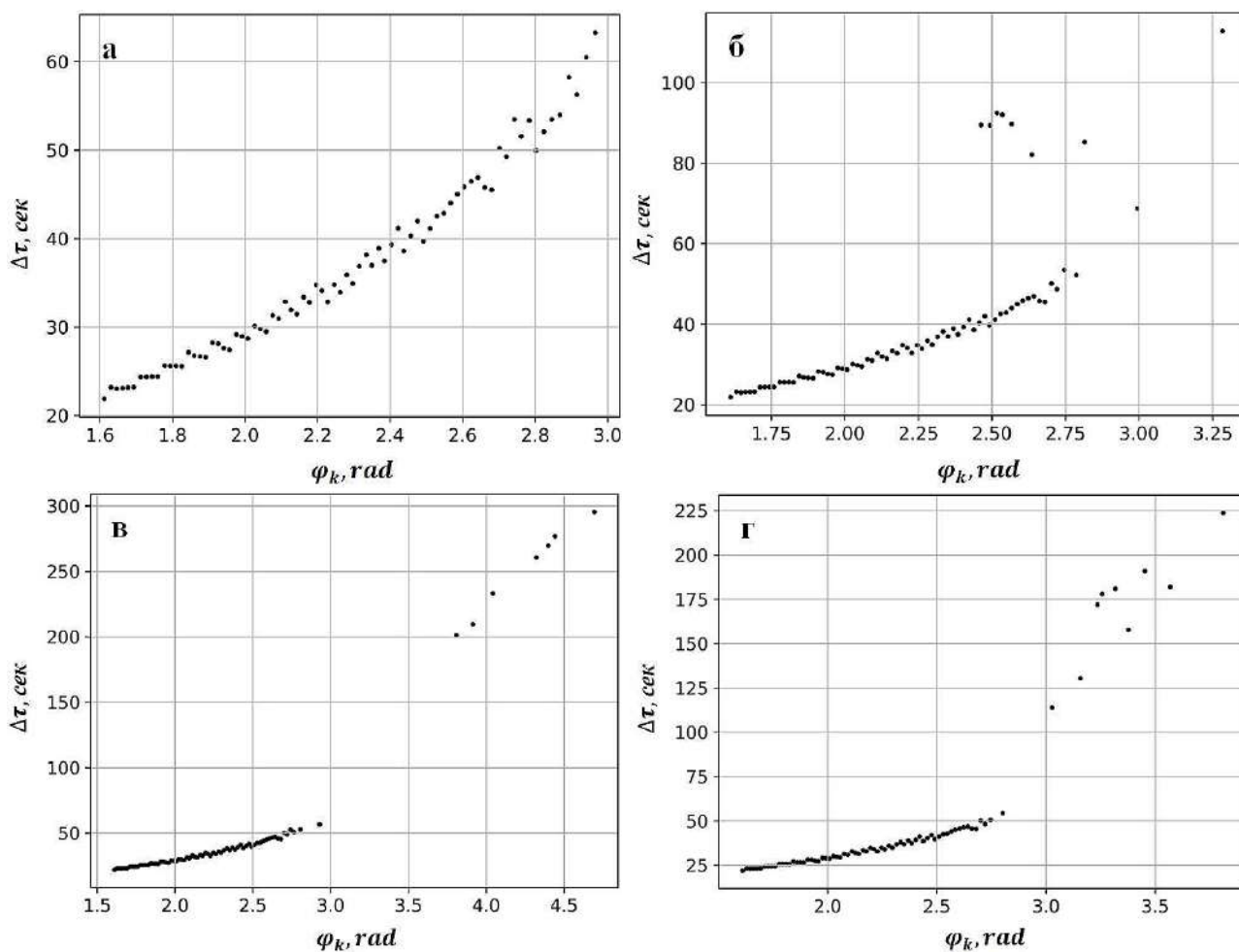


Рис. 1. Дистанционно-временные характеристики для различных конфигураций поля тяготения: а — $N = 0$; б — $N = 2, A_2 = 0$; в — $N = 2, A_1 = 0$; г — $N = 2$.

3. Заключение. Разработанная схема численного моделирования позволяет рассчитать гравитационное замедление времени распространения космического электромагнитного излучения в гравитационном поле группы астрофизических объектов. Количественная оценка задержек Шапиро и других рефракционных характеристик принятого излучения дает дополнительные сведения для восстановления сложного гравитационного потенциала и обнаружения массивных неизлучающих астрофизических объектов. Результаты расчетов направления распространения и временной задержки электромагнитного излучения в гравитационном поле могут быть использованы для интерпретации данных измерений характеристик гамма-всплесков и радиоизлучения пульсаров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блюх П. В., Минаков А. А.* Гравитационные линзы. Киев : Наукова Думка, 1989. 240 с.
2. *Заларов А. Ф.* Гравитационные линзы и микролинзы. М. : Янус-К, 1997. 328 с.
3. *Лукьянцев Д. С., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б., Чудаев С. О.* Математическое моделирование рефракции электромагнитных волн в гравитационном поле // *Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023)* : материалы 5-й Междунар. конф. Иркутск, 18–23 сент. 2023 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2023. С. 201–204.
4. *Лукьянцев Д. С., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б., Чудаев С. О.* Численно-аналитическое моделирование гравитационного линзирования электромагнитных волн в случайно-неоднородной космической плазме // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2024. 16, № 2. С. 433–443.
5. *Мизнер Ч., Торн К. Уиллер Дж.* Гравитация. Ч. 1. М. : Мир, 1977. 480 с.
6. *Acciari V. A. et al.* Multiwavelength study of the gravitational lensed blazar QSO B0218+357 between 2016 and 2020 // *MNRAS.* 2020. 510. P. 2344–2362.
7. *Barnacka A., Geller M. J., Dell’Antonio I P., Benbow W.* Strongly lensed jets, time delay, and the value of H_0 . // *The Astrophysical Journal.* 2015. 799, № 1. 9 p.
8. *Einstein A. I.* Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field // *Science.* 1936. 84, № 2188. P. 506–507.
9. *Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I.* Geometrical Optics of Inhomogeneous Medium. Berlin : Springer-Verlag, 1990. 312 p.
10. *Shapiro I. I.* New method for the detection of light deflection by solar gravity // *Science.* 1967. 157. P. 806–808.
11. *Zwicky F.* On the masses of nebulae and clusters of nebulae // *The Astrophysical Journal.* 1937. 86, № 3. P. 217–246.

Лукьянцев Дмитрий Сергеевич
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: smeofs1997@mail.ru

Афанасьев Николай Тихонович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: spacemaklay@gmail.com

Танаев Андрей Борисович
Иркутский государственный университет (ИГУ)
E-mail: tanaev.ab@yandex.ru



МОДЕЛЬ ВИХРЕВОГО ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. В. Л. МИРОНОВ, С. В. МИРОНОВ

Аннотация. Представлена модель течения неньютоновской жидкости на основе системы уравнений, описывающей вихревые потоки с учетом продольного движения и вращения вихревых трубок. В случае плоского течения Пуазейля в канале между двумя стенками данная модель имеет аналитическое решение в виде двухпараметрического распределения средней скорости. В качестве примера рассмотрено течение водного раствора полиакриламида с различными концентрациями полимера и при различных числах Рейнольдса. Показано, что модельные профили средней скорости в канале хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: модель вихревого потока, неньютоновская жидкость, течение Пуазейля, распределение скоростей.

AMS Subject Classification: 76A05, 76D17

1. Введение. Неньютоновские жидкости характеризуются нелинейной зависимостью напряжения сдвига от скорости сдвига [3]. В частности, реологическое поведение жидкостей, параметры которых не зависят от времени, часто описывается феноменологическим степенным законом Оствальда-де Вале (ОВ). В этой модели связь между эффективной вязкостью (μ_e) и скоростью сдвига представлена степенной функцией. Для течения в плоскости (x, y) , направленного вдоль оси X , закон ОВ записывается в следующем виде:

$$\mu_e = \alpha \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^{n-1}, \quad (1)$$

где v_x является x -компонентой скорости, а α — коэффициент пропорциональности. Для большинства независимых от времени жидкостей $0 < n < 1$. Данная простая модель широко используется для аппроксимации экспериментальных данных в инженерной гидродинамике.

Выражение (1) позволяет классифицировать различные жидкости по индексу n . Однако экспериментальные исследования [1] показывают, что нормированные профили скорости реальных жидкостей определяются не только значением индекса n , но и существенно зависят от числа Рейнольдса (Re). Это означает, что индекс n характеризует не только вязкость самой жидкости, но зависит также от средней скорости потока. Кроме того индексы n , измеренные по профилям скорости, существенно отличаются от значений, измеренных с помощью реометров [1].

В настоящем докладе представлен альтернативный подход к описанию неньютоновской жидкости, основанный на уравнениях для вихревого потока [4], которые учитывают как продольное движение, так и вращение вихревых трубок. Недавно данный подход был применен для описания плазмы (в рамках гидродинамической двухжидкостной модели) [5], а также стационарных плоских турбулентных течений в прямоугольных каналах [6], [7]. В данной работе мы показываем, что эта же модель вихревого потока, примененная для описания стационарного течения неньютоновской жидкости, также дает хорошее согласие между модельными распределениями средней скорости и экспериментальными профилями скорости в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

2. Уравнения вихревого потока. Вихревое движение жидкости может быть описано системой уравнений, основанных на модели вихревых трубок Гельмгольца. В случае изэнтропного

потока ($s = const$) данная система уравнений записывается в следующем виде [4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w} + \nabla u &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \mathbf{w} - \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \xi &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) u + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \xi + \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь c — скорость звука, \mathbf{v} — скорость потока, μ — кинематическая вязкость. Величина u пропорциональна энтальпии, \mathbf{w} — угловой вектор, характеризующий вращение вихревых трубок, а величина ξ характеризует закрученность вихревых трубок. В случае стационарного плоского течения система существенно упрощается.

3. Плоское течение Пуазейля. Рассмотрим стационарное плоское течение жидкости под действием постоянного градиента давления в прямоугольном канале вдоль оси X (рис. 1).

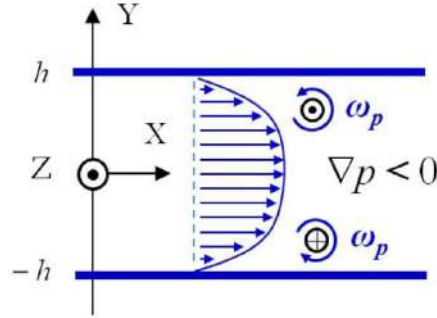


Рис. 1. Плоское течение Пуазейля в канале.

В этом случае скорость имеет только компоненту $v_x = v(y)$, а вектор поворота вихревых трубок только компоненту $w_z = w(y)$. В стационарном режиме вектор поворота может быть представлен как $w(y) = 2c\omega(y)t + \varphi(y)$, где $\omega(y)$ — угловая скорость вращения трубок, а $\varphi(y)$ — фаза. Поскольку вращение трубок происходит в разных направлениях вблизи стенок канала, то скорость вращения равна $\omega(y) = \kappa y$. Тогда усредненные по времени уравнения (2) в проекциях на оси X и Y записываются в следующем виде [7]:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - g &= 0, \\ -\lambda \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\kappa y &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где параметр g пропорционален градиенту давления, а $\lambda = \mu/c$ является характерным масштабом вязкости. Граничные условия задачи соответствуют прилипанию жидкости к стенкам канала

$$\begin{aligned} \bar{v}(h) &= \bar{v}(-h) = 0, \\ \bar{\varphi}(h) &= \bar{\varphi}(-h) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения системы (3) с граничными условиями (4) записываются в следующем виде:

$$\bar{v} = \sigma g h \frac{\cosh(h/\lambda) - \cosh(y/\lambda)}{\sinh(h/\lambda)} + g h^2 \frac{(1 - \sigma)}{2\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad (5)$$

$$\bar{\varphi} = -\sigma g h \left(\frac{\sinh(y/\lambda)}{\sinh(h/\lambda)} - \frac{y}{h} \right). \quad (6)$$

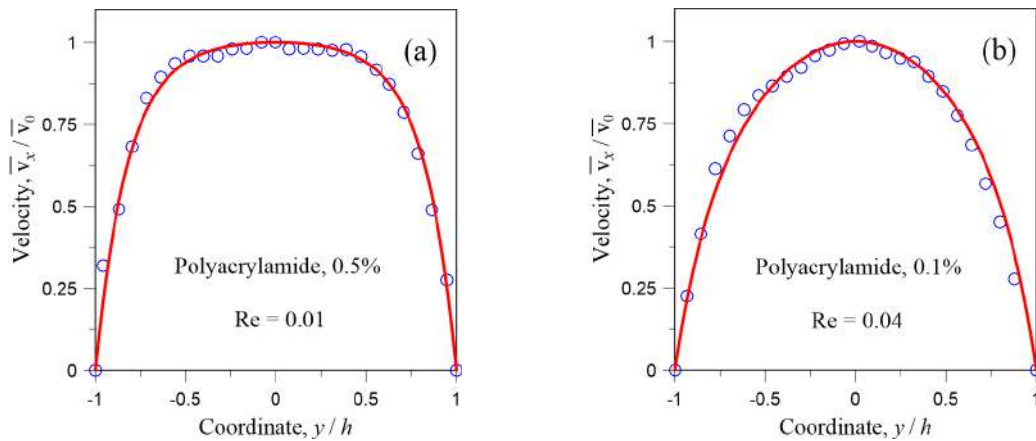


Рис. 2. Нормированные профили скорости потока водного раствора полиакриламида различной концентрации при различных числах Рейнольдса. Кружки – экспериментальные данные [2], сплошные линии – модельные профили (5). Подгоночные параметры (а) $\lambda/h = 0.172$, $\sigma = 0.98$; (б) $\lambda/h = 0.17$, $\sigma = 0.7$.

В выражениях (5) и (6) безразмерный параметр σ связан с градиентом давления и поперечным градиентом угловой скорости

$$\sigma = 1 - \frac{2\lambda\kappa}{g}. \quad (7)$$

Для сравнения с экспериментом профиль скорости (5) нормируется на максимальную скорость \bar{v}_0 (\bar{v}_0 – скорость при $y = 0$). В качестве примера на рис. 2 приведены результаты аппроксимации экспериментальных профилей скорости [2] распределением (5). Наблюдается хорошее согласование экспериментальных и модельных кривых для различных концентраций раствора полиакриламида и различных чисел Рейнольдса.

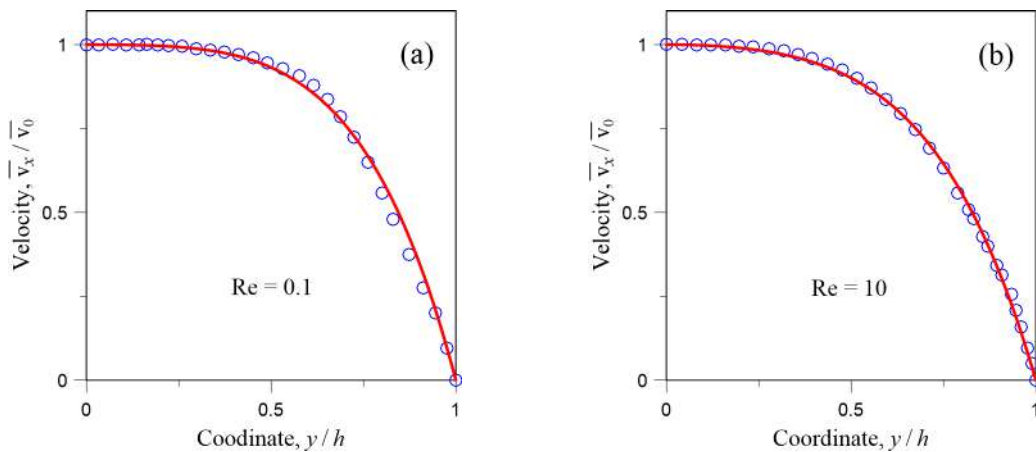


Рис. 3. Профили скорости раствора полиакриламида (0.4%) с различными Re. Кружки – экспериментальные данные [1], линии – модельные профили (5). (а) $\lambda/h = 0.45$, $\sigma = 1.85$. Индекс $n = 0.34$. (б) $\lambda/h = 0.45$, $\sigma = 1.69$. Индекс $n = 0.4$.

4. Обсуждение. В случае плоского течения Пуазейля закон ОВ (1) дает следующее выражение для распределения скорости в канале

$$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_0} = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}, \quad (8)$$

Это выражение достаточно хорошо описывает стационарные профили скорости неньютоновской жидкости. Однако при аппроксимации профилей скорости одной и той же жидкости для течений

с разными Re получаются разные индексы n [1]. В этом смысле индекс n характеризует не столько вязкие свойства самой жидкости, сколько динамические свойства потока. Напротив, двухпараметрическая модель вихревого течения (5) позволяет аппроксимировать профили скорости при разных Re одним и тем же параметром λ/h , который определяется кинематической вязкостью жидкости. В качестве примера на рис. 3 показаны результаты аппроксимации экспериментальных профилей [1] для потоков раствора полиакриламида (0,4%) с существенно различными Re . Аппроксимация экспериментальных профилей распределением (8) показывает, что значения индекса n составляют $n = 0.34$ для $Re = 0.1$ и $n = 0.4$ для $Re = 10$. С другой стороны, подгонка с помощью модельного распределения (5) показывает, что в широком диапазоне чисел Re жидкость характеризуется одной и той же кинематической вязкостью (параметр $\lambda/h = 0.45$), но разными параметрами σ , зависящими от напора жидкости и скорости вращения вихревых трубок.

Таким образом, на примере плоского течения раствора полиакриламида, показано, что модель вихревого потока обеспечивает хорошее согласование между расчетными профилями скорости и экспериментальными данными в широком диапазоне концентраций полимера и чисел Рейнольдса. Мы полагаем, что данная модель может быть полезна для адекватной оценки параметров неньютоновских жидкостей в инженерной гидродинамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ansari S., Rashid M., Waghmare P. R., Nobes D. S.* Measurement of the flow behavior index of Newtonian and shear-thinning fluids via analysis of the flow velocity characteristics in a mini-channel // *SN Applied Sciences*. 2020. 2. P. 1787.
2. *Fu T., Carrier O., Funfschilling D., Ma Y., Li H. Z.* Newtonian and Non-Newtonian flows in microchannels: inline rheological characterization // *Chemical Engineering and Technology*. 2016. 39, № 5. P. 987–992.
3. *Irgens F.* Rheology and non-Newtonian fluids. Springer, 2013. 192 p.
4. *Mironov V. L., Mironov S. V.* Generalized sedeonic equations of hydrodynamics // *European Physical Journal Plus*. 2020. 135, № 9. P. 708.
5. *Mironov V. L.* Self-consistent hydrodynamic two-fluid model of vortex plasma // *Physcs of Fluids*. 2021. 33, № 3. P. 037116.
6. *Mironov V. L., Mironov S. V.* Vortex model of plane Couette flow // *Fluids*. 2023. 8, № 6. P. 165.
7. *Mironov V. L., Mironov S. V.* Vortex model of plane turbulent air flows in channels // *Advances in Aerodynamics*. 2024. 6, № 8. P. 1–17.

Миронов Виктор Леонидович
Институт физики микроструктур РАН (ИФМ РАН)
E-mail: mironov@ipmras.ru

Миронов Сергей Викторович
Институт физики микроструктур РАН (ИФМ РАН)
E-mail: svmironov@ipmras.ru



ТЕПЛОВАЯ МАШИНА НА ВРАЩАЮЩИХСЯ ФУЛЛЕРЕНАХ

© 2024 г. О. Д. НОСЫРЕВ

Аннотация. Рассмотрен тепловой двигатель на вращающихся фуллеренах. Рабочее тело движется по циклу Карно в координате угловой момент – угловая скорость. Проведен численный эксперимент для демонстрации рабочего цикла детали. Сделан вывод о перспективности создания тепловых машин на основе киральных эффектов.

Ключевые слова: молекулярная динамика, температура, тепловая машина, угловая скорость, фуллерен, цикл Карно.

AMS Subject Classification: 82D05

1. Введение. Термодинамика и статистическая механика вращающихся систем изучаются со времен работ Максвелла [2,3]. В последние годы наибольший интерес вызывает изучение класса киральных эффектов, возникающих во вращающихся системах частиц с собственным угловым моментом [1]. Хотя киральные эффекты обычно изучают в системах элементарных частиц, они могут наблюдаться и в классических системах, состоящих из молекул. Предметом настоящей работы является исследование термодинамики вращающихся система крупных углеродных молекул, в частности фуллеренов. Фундаментальным результатом в области классической статистической механики является распределение Гиббса для вращающейся системы, впервые полученное в [2],

$$f(\Gamma) = \frac{1}{Z_0} \exp\left(-\frac{E(\Gamma) - (\Omega, J(\Gamma))}{kT}\right); Z_0 = \int \exp\left(-\frac{E(\Gamma) - (\Omega, J(\Gamma))}{kT}\right) d\Gamma. \quad (1)$$

Здесь E – внутренняя энергия, J – полный угловой момент, T – температура, а k – постоянная Больцмана. Предполагается, что энергия и полный угловой момент являются функциями микроскопического состояния Γ . Величина Z_0 – статистическая сумма, $d\Gamma$ обозначает элементарный элемент объема фазового пространства. Оценки показывают, что макроскопическое вращение возбуждает вращательные степени свободы, если произведение угловой скорости Ω и момента инерции частицы I составляет, по меньшей мере, порядок постоянной Планка \hbar . Для малых молекул это неравенство требует очень высоких угловых скоростей порядка 10^{10} c^{-1} и выше, находящихся далеко за пределами технических возможностей современных центрифуг. Для тяжелых молекул, таких как фуллерены, неравенство может быть выполнено при гораздо меньших угловых скоростях в диапазоне 10^5 – 10^6 оборотов в минуту из-за их большего момента инерции. Такие угловые скорости доступны с помощью современных технологий. Конкретной целью настоящей работы является создание тепловой машины на основе киральных эффектов в макроскопической системе, содержащей фуллерен C60.

2. Описание эксперимента. Рассматривается тепловая машина, состоящая из сферического сосуда с гелием, в центре которого закреплен вращающийся вдоль оси z декартовой системы координат фуллерен. Взаимодействие атомов гелия атомами углерода, образующими фуллерен, и друг с другом описывается потенциалом Леннарда-Джонса. На границе сферы заданы условия абсолютно упругого отражения. Тепловая машина работает по циклу Карно. На рис. 1 представлен график цикла работы тепловой машины в координатах (ω, J) и в координатах (T, S) . На отрезке АВ фуллерену задается начальная скорость ω_0 . Газ начинает раскручиваться при постоянной температуре. Затем на участке ВС вынимается фуллерен и газу придается дополнительная

угловая скорость, температура газа уменьшается. На участке CD в систему добавляется фуллерен, который уменьшает угловую скорость газа при постоянной температуре. Далее происходит адиабатическое торможение газа до ω_0 . В координатах (ω_0, J) рабочий цикл изображается двумя участками изотерм и адиабат. Уравнения кривых определяются уравнениями состояниями

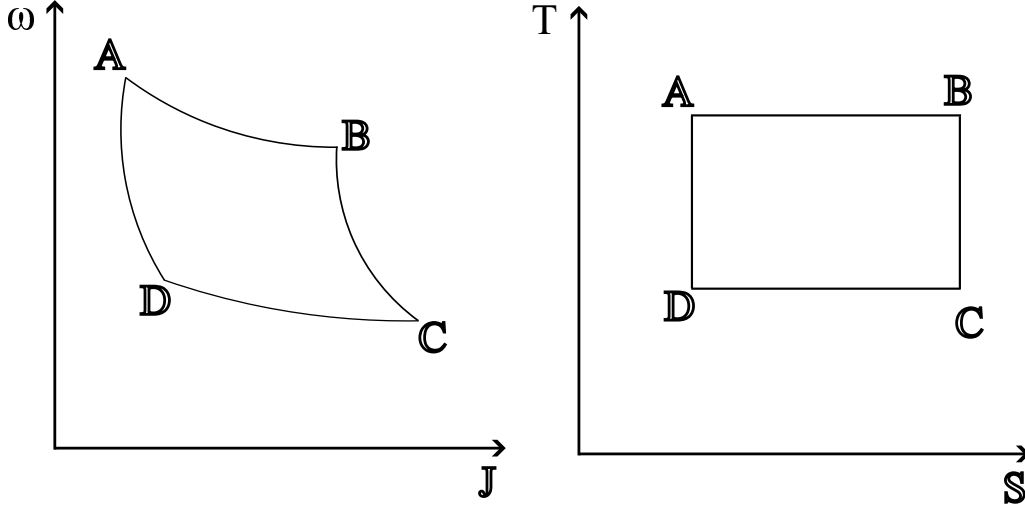


Рис. 1. Цикл Карно, работы тепловой машины в координатах (ω, J) и (T, S)
gt

фуллерена в поле центробежных сил, которые имеют следующий вид:

$$S = \ln \left(\sqrt{\frac{8\pi\theta^3 I^3}{\hbar^6}} \left(1 + \frac{\hbar^2 I^2}{4\theta} + \frac{\omega^2 I}{\theta} - \frac{273\hbar^4 I^4}{64\theta^2} - \frac{17\hbar^2 \omega^2}{48\theta^2} + \frac{\omega^4 I^2}{8\theta^2} \right) \right) + \frac{3}{2} - \frac{10\hbar^4}{36\theta^2 I^2} - \frac{5\omega^2 \hbar^2}{72\theta^2}, \quad (2)$$

$$J = \omega I + \frac{5\hbar^2 \omega}{36\theta}. \quad (3)$$

Совершение работы тепловой машиной достигается за счет того, что энтропия фуллерена зависит от угловой скорости вращения окружения. Конкретная задача численного эксперимента, рассматриваемого в настоящей работе состояла в том, чтобы пронаблюдать обмен энергией вращательного движения между фуллереном C60 и газом и убедиться в наличии киральных эффектов в такой системе.

Моделирование проводится методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом по времени $\delta t = 10^{-6}$ нс. Время релаксации системы составляет около 10–14 с. Точность расчетов составляет 10^{-8} отн. единиц измерения и проверяется законом сохранения энергии. Потенциал Леннарда-Джонса определяется двумя параметрами взаимодействия: глубиной потенциальной ямы ϵ и радиусом взаимодействия σ . Для значения $\sigma = 0,34$ нм (для атомов углерода), подбирается глубина потенциальной ямы таким образом, чтобы энергия колебаний частиц, участвующих в движении, соответствовала определенному значению температуры. В данном случае, $T = 273$ К ($\epsilon/k = 5,1$ К, где k – постоянная Больцмана). Колебания атомов углерода в фуллерене соответствуют той же температуре. Их включение в рассмотрение не влияет на характер крупномасштабных перемещений из-за малой массы атомов и прочных углеродных связей.

Взаимодействие между молекулами газа и фуллереном описывается потенциалом Леннарда-Джонса, который имеет вид:

$$U(\rho_{jk}) = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{\rho_{jk}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\rho_{jk}} \right)^6 \right), \quad (4)$$

где ρ_{jk} – расстояние между взаимодействующими молекулами:

$$\rho_{jk} = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2}. \quad (5)$$

3. Результаты экспериментов. В данной работе рассматривается участок АВ цикла Карно работы тепловой машины. В ходе проведения численного эксперимента были установлены следующие параметры системы. Радиус сферы составляет 3 нанометра. Количество частиц газа гелия $N = 100$. Температура газа на изотерме АВ составляет 268 Кельвинов. Угловая скорость фуллера имеет фиксированное значение $\omega_0 = 3 * 10^{12}$ Герц. Угловая скорость газа измеряется следующим образом.

$$\omega = \frac{J}{I}, \quad 345J = m \sum_{i=1}^{100} (x_i p_y^i - y_i p_x^i), \quad I = m \sum_{i=1}^{100} (x_i^2 + y_i^2), \quad (6)$$

здесь m — масса атома гелия, x_i, y_i — координаты i -ой частицы газа, p_x^i, p_y^i — компоненты импульса i -ой частицы. На рис. 2 представлены значения угловой скорости вращения газа гелия при отсутствии вращения у фуллера в зависимости от времени. На рис. 3 представлены значения угловой скорости вращения газа гелия при отсутствии вращения фуллера с угловой скоростью ω_0 в зависимости от времени.

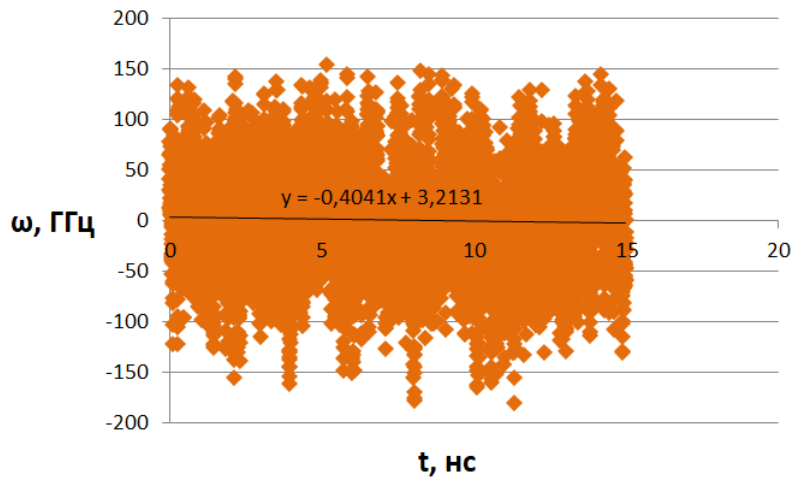


Рис. 2. График угловой скорости газа при угловой скорости фуллера $\omega_0 = 0$

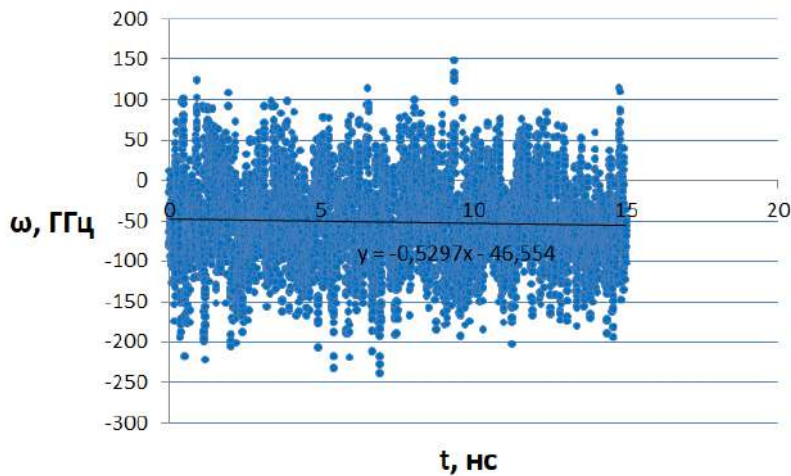


Рис. 3. График угловой скорости газа при угловой скорости фуллера $\omega_0 = 3 * 10^{12}$ Герц

Представленные графики показывают, что угловая средняя угловая скорость газа за 15 нс при отсутствии вращения составляет 3 гигагерца. Тогда как при вращении фуллерена с угловой скоростью $\Omega = 3 \cdot 10^{12}$ средняя угловая скорость за 15 нс составляет 47 гигагерц. Изменение скорости вращения свидетельствует о возможности обмена энергией вращательного движения между гелием и фуллереном. Это демонстрирует возможность создания тепловой машины, основанной на киральных эффектах в системе фуллеренов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fukushima K.* Extreme matter in electromagnetic fields and rotation // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2019. 107. P. 167–199.
2. *Gibbs J. W.* Elementary principles in statistical mechanics: developed with especial reference to the rational foundations of thermodynamics // C. Scribner's sons. 1902.
3. *Maxwell J.C.* On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points // Cambr. Phil. Trans. 1879. 12. P. 713–741.

Носырев Олег Дмитриевич
Томский государственный университет (ТГУ)
E-mail: olegnoyrev771@gmail.com

Научное издание

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
(DYSC 2024)**

Материалы 6-й Международной конференции
Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.

ISBN 978-5-9624-2309-8

Материалы публикуются в авторской редакции

Темплан 2024 г. Поз. 97
Уч.-изд. л. 18,5

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124