А.Б. Нерсесян

Об одном обобщении теоремы Монтессу де Болора

Abstract. We prove a generalization of the theorem of de Montessus de Bollore for a large class of functional series investigated in [14]. In particular multivalued approximants for power series, as well as for series of Faber and Gegenbauer polynomials are considered.

Numerical results are presented.

1 Введение

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$ и задана степенным рядом (элементом)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{*}$$

Для пары целых чисел $n, m \geq 0$ аппроксимацией Паде $[n/m]_f$ называется рациональная функция $P_n(z)/Q_m(z),\ P_n = p_n z^n + \cdots + p_0, Q_m = z^m + q_{m-1} z^{m-1} \cdots + q_0$, удовлетворяющая условиям "касания в нуле"(см. [1])

$$Q_m(z)f(z) - P_n(z) = O(z^{n+m+1}),\ z \to 0$$

Известна следующая теорема Монтессу де Болора

Теорема M, ([2],1902) *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в круге $C_R : |z| < R$ и имеет в нем ровно m полюсов (с учетом их кратности). Тогда:*

i.При достаточно большом n $[n/m]_f$ имеет ровно m полюсов (с учетом их кратности), причем при $n \to \infty$ к каждому s-кратному полюсу $f(z)$ стремится ровно s полюсов $[n/m]_f$.

ii. Равномерно на любом компакте $K \subset C_R$, не содержащем полюсов $f(z)$,

$$[n/m]_f \to f(z),\ n \to \infty$$

Как видим. речь идет об эффективном аналитическом продолжении мероморфной функции за пределы круга сходимости его элемента. Полное описание мероморфного продолжения степенного ряда (*) посредством строк $[n/m]_f,\ m = const,\ n \to \infty$ дано в работе [3]. В работе [4] приведен аналог Теоремы M для наилучших рациональных приближений $P_n(z)/Q_m(z)$ на замкнутых ограниченных множествах.

Другие известные обобщения и развития этой теоремы также относятся к аппроксимациям рациональными функциями. Так, она обобщена на случай вектор-функций $f(z) = \{f_1(z), \cdots, f_d(z)\}$ и на случай функций нескольких переменных $f(z_1, \cdots, z_d)$, $d \geq 2$ (см.[5-7]).

Наиболее известные обобщения самой аппроксимации Паде (например, на случай разложений по ортогональным многочленам и полиномам Фабера) опять же основаны на рациональных аппроксимациях и также приводят к соответствующим обобщениям теоремы М (см. [8,9,15]).

С другой стороны, в ряде работ (см. [10-13] а также [1]) были изучены иные обобщения аппроксимации Паде, основанные на производящих функциях (метод Гаммеля-Бейкера). Однако используемая при этом схема обобщает лишь парадиагональные аппроксимации вида $[n + j/n]_f, j = const, n \to \infty$ (как правило, для функций марковского типа) и не может быть основой результатов типа теоремы М.

В недавней работе [14] была предложена простая схема, естественным образом обобщающая метод Гаммеля-Бейкера в достаточно общем контексте. Она позволяет, в частности, рассматривать и строчные аппроксимации. Ниже приведен этот подход, а также показано, что на этом пути и теорема М находит свое естественное обобщение.

2 Обобщенная аппроксимация типа Паде-Гаммеля-Бейкера

2.1. Рассмотрим Банахово пространство B над полем комплексных чисел с метрикой $||\cdot||_B$ и некоторый базис $\{\alpha_n\}, ||\alpha_n||_B = 1$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ в нем.

Пусть задан степенной ряд (производящая функция системы $\{\alpha_n\}$)

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n w^n \alpha_n, \quad \{g_n\} \subset \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

сходящийся при $|w| < R_g \quad (0 < R_g \le \infty)$ и $g_n \ne 0$ при $n \ge N_g \ge 0$.

Для произвольного $f \in B, \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \alpha_n$ и целого $N \ge 1$ обозначим

$$S_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \alpha_n, \quad R_N(f) = \sum_{n=N}^{\infty} f_n \alpha_n. \tag{2}$$

Таким образом, $f = S_N(f) + R_N(f)$. Согласно формуле суммирования по частям Абеля имеем

$$R_N(f) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n \beta_n = b_N w^{-N} \sum_{k=N}^{\infty} w^k \beta_k + \sum_{n=N}^{\infty} (b_{n+1} - b_n w) w^{-n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} w^k \beta_k, \tag{3}$$

где $b_n = f_n/g_n$, $\beta_n = g_n \alpha_n$, $n \ge N_g$ и $w \in \mathbb{C}$, $w \ne 0$, $|w| < R_g$.

Для заданного конечного множества комплексных чисел $\{w_k\}, \quad w_k \ne 0, \quad |w_k| < R_g, \quad k = 1, 2, ..., m$, введем в рассмотрение следующие рекуррентно определяемые последовательности:

$$\Delta_n^0 = b_n,\ \Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{k-1} - w_k \Delta_n^{k-1}, \quad n \ge N,\ 1 \le k \le m \tag{4}$$

$$U_1(n,k) = w_1^1,\ U_p(n,k) = \sum_{s=n+1}^{k-p+1} \left(\frac{w_p}{w_{p-1}}\right)^s U_{p-1}(s,k)$$

$$2 \leq p \leq m,\ n \geq N-1,\ k \geq N+p. \tag{5}$$

Теорема 1, [14]. *При $N \geq N_g$ справедлива формула*

$$R_N(f) = \sum_{p=0}^{m-1} \Delta_N^p w_{p+1}^{-N} \sum_{k=N+p}^{\infty} U_{p+1}(N-1,k) w_1^k \beta_k +$$
$$\sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^m w_m^{-n-1} \sum_{k=n+m}^{\infty} U_m(n,k) w_1^k \beta_k. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $m = 2$ и в формуле (3) $w = w_1$. Применив снова формулу Абеля соответстенно выбору $w = w_2$, выбрав Δ_n^1 вместо b_n и изменив порядок суммирования в последней двойной сумме, без труда придем к формуле (6) при $m = 2$. Повторив этот процесс по индукции, добавляя значения w_k $(k = 3, 4, ..., m)$ и, учитывая соотношения (4) и (5), придем к формуле (6).

В случае $m = 2$ и $w_2 \neq w_1$ имеем

$$R_N(f) = b_N \rho_N(w_1) + \Delta_N^1 \frac{\rho_N(w_1) - \rho_N(w_2)}{w_1 - w_2} + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^2 \frac{\rho_{n+1}(w_1) - \rho_{n+1}(w_2)}{w_1 - w_2} =$$
$$\frac{(b_{N+1} - w_2 b_N)\rho_N(w_1) - (b_{N+1} - w_1 b_N)\rho_N(w_2)}{w_1 - w_2} + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^2 \frac{\rho_{n+1}(w_1) - \rho_{n+1}(w_2)}{w_1 - w_2} \tag{7}$$

где обозначено

$$\rho_n(w) = w^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} w^k \beta_k = w^{-n}(g(w) - \sum_{k=0}^{n-1} w^k g_k \alpha_k),\ n \geq N_g,\ |w| < R_g. \tag{8}$$

Если же $w_2 = w_1$, то, согласно (5), выражение $(\rho_n(w_1) - \rho_n(w_2))(w_1 - w_2)^{-1}$ надо заменить производной $\rho_n'(w_1)$. Добавляя последовательно значения w_3, w_4, ..., w_m, мы придем к видоизмененной формуле (6), содержащей значения функции $\rho_n(w)$ и (если встречаются величины $w_k = w_p,\quad k \neq p$) ее производных в точках $\{w_k\}$. Основываясь на свойствах формулы (7), можно показать по индукции, что и в общем случае результат не зависит от нумерации множества $\{w_k\}$. Эти рассуждения одновременно доказывают сходимость всех рядов, фигурирующих в формуле (6). •

2.2. Пусть в множестве $\{w_k\}$ все точки разные $(w_i \neq w_j, i \neq j)$. Повторив схему, приведенную при доказательстве теоремы 1, по индукции придем к следующей формуле, обобщающей представлвние (7)

$$R_N(f) = \sum_{p=1}^{m} \Delta_N^{p-1} \sum_{k=1}^{p} \frac{\rho_N(w_k)}{M(p,k)} + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^m \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_{n+1}(w_k)}{M(m,k)}, \tag{9}$$

где обозначено

$$M(1,1) = 1,\ M(p,k) = \prod_{j=1,\, j\neq k}^{p} (w_k - w_j),\ p \geq 2,\ k = 1, 2, \cdots, p. \tag{10}$$

Пусть теперь Γ_m - контур в круге $|z| < R_g$, охватывающий множество $\{w_k\}$ и точку $w = 0$. Легко видеть, что формула (9) может быть представлена в виде[1]

$$2\pi i\, R_N(f) = \sum_{p=1}^{m} \Delta_N^{p-1} \int_{\Gamma_m} \frac{\rho_N(t)dt}{\prod_{s=1}^{p}(t-w_s)} + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^m \int_{\Gamma_m} \frac{\rho_{n+1}(t)dt}{\prod_{s=1}^{m}(t-w_s)}. \qquad (11)$$

Заметим теперь, что интегралы справа являются аналитическими функциями каждого из параметров $\{w_k\}$ в области с границей Γ_m. Отсюда следует, что формула (11) справедлива не только в случае кратных точек в $\{w_k\}$, но и когда в множестве$\{w_k\}$ содержатся нули. При $w_k = 0$ имеем (см. (4)) $\Delta_n^k = \Delta_n^{k-1}$ и соответствующий шаг индукции в доказательстве Теоремы 1 не меняет формул (7)-(11). Поэтому такие (а в практическом плане - достаточно малые) значения заранее можно выбрасывать из множества $\{w_k\}$.

2.3. В классическом случае аппроксимации Паде имеем $\alpha_n = z^n, g_n \equiv 1, g(w) = (1-wz)^{-1}$, а "касание в нуле"(см. введение) означает,что

$$\Delta_n^m = 0,\ n = N, N+1, \cdots, N+m-1 \qquad (12)$$

Из формул (6) и (11) следует, что, если мы хотим минимизировать последний член в (11), используя лишь величины $\{f_n\}$ при $n = N, N+1, \cdots, N+2m-1$, эти же условия естественны и в рассматриваемом общем случае. Соответствующий алгоритм аппроксимации основан на использовании коэффициентов $\{f_n\}$ при $n = 0, 1, \cdots, N+2m-1$ и выглядит следующим образом:

Алгоритм А.

А1. Решается следующая линейная система уравнвний относительно переменных $\{p_k\} = \{p_k^{(N)}\}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ (см. обозначения к (3))

$$\sum_{k=0}^{m} b_{N+m+j-k} p_k = 0,\ p_0 = 1,\ j = 0, 1, \cdots, m-1. \qquad (13)$$

А2. Множество $\{w_k\} = \{w_k^{(N)}\}$, $k = 1, 2, ..., m$, определяется решением уравнения

$$Q_m^{(N)}(w) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k p_k^{(N)} w^{m-k} = 0, \qquad (14)$$

т.е. в качестве корней многочлена $Q_m^{(N)}(w)$.

А3. Строится аппроксимационная формула

$$f \approx S_{N,m}(g,f) := S_N(f) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^{m} \Delta_N^{p-1} \int_{\Gamma_m} \frac{\rho_N(t)dt}{\prod_{s=1}^{p}(t-w_s^{(N)})}. \qquad (15)$$

Реализация этого алгоритма возможна лишь в случае, когда система (12) имеет решение и множество $\{w_k^{(N)}\}$ лежит в круге $|w| < R_g$.

[1]Нетрудно показать, что, для "голоморфных"относительно w функций вида (1) приводимые ниже операции с рядами, производными и интегралами строго обоснованы при $|w| < R_g$.

Как видим, при $\{\alpha_n\} = z^n , z \in \mathbb{C}$, когда B - пространство аналитических в единичном круге функций с равномерной метрикой, Алгоритм А совпадает с классическим алгоритмом Паде для аппроксиманта $[N+m-1/m]_f = P_{N+m-1}(w)/Q_m(w)$ (если записать $P_{N+m-1}(w)/Q_m(w)$ в виде частного и остатка от деления). Разница лишь в том, что в нашем случае вместо множества $\{f_n\}$ используется $\{b_n\} = \{f_n/g_n\}$, $n = 0, 1, \cdots , N+2m-1$, а в качестве аппрокимантов фигурируют значения производящей функции $g(w)$ (или ее производных) на множестве $\{w_k\}$ и линейная комбинация базисных элементов $\{\alpha_n\}$ при $n = 0, 1, \cdots , N-1$. Соответственно, многие результаты из теории аппроксимаций Паде могут быть перенесены на этот, гораздо более общий, случай.

Последнее обстоятельство впервые было замечено (в случае диагональных аппроксимаций $S_{1,m}(g, f), m \to \infty$ степенных рядов производящими функциями) в работе [10]. Такой подход получил название метода Гаммеля-Бейкера (см. также [1] и [11]), но широкого развития в дальнейшем он не получил. Отметим здесь также работу [12], в которой была изучена сходимость парадиагональных аппроксимаций $S_{N,m}(g, f), N = const, m \to \infty$ в случае разложений по полиномам Лежандра,- с использованием одной из классических производящих функций,- а также работу [13], посвященную более общей нелинейной аппроксимации.

Насколько нам известно, аппроксимации общего вида (15), как и строчные аппроксимации $S_{N,m}(g, f), m = const, N \to \infty$, для степенных рядов, ранее работы [14] не рассматривались.

3 Основная теорема

3.1. Рассмотрим систему функций $\{A_n(z)\}$, $z = (z_1, ..., z_d) \in \mathbb{C}^d$, $d \geq 1, n = 1, 2, ...$, аналитичных и линейно независимых в (необязательно связной или однолистной) замкнутой области $z \in \overline{\Omega} \neq \emptyset, \Omega \subset C^{\,d}$, со значениями в Банаховом пространстве Λ с нормой $\| \cdot \|_\Lambda$, и формальный степенной ряд

$$G(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n A_n(z), \quad w \in \mathbb{C} \tag{16}$$

Предположим, что при $0 < \tau < \Theta \leq \infty$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau^n ||A_n(z)||_\Lambda \tag{17}$$

сходится в области $z \in D_\tau \subset \Omega$, $D_\tau \neq \emptyset$ и расходится при $z \in \Omega \setminus D_\tau$. Очевидно, $D_{\tau_1} \subset D_{\tau_2}$ при $\tau_1 > \tau_2$. Нетрудно видеть, что такими же свойствами обладает и формально продифференцированный по w ряд (16).

Определим теперь H_τ как Банахово пространство функций $f(z)(f : \overline{D}_\tau \mapsto \Lambda)$, аналитических в области $z \in \overline{D}_\tau$ с метрикой

$$||f(z)||_\tau = \max_{z \in \bar{D}_\tau} \| \, f(z) \, \|_\Lambda \tag{18}$$

В соответствии с (1), ряд (16) является производящей функцией системы $\{\alpha_n\} = \{A_n(z)/\| A_n(z) \|_\tau\}$ в пространстве H_τ, и $g_n = \| A_n(z) \|_\tau \neq 0$ (В данном случае $B = \overline{\{\alpha_n\}} \subset H_\tau$). Отметим также, что если $z \in D_\tau$ и $\tau > s > 0$, то ряд (16) сходится в D_s со скоростью, не меньшей, чем геометрическая прогрессия со знаменателем s/τ.

Для аналитической в D_τ функции $f = f(z)$ обозначим через $\Phi_f \supset D_\tau$ максимальную (необязательно связную или однолистную) область, соответствующую ее аналитическому продолжеию из D_τ.

Пусть функция $h_w(z) = G(w, z)$, представимая рядом (16) при $z \in D_{|\omega|}$, аналитически продолжается в область $\Psi_w = \Phi_{h_w}$.

Условие G.. Функция $G(w, z)$ бесконечно дифференцируема по w в окрестости любой точки $(w, z), w \in \mathbb{C}\,, |w| < \Theta\,, z \in \Psi_w$.

Обозначим теперь через Υ заданное множество $\{\gamma_n\}, 0 \neq \gamma_n \in \mathbb{C}\,, |\gamma_1| < |\gamma_2| < ... < |\gamma_q|$, и целые числа $\{m_n\}, m_n \geq 1, n = 1, 2, ...q < \infty$. Условимся считать, что $f(z) \in F_\Upsilon$, если

$$f(z) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=0}^{m_k-1} a_j^{(k)} G^{(j,0)}(\gamma_k, z) \tag{19}$$

где $\sum_{p=1}^q m_p = m < \infty; \{a_j^{(k)}\} \subset \mathbb{C},\ G^{(j,0)}(\tau, z) = \partial^j G(\tau, z)/\partial \tau^j,\ a_{m_k-1}^{(k)} \neq 0,\ k = 1, \cdots, q$.

Очевидно, что если $f(z) \in F_\Upsilon$, то $f(z) \in H_\tau$ при любом $\tau < |\gamma_1|$.

Обозначив, далее, $g(w) = G(w, z), \rho_n(w) = \rho_n(w, z)$, заметим , что при $z \in D_\tau$, $\tau > |\gamma_q|$, справедливо двойственное представление (8), причем последняя форма записи через $G(w, z)$ справедлива и при аналитическом продолжении функции ρ_n по z в область Ψ_w.

Рассмотрим теперь следующую функцию ($p \geq$ и $n > 0$ - целые)

$$\rho_n^{(p)}(w, z) = w^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} k^p w^k A_k(z)\,,\ z \in D_{|w|} \tag{20}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено условие G, $\{\sigma_n\} \subset \mathbb{C}, \sigma \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ и $p = const$. Тогда при $z \in \Psi_\sigma \bigcap D_\tau$*

$$\lim_{n\to\infty} \| \rho_n^{(p)}(\sigma_n, z) \|_\Lambda^{1/n} \leq \tau^{-1}$$

Доказательство. Пусть $0 < \tau_- = const < \tau$. Очевидно,

$$\| n^p A_n(z) \| < Const\,(\tau_-)^{-n}\,,\ z \in D_\tau, n > 0.$$

Рассмотрим сначала случай $|\sigma| < \tau$. При τ_-, достаточно близком к τ, и при достаточно большом n $|\sigma_n| < \tau_1 = const < \tau_-$. Поскольку бесконечный ряд в средней части формулы (8) мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $(\tau_1)/(\tau_-)$, имеем

$$\| \rho_n^{(p)}(\sigma_n, z) \|_\Lambda \leq Const\,(\tau_-)^{-n}$$

Пусть теперь $|\sigma| > \tau$. На основе правой части формулы (8), из условия G, при достаточно большом n, получим

$$\| \rho_n^{(p)}(\sigma_n, z) \|_\Lambda \leq |\sigma_n|^{-n}(Const + \frac{|\sigma_n|^n/(\tau_-)^n + 1}{|1 - |\sigma_n|/(\tau_-)|}) \leq \frac{Const\,(\tau_-)^{-n}}{|1 - |\sigma|/\tau_-|}$$

Наконец, при $|\sigma| = \tau$, аналогично,

$$\| \rho_n^{(p)}(\sigma_n, z) \|_\Lambda \leq Const\, n\, (\tau_-)^{-n}$$

Из приведенных оценок, в силу произвольной близости τ_- к τ, получим утверждение Леммы. •

3.2. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\,; \{\alpha_i^{(k)}\}\,, \{\beta_r^{(k)}\}\,, \{u_i^{(k)}\} \subset \mathbb{C}\,; i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., q < \infty; r = 1, 2, ..., m_k$; $\sum_{p=1}^q m_p = m$, где $m_k \geq 1$ - целые. Рассмотрим $(m \times m)$ матрицу $A(\zeta)$ вида

$$A(\zeta) = [a_{ij}(\zeta)];\ a_{ij}(\zeta) = u_i^{(k)} \prod_{r=1}^{r} (\zeta + \alpha_i^{(k)} + \beta_r^{(k)});$$

$$i = 1, 2, ..., m; \sum_{p=1}^{k} m_p \leq j < \sum_{p=1}^{k+1} m_p; r = j - \sum_{p=1}^{k} m_p; k = 1, 2, ..., q, \tag{21}$$

условно приняв $\prod_{r=a}^b(\cdot) = 1$ при $b < a$.

Следующий вспомогательный результат играет в дальнейшем существенную роль

Лемма 2. *Определитель матрицы $A(\zeta)$ не зависит от ζ, т.е.*

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}(detA(\zeta)) = 0$$

Доказательство. Матрица $A(\zeta)$ состоит из q матриц-столбцов $A^{[k]}(\zeta)$ размеров $(m \times m_k)\,, k = 1, 2, ..., q$, соответственно. В свою очередь, r-тый столбец матрицы $A^{[k]}$, при подстановке $z = \zeta + \alpha_i^{(k)}$ для любой i-той строки, выражается посредством полинома

$$P_s^{[k]}(z) = \prod_{r=1}^{s} (z + \beta_r^{(k)})\,, r = 0, 1, .., m_k - 1$$

Очевидно, при $m_k > 1$ полиномы $\{P_s^{[k]}(z)\}$, $s = 0, 1, ..., r$, $r \leq (m_k - 1)$, составляют базис в пространстве всех полиномов степени не выше r и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial z} P_{r+1}^{[k]}(z) = \sum_{s=0}^{r} c_s P_s^{[k]}(z),$$

где коэффициенты $\{c_s\}$ зависят только от k и r. Отсюда следует, что, если при $m_k > 1$ и $r < m_k$ продифференцировать по ζ $(r+1)$- тый столбец матрицы $A^{[k]}$, то он станет линейной комбинацией ее первых r столбцов с коэффициентами $\{c_s\}$.

С другой стороны, первые столбцы матриц $\{A^{[k]}\}$ от ζ не зависят. Остается применить к $\partial(detA(\zeta))/\partial\zeta$ известную формулу дифференцирования определителей. •

3.3. Следующий общий результат служит основой различных конкретных обобщений теоремы М

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* G, $f_0(z) \in F_\Upsilon, e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n A_n(z)$, $\lim_{n\to\infty} |e_n|^{1/n} \leq \theta,\ 0 < \theta < |w_1|$ *и*

$$f(z) = f_0(z) + e(z) \tag{22}$$

Тогда при любом $\tau > \theta$ *и* $z \in D_\tau \bigcap \Phi_{f_0}$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} ||f(z) - S_{N,m}(g,f)(z)||_\Lambda^{1/N} < \theta/\tau < 1 \tag{23}$$

Доказательство. Шаги А1 и А2 Алгоритма А полностью идентичны соответствующим шагам аппроксимации Паде $[N+m-1/m]_f$, соответствующей случаю, когда $d=1$ и $\{A_n(z)\} = \{z^n\}$. При этом справедлива Теорема М и из многих известных ее доказательств (см., например, [1]) следует, что при $N \to \infty$ коэффициенты $\{p_k\} = \{p_k^{(N)}\}$ многочлена (14) стремятся к коэффициентам $\{p_k^0\}$ многочлена

$$Q_m^0(\gamma) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k p_k^0 \gamma^{m-k} = \prod_{s=1}^{q} (\gamma - \gamma_s)^{m_s}. \tag{24}$$

со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, не большим, чем $\theta/|w_1| < 1$.

Обозначим теперь через W_N множество нулей полинома $Q_m^{(N)}(w)$ (см. (14)), с учетом их кратностей, и введем следующее, более подробное, обозначение для последовательности (4)

$$\Delta_n^m = \Delta_n^m(W_N, f) \tag{25}$$

Имеем $\Delta_n^m(W_N, f) = \delta_n^0 + \delta_n^1$, где

$$\delta_n^0 = \Delta_n^m(W_N, f_0), \quad \delta_n^1 = \Delta_n^m(W_N, e) \tag{26}$$

Из условий теоремы немедленно следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\delta_n^1\|_\Lambda^{1/n} \leq \theta \tag{27}$$

С другой стороны, согласно шагу А1 алгоритма А,

$$\delta_{N+i}^0 = -\delta_{N+i}^1, \quad i = 0, 1, ..., m-1. \tag{28}$$

Нашей конечной целью является оценка последней суммы в (11) при $\{w_s\} = \{w_s^{(N)}\}$.

Для максимального прояснения дальнейшей схемы доказательства, сначала остановимся на простейшем случае, когда в (19) $m_k = 1, k = 1, 2, ..., m$ (т.е когда нули полинома (24) простые). Тогда

$$\delta_n^0 = \Delta_n^m(W_N, f_0) = \sum_{k=1}^{m} a_0^k \sum_{j=0}^{m} (w_k^{(N)})^{n+m-j} p_j \tag{29}$$

и, обозначив

$$B(N)=(B_1,...,B_m)^{tr}, B_k=B_k(N)=a_0^k(w_k^{(N)})^N\sum_{j=0}^{m}(w_k^{(N)})k^{m-j}p_j,$$
$$k=1,2,...,m;\ \delta^1(N)=(\delta^1_N,\delta^1_{N+1},...,\delta^1_{N+m-1})^{tr} \tag{30}$$

получим, согласно (28)

$$V_m\,B(N)=-\delta^1_N$$

где $V_m=[w_k^j]$; $k,j=0,1,...,(m-1)$ - неособая матрица Вандермонда, не зависящая от N . Отсюда и из (27) имеем

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\|B_p(N)\|_\Lambda^{1/N}\le\theta,\ p=1,2,...,m \tag{31}$$

С другой стороны, согласно (29)

$$\Delta_n^m(W_N,f_0)=\sum_{p=1}^{m}\gamma_p^{n-N}B_p(N)$$

В силу условия G, при зафиксированном $\tau>\theta$ и $z\in D_\tau\bigcap\Phi_{f_0}$ из формул (9), (15) и (27) имеем

$$f(z)-S_{N,m}(g,f)(z)=\sum_{n=N}^{\infty}\Delta_n^m(W_N,f_0)\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho_{n+1}(w_k^{(N)},z)}{M(m,k)}+r_N(z), \tag{32}$$

где $\overline{\lim}_{N\to\infty}\|\ r_N(z)\ \|_\tau\le\theta.$

Рассмотрим теперь выражения вида

$$I_{kp}^{(N)}(z)=\gamma_p^{-N}\sum_{n=N}^{\infty}\gamma_p^n\rho_{n+1}(w_k^{(N)},z)\,;\ k,p=1,2,...,m \tag{33}$$

Если учесть формулу (8) и поменять порядок суммирования при $z\in D_\tau,\tau>\max_{k,p}\{|w_k^{(N)}|,|\gamma_p|\}$ и достаточно большом N, то получим

$$I_{kp}^{(N)}(z)=\begin{cases}\rho_N^{(1)}(\gamma_p,z)-N\rho_N(\gamma_p,z), & w_k^{(N)}=\gamma_p;\\ (\rho_N(w_k^{(N)},z)-\rho_N(\gamma_p,z))(w_k^{(N)}-\gamma_p)^{-1}, & w_k^{(N)}\ne\gamma_p;\end{cases} \tag{34}$$

Заметим теперь, что это соотношение сохраняет свою силу при аналитическом продолжении по z. Остается применить Лемму 1 и оценку (31) к формулам (32)-(34).

Перейдем теперь к общему случаю, когда в (19) $\exists k,m_k>1$. Для того, чтобы воспользоваться известными формулами, приведенными в [1], заметим, что функцию f_0 можно переписать в виде

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k}c_j^{(k)}G^{[j-1]}(1/\eta_k,z),$$

где $\{c_j^{(k)}\} \subset \mathcal{C}\,, c_{m_k}^{(k)} \neq 0$, $G^{[j]}(1/\tau, z) = \partial^j G(1/\tau, z)/\partial \tau^j$, $\eta_k = 1/\gamma_k\,, k = 1, \cdots, q$.

Отсюда следует, что при $z \in D_\tau\,, \tau > |\gamma_1|$

$$f_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i\, A_i(z);\; d_i = \sum_{k=1}^{q} \sum_{\tau=1}^{m_k} r_\tau^{(k)} \binom{-\tau}{i} (-\eta)^{-i};\; r_{m_k}^{(k)} \neq 0,$$

что в точности совпадает с формулами гл.1 книги [1], используемыми при доказательстве теоремы M.

Таким образом, заимствовав известную факторизацию матрицы $D_m^{(N)} = [d_{N+i-j}]$; $i, j = 1, 2, ..., m$; (см. [1], формулы (2.32)-(2.34) главы 6, части 1), получим (см. выше, (26)-(28))

$$D_m^{(N)} = V_m^{(N)}\, C_m^{(N)}\, \Xi_m\, V_m', \tag{35}$$

где неособые блочно-диагональная матрица Ξ_m и матрица V_m' не зависят от N, $C_m^{(N)} = diag\{c_p^{(N)}\}$, где $c_p^{(N)} = (-\eta_k)^{-N}$ при $\sum_{s=0}^{k} m_s \leq p < \sum_{s=0}^{k+1} m_s$, а неособая матрица $V_m^{(N)} = [V_{ij}^{(N)}]$; $i, j = 1, 2, ..., m$ имеет вид (21) при $\zeta = N\,; \{\alpha_i^{(k)}\} = \{i\}\,, \beta_r^{(k)} = (r - 1)\,, \{u_i^{(k)}\} = \{\gamma_k^i\}$; $i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., q; r = 1, 2, ..., m_k$.

Ключевым моментом доказательства является тот факт, что, согласно лемме 2 и известным формулам Крамера, коэффициенты матрицы $(V_m^{(N)})^{-1}$ являются полиномами от N степени не выше m.

Рассмотрим теперь вектор $B = B(N) = (B_1(N), B_2(N), ..., B_m(N))^{tr} = C_m^{(N)}\, \Xi_m\, V_m'\, P$, где $P = (p_1^{(N)}, p_2^{(N)}, ..., p_m^{(N)})^{tr}$.

Согласно формулам (25)-(28) и (35) $B = -(V^{(N)})^{-1}\delta_N^1$ и, следовательно, оценка (32) остается в силе, что и позволяет завершить доказательство.

Действительно, нетрудно убедиться, что здесь аналогом формулы (29) является представление

$$\delta_n^0 = \sum_{j=0}^{m} d_{n+m-j} p_j^{(N)} = v(n) C_m^{(n-N)} B(N),\; n \geq N,$$

где коэффициенты вектора $v(n) = (V_{11}^{(n)}, V_{12}^{(n)}, \cdot, V_{1m}^{(n)})$ (см. выше, обозначения к (35)) являются полинимами от n степени не выше m.

Отсюда, вновь учитывая Лемму 2, нетрудно провести рассуждения, вполне аналогичные выкладкам (32)-(34).$\bullet$

4 Обобщения теоремы Монтессу де Болора в классичецких случаях

Остановимся теперь на некоторых частных случаях применения Теоремы 2, когда области $D_\tau, \tau > 0$, можно описать явно, а производящие функции $G(w, z)$ - представить в замкнутой форме, позволяющей, в частности, выявить максимальную область Ψ_w их аналитичности. В рассматриваемых случаях условие G выполняется очевидным образом

Приводимая ниже численная реализация Алгоритма А для степенных рядов и ортогональных полиномов была осуществлена на персональных компьютерах с процессорами Pentium 4, 512 RAM, с использованием системы MATHEMATICA 4.1 (см. [19]).При этом коеффициенты $\{f_n\}$ изучаемых функций вычислялись применением соответствующих пакетов алгоритмов автора, доступных на сайте *http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/*.

3.1. Уже в случае степенного ряда ($A_n(z) = z^n, D_\tau = \{z : |z| < 1/\tau\}, \tau > 0$) Теорема 2 позволяет рссматривать гораздо более общие ситуации, чем Теорема М. Прежде всего, это касается возможности применения многозначных производящих функций. Поясним ситуацию на простом примере.

Пример1. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \log(1 + iz/2) + i\log(1 - 2z/3) - 2(1 - 2z/3)^{-1} - (1 - z/(2(1 + i)))^{-1/2} \qquad (36)$$

где в окрестности точки $z = 0$ (т.е. при определении "элемента"(*), см.Введение) выбраны главные ("нулевые") ветви указанных многозначных функций (т.е. принято $\log 1 = 0, 1^{-1/2} = 1$)).

Функция $f(z)$ аналитична и однолистна при $|z| < 3/2$ и, в соответствии с Теоремой 2 , $G(w, z) = \log(1 - wz)\,, G(w, 0) = 1$ и надо брать либо $m = 2\,, \theta = 2$ (корень $w = 2/3$ уравнения (14) двухкратный), либо $m = 3\,, \theta = 2^{3/2}$.

Функция $G(w, z) = \log(1 - wz), G(w, 0) = 1$, аналитически продолжается ,- при каждом фиксированном $w \neq 0$,-на бесконечно-листную Риманову поверхность, с точкой ветвления $z = w^{-1}$. Соответственно, при $|z| < 2^{3/2}$ функция $f(z)$ аналитически продолжается на Риманову поверхность с двумя точками ветвления $z = 3/2$ и $z = 2i$ (за пределы "главного"листа функции $e(z) = (1 - z/(2(1 + i)))^{-1/2}$ мы не выходим). Например, если точка $z = z_{pq}\,, |z_{pq}| < 2^{3/2}$ лежит на p-том листе функции $\log(1 + iz/2)$ (т.е.$z_{pq} = 2i + (z_{00} - 2i)e^{2\pi ip}$) и на q-том листе функции $\log(1 - 2z/3)$ (т.е.$z_{pq} = 3/2 + (z_{00} - 3/2)e^{2\pi iq}$), $p, q = 0, \pm1, \pm2, ...$, то аналитическое продолжение функции $f(z)$ в эту точку Римановой поверхности дает следующий результат

$$f(z_{pq}) = f(z_{00}) + 2\pi(ip - q)\,, z_{00} \in D_{2^{-3/2}} \qquad (37)$$

Подчеркнем, что если $|z_{pq}| < 2^{3/2}$, то $z_{00} \in D_{2/3}$, но $z_{pq} \notin D_{2/3}$ при $p^2 + q^2 \neq 0$.

Приводиные в Таблице 1 результаты численной реализации Алгоритма А для функции (36) соответствуют круговой области $E_1 : \{z : |z| < 1.25\}$ и двум секторам: $E_2 : \{z : |z| < 1.7\,, \pi/4 \leq argz \leq 3\pi/4\}$ и $E_3 : \{z : |z| < 2.5\,, \pi \leq argz \leq 3\pi/2\}$. Очевидно, $E_1 \subset D_{2/3}\,, E_2 \subset D_{1/2}\,, E_3 \subset D_{2^{-3/2}}$ и $E_2 \not\subset D_{2/3}, E_3 \not\subset D_{1/2}$.

	$\max\|f(z)\|$		$m = 0$	m=1	m=2	m=3
E_1	12.5	N=16	4×10^{-1}	6×10^{-2}	3×10^{-1}	2×10^{-4}
		N=32	2×10^{-1}	8×10^{-4}	3×10^{-5}	4×10^{-10}
E_2	3.5	N=16	2×10^{1}	1×10^{-1}	8×10^{-2}	6×10^{-4}
		N=32	2×10^{3}	2×10^{-1}	3×10^{-3}	2×10^{-7}
E_3	3	N=16	6×10^{4}	6×10^{1}	8×10^{-1}	4×10^{-4}
		N=32	2×10^{7}	5×10^{4}	1×10^{1}	4×10^{-5}

Таблица 1. *Макси мальные значения* $|f(z)|$ *и абсолютные равномерные ошибки численной реализации Алгоритма А* $(m = 0\,,1\,,2\,,3;\ N = 16\,,32)$ *для функции (36), в областях*E_1, E_2, E_3.

Результаты таблицы 1 хорошо согласуются с утверждениями Теоремы 2. Действительно, при $m = 1$ (когда Теорема 2 еще не работает) в области E_1 наблюдаются признаки ускорения сходимости, однако в E_2 и E_3 - признаки расходимости (добавим, что при $m = 1\,, N = 128$ ошибка в E_1 равна 2×10^{-7} , в то время, как в E_2 она достигает величины 6×10^4, а в E_3 - примерно 10^{17}). При $m = 2$ и $m = 3$ в области E_1 наблюдается дальнейшее наращивание скорости сходимости и, соответственно, при $m = 2$ есть признаки сходимости в E_2 , а при при $m = 3$ - сходимости в E_3 и ускорения сходимости в E_1 и E_2.

Отметим, что $\log(1 - wz)\,, w \neq 0$, реализуется в пакете MATHEMATICA, как однозначная функция от z, с точкой ветвления $z = w^{-1}$ и с разрезом, идущим из этой точки к бесконечности по лучу $argz = arg(w^{-1})$, причем точка $z = 0$ лежит на главном листе, т.е. $\log(1) = 0$. Из формулы (37) следует, что на всех листах Римановой поверхности функции $f(z)$, в соответствующих точках $z = z_{pq}\,, z_{00} \in E_k\,, p, q = 0.\pm 1, ...;\ k = 1, 2, 3;$, абсолютные ошибки будут те же, что и при $z = z_{00}$, однако относительные ошибки в соответствующих областях будут, вообще говоря, уменьшаться с ростом $|p|$ и $|q|$.

На шаге А2 Алгоритма А получены приближенные значения величин $\{w_k\}$, $k = 1, 2, 3$. В Таблице 2 приведены соответствующие ошибки.

	$m = 1$	$m = 2$	m=3
$N = 16$	$er_1 = 4 \times 10^{-2}$	$er_1 = 6 \times 10^{-2}$ $er_2 = 2 \times 10^{-1}$	$er_1 = 5 \times 10^{-3}$ $er_2 = 5 \times 10^{-3}$ $er_3 = 2 \times 10^{-3}$
$N = 32$	$er_1 = 2 \times 10^{-2}$	$er_1 = 1 \times 10^{-2}$ $er_2 = 1 \times 10^{-2}$	$er_1 = 4 \times 10^{-5}$ $er_2 = 4 \times 10^{-5}$ $er_3 = 1 \times 10^{-5}$

Таблица 2. *Абсолютные ошибки вычисления значений* w_1, w_2, w_3 *посредством шага А2 Алгоритма А* $(m = 0\,,1\,,2\,,3;\ N = 16\,,32)$ *для функции (36).*

Сравнивая Таблицы 1 и 2, можно сделать вывод, что при увеличении m ускорение сходимости достигается не столько за счет более точного вычисления величин $\{w_k\}$, сколько вследствие добавления соответствующих аппроксимантов в формуле (15).

3.2. Пусть D - ограниченное замкнутое множество, дополнение которого D' есть односвязная область и $0 \in D$. Рассмотрим функцию

$$\Psi(w) = w + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k w^{-k} = w + M(1/w)$$

однолистно и конформно отображающую область $|w| > \rho$ на D' так, что $\Psi(\infty) = \infty$ и ряд Маклорена $M(t)$ сходится в круге $|t| < 1/\rho$.

Произвидящая функция системы $\{\pi_n(z)\}$ обобщенных полиномов Фабера определяется соотношением (см.[15] , гл.II)

$$G(w,z) = F(z/\Psi(t))\frac{t\Psi'(t)}{\Psi(t)}R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \pi_n(z)\,, w = 1/t \tag{38}$$

где функция $R(t)$ регулярна при $|t| > \rho$ и ряд $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ имеет единичный радиус сходимости.

Обозначим теперь через $w = \Phi(z)$ функцию, обратную к $z = \Psi(w)$. Известно (см. [16]), что $\Phi(z) = \phi(z)/\phi'(\infty)$, где $w = \phi(z)$ - функция, конформно отображающая область D' на $|w| > 1$ при условии $\phi(\infty) = \infty\,, \phi'(\infty) > 0$. Тогда D_τ - конечная область, ограниченная линией уровня $L_\tau : \{z, |\phi(z)| = 1/\tau\,, \tau < \rho\}$.

При $F(z) = (1-z)^{-1}$ аппроксимантами являются рациональные функции и, в силу единственности аналитического продолжения, Теорема 2 совпадает с обобщением Теоремы M, приведенным в [15] и основанным на методе, совершенно отличным от Алгоритма A. В то же время, формула (38) позволяет использовать широкий выбор других аппроксимантов, в том числе и многозначных.

3.3. Переходя к случаю разложений по классическим ортогональным полиномам на конечном отрезке (см.[17,18]) ,остановимся на семействе полиномов Гегенбауера $\{C_n^\lambda\}(x)\,, |x| \le 1\,, \lambda > -1/2\,, n = 0, 1, 2, ...$; и на следующей, - одной из наиболее известных и удобных для приложений, - производящей функции

$$G_\lambda(w,z) = (1 - 2zw + w^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\, C_n^\lambda(z) \tag{39}$$

В этом случае $D_\tau, \tau < 1$ - внутренность эллипса $|z + \sqrt{z^2-1}| = 1/\tau$ с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей, равной $1/\tau$ (см.[1],[9]). В частном случае, когда λ - целое, а $f_0(z)$ рациональная функция, Теорема 2 совпадает с основанным на ином методе обобщением Теоремы M (см.[9],[15]) для широкого класса ортогональных полинимов. В остальных случаях приведенная производящая функция имеет точки ветвления и, соответственно, в Теореме 2 речь идет об аналитическом продолжении на Риманову поверхнисть.

Для полиномов Якоби общего вида можно использовать известную классическую производящую функцию (см. [17],[18]), обладающую, вообще говоря, более сложной Римановой поверхностью. С другой стороны, для частных случаев полиномов Гегенбауера (полиномы Лежандра и Чебышева) имеется более богатый набор производящих функций.

Рассмотрим теперь пример численной реализации Алгоритма A для плиномов Гегенбауера.

Пример2. Рассмотрим функцию

$$f(z) = (z+2)^{-\pi} - i(z+3i)^{-\pi} + (z+8+7i)^{-1} \tag{40}$$

где, как и в Примере 1, в окрестности точки $z = 0$ выбраны главные ветви указанных бесконечно-значных степенных функций, имеющих точки ветвления $z = -2$ и $z = -3i$ соответственно.

В соответствии с Теоремой 2 , в данном случае можно выбрать $G_\pi(w,z) = (1-2zw+w^2)^{-\pi}$ и принять либо $m=1$, либо $m=2$. Сравнивая (39) и(40), приходим к выводу, что функция $(z+3i)^{-\pi}$ может быть представлена,-с точностью до постоянного множителя,- в одном из двух видов $g_1(z) = G_\pi(-2\pm\sqrt{3}, z)$, а функция $(z+2)^{-\pi}$ - как $g_2(z) = G_\pi((-3\pm\sqrt{10})i, z)$. Ряд (39) для $g_1(z)$ сходится внутри эллипса с фокусами в точках $z=\pm 1$ и с полуосями, соответственно равными $a_1 = 2$ и $b_1 = \sqrt{3}$. Для $g_2(z)$ эллипс сходимости имеет полуоси, равные $a_2 = \sqrt{10}$ и $b_2 = 3$. Наконец, ряд по полиномам $\{C_n^\pi(z)\}$ для функции $(z+8+7i)^{-1}$ сходится внутри эллипса с полуосями, соответственно равными $a_3 = (\sqrt{98}+\sqrt{130})/2$ и $b_3 = \sqrt{-1+(7\sqrt{2}+\sqrt{130})/4}$.

Указанные области соответствуют вышеприведенным обозначениям $D_{\tau_j} = \{z : |z+\sqrt{z^2-1}| \le 1/\tau_j\}$, $\tau_j = (a_j+b_j)^{-1}$, $j=1,2,3$.

Таким образом, ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n C_n^\pi(z)$ функции (40), условно соответствующий значению $m=0$, сходится в области D_{τ_1} и (см. Теорему 2) при $m=1$ имеем $\theta = \tau_2$, а при $m=2$ имеем $\theta = \tau_3$.

Приводиные в Таблице 2 результаты численной реализации Алгоритма A для функции (40) соответствуют эллиптическим секторам $E_1 : \{z = r(a_1\cos(t)+i\, b_1 sin(t))$, $0\le r\le 2/3, 0\le t\le \pi/2\}$, $E_2 : \{z = r(a_2\cos(t)+i\, b_2 sin(t)), 0\le r\le 2/3, 0\le t\le \pi/2\}$ и $E_3 : \{z = r(a_3\cos(t)+i\, b_3 sin(t)), 0\le r\le 1/2, 0\le t\le \pi/2\}$. Имеем $E_1\subset D_{\tau_1}\subset E_2\subset D_{\tau_2}\subset E_3\subset D_{\tau_3}$.

	$\max\lvert f(z)\rvert$		$m=0$	m=1	m=2
E_0	1.1	N=6	5×10^{-2}	3×10^{-3}	7×10^{-5}
		N=12	3×10^{-4}	8×10^{-7}	2×10^{-12}
E_1	0.2	N=6	3×10^{-1}	6×10^{-3}	6×10^{-5}
		N=12	1×10^{-1}	2×10^{-4}	2×10^{-10}
E_2	0.2	N=6	4×10^{0}	4×10^{-2}	4×10^{-3}
		N=12	4×10	2×10^{-2}	2×10^{-8}
E_3	0.2	N=6	6×10^{3}	2×10^{0}	8×10^{-2}
		N=12	1×10^{6}	2×10^{3}	6×10^{-5}

Таблица 3. *Максимальные значения* $|f(z)|$ *и абсолютные равномерные ошибки численной реализации Алгоритма A* ($m=0,1,2$; $N=6,12$) *для функции (40), в областях* E_0, E_1, E_2, E_3.

Нетрудно убедиться, что результаты последнипь трех строк Таблицы 3 также (аналогично результатам, прижеденным в Таблице 1) хорошо согласуются с утверждениями Теоремы 2.Что же касается первой строки, содержащей ошибки на отрезке $E_0 = [-1,1]$ исходного ортогонального разложения функции $f(x)$, $x\in E_0$, то она формально соответствует предельному переходу $\tau\to\infty$. Как видим, и здесь скорость сходимисти резко возрастает с ростом m. Отметим также, что величины классической L_2-нормы на E_0 с весом $(1-x^2)^{\pi-1/2}$ (см.[17,18]) для ошибок при $m=0,1,2$ соответственно равны $8\times10^{-7}, 2\times10^{-9}$ и 5×10^{-15}, в то время, как сама весовая L_2-норма функции $f(x)$ равна 0.26.

Как уже отмечалось выше, для функции (40) имеем $(w_1,w_2) = (-2\pm\sqrt{3}, (-3\pm\sqrt{10})i)$. Интересно, что в данном примере на шаге A2 Алгоритма A приближаются значения $\{w_k\}$, наименьшие из возможных (со знаком "плюс").В Таблице 4 приведены величины ошибок $er_k = |w_k - \tilde{w}_k|$, где $\tilde{w}_k$- соответствующие приближенные значения $\{w_k\}$, $k = 1, 2$.

	$m = 1$	$m = 2$
$N = 6$	$er_1 = 8 \times 10^{-3}$	$er_1 = 2 \times 10^{-4}$ $er_2 = 4 \times 10^{-3}$
$N = 12$	$er_1 = 4 \times 10^{-4}$	$er_1 = 4 \times 10^{-10}$ $er_2 = 3 \times 10^{-7}$

Таблица 4. *Абсолютные ошибки вычисления значений w_1, w_2 посредством Алгоритма А ($m = 0\,,1\,,2$; $N = 6$, 12) для функции (40).*

Общая картина в Примере 2 такая же, как и в Примере 1, включая аналитическое продолжение на соответствующую Риманову поверхность.

Литература

1. Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимации Паде. Мир, Москва, 1986.

2. R. de Montessus de Bollore. *Sur les fractions continues algebriques*, Bull. Soc. Math. France, 1902,V.30, pp. 28-36

3. А. А. Гончар,*Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций* , Мат. Сборник, 1981, 115 (157), No. 4 (8),стр. 590-613

4. J.L.Walsh, *The convergence of approximating rational functions of prescribed type*, Материалы Международной конференции по современным проблемам теории аналитических функций, Ереван, 1965, pp.304-308

5. J. S. R. Chisholm, P. R. Graves-Morris, *Generalization of the theorem of de Montessus to two-variable approximants*, Proc. Royal Soc. London, 1975, A. 342, pp. 341 - 372

6. D. Boichu, V. Robin, *Multivariate Pade-Bergman approximants*, Numer. Math., 2002, 93, pp. 223-238

7. D. E. Roberts, *A vector Generalization of de Montessus‘ Theorem for the Case of Polar Singularities on the Boundary*, J. Approx. Theory, 2002,116, pp. 141-168

8. С.П. Суетин, О сходимости рациональных аппроксимаций полиномиалцных разложений в области мероморфности заданной функции, Мат. Сборник, 1978, 105 (147), No. 3, стр. 413-430.

9. С.П. Суетин, Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда, Успехи Мат. Наук, 2002, Т. 57, вып. 1(343), стр. 45 - 142.

10. J. L. Gammel, C.C. Rousseau, and D. P. Saylor, *A Generalization of the Pade Approximant* , J. Math. Anal. Appl., 1967, 20, pp. 416-420

11. G. A. Baker, *The Pade approximant method and some relatied generalizations*, in the Pade Approximant in Theoretical Physics, G. A. Baker and J. L. Gammel, eds.,Academic Press, New York, 1970

12. A..K. Common and T. Stacey, *Legendre Pade approximants and their application in potential scattering*, J. Phys. A.: Math. Gen., 1978, vol. 11, No. 2, pp. 259-273.

13. R.D.Small *The generating function method of nonlinear approximation*, SIAM J. Numer. Anal., 1988, vol. 25, No. 1, pp. 235-244.

14. А. Б. Нерсесян, Об одном обобщении аппрксимации Паде, Доклады НАН Армении, 2003, том 103, No. 4, стр. 279-285

15. С.П. Суетин, О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера, Доклады АН СССР, 1980, том 253, No. 6, стр. 1322-1325

16. В.И. Смирнов, Н.А.Лебедев. Конструктивная теория функций комплекного переменного, "Наука Москва, 1964

17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцедентные функции, том II, "Наука Москва, 1974

18. Г. Сеге. Ортогональные многочлены, "ФизМатГИз Москва, 1962

19. S. Wolfram. The MATHEMATICA book. Fourth Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1999.

А.Б.Нерсесян:

Институт математики Национальной Академии Наук Атмении,
пр-т Баграмяна 24-Б, 375019, Ереван, Армения
Тел.: +3741 525573
e-mail: nerses@instmath.sci.am